

Препринт ЕФИ-1055(18)-88

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱԶԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
YEREVAN PHYSICS INSTITUTE



Э.Д. ГАЗАЗЯН

О СОБСТВЕННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ
КОЛЕБАНИЯХ В ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ РЕЗОНАТОРАХ

ЦНИИАтоминформ
ЕРЕВАН—1988

Նախնաախոյ եՖի-1055(18)-88

է.Դ. ԳԱՋԱԶՅԱՆ

ԷԼԻԳՍՈՒԴԱԼ ՌԵԶՈՆԱՏՈՐՆԵՐՈՒՄ ՍԵՓԱԿԱՆ ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳ-
ՆԻՄԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Աշխատանքում ուսումնասիրված է էլեկտրամագնիսական դաշտը
էլիպսոիդալ /եռառանցք հայելային էլիպսոիդ/ և ձգված ու սեղմված
սֆերոիդալ ռեզոնատորներում: Ռեզոնատորների սեփական համախառն
ները որոշող քվանտային պայմանների և դաշտի բաղադրիչների համեմա-
տական քննարկումով լուծված է նշված ռեզոնատորներում էլեկտրամագ-
նիսական առանումների այլասերման խնդիրը:

Երևանի ֆիզիկայի ինստիտուտ

Երևան 1988

Препринт ЕФМ-1055(18)-88

УДК 537.8:621.372.413

Э.Д. ГАЗАЗЯН

О СОБСТВЕННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЯХ
В ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ РЕЗОНАТОРАХ

В работе анализируется структура электромагнитных полей в эллипсоидальном (трехосный зеркальный эллипсоид) и в вытянутом и сплюснутом сфероидальных резонаторах в ее равномерном коротковолновом приближении. Исследуются вопросы вырождения колебаний путем рассмотрения различных способов возбуждения (поляризации возбуждения) электромагнитной волны, на основе анализа "квантовых условий", определяющих собственные частоты.

Ереванский физический институт

Ереван 1988

Preprint YERPHI-1055(18)-88

E.D. GAZAZIAN

ON INHERENT ELECTROMAGNETIC OSCILLATIONS
IN ELLIPSOIDAL RESONATORS

The structure of electromagnetic fields in three-axis mirror-ellipsoidal and in extended and flattened spheroidal resonators is analyzed. Different cases of exciting of these resonators are considered and the oscillations' degeneracy problem is discussed when one compares the "quantum" conditions for eigenfrequencies with the corresponding structures of the fields.

Yerevan Physics Institute

Yerevan 1988

В работах [1,2] были получены коротковолновые равномерные асимптотические выражения для компонент полей собственных электромагнитных колебаний в эллипсоидальном (трехосный эллипсоид) и в вытянутом и сплюснутом сфероидальных резонаторах, исследовалась геометрическая структура полей - каустические поверхности и квантовые условия для реализуемых типов колебаний. Метод решения этих задач основан на общих положениях, развитых в работах [3,4].

В настоящей работе анализируется структура полей в эллипсоидальных резонаторах и исследуется вопрос о степени вырождения колебаний путем рассмотрения различных способов возбуждения (поляризации возбуждения) электромагнитных волн. В этом заключается новизна полученных результатов и их отличие от результатов работ [5,6] для случая скалярных волн.

I. В соответствии с положениями, разработанными в работе [4], равномерные асимптотические выражения для полей конструируются в виде линейных комбинаций расходящихся на каустических поверхностях геометрооптических решений. При этом компо -

ненты электромагнитного поля в эллипсоидальной системе координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 разлагаются в геометрикооптическом базисе $\vec{t}_{P_1 P_2 P_3}, \vec{e}_{P_1 P_2 P_3}$, связанном с градиентом эйконалов $\vec{Y}_{P_1 P_2 P_3} = (-1)^{P_1} \frac{\sqrt{\beta(\xi_1)}}{h_1} \vec{\nabla} \xi_1 + (-1)^{P_2} \frac{\sqrt{\beta(\xi_2)}}{h_2} \vec{\nabla} \xi_2 + (-1)^{P_3} \frac{\sqrt{\beta(\xi_3)}}{h_3} \vec{\nabla} \xi_3$ соотношениями

$$\vec{t}_{P_1 P_2 P_3} = [\vec{Y}_{P_1 P_2 P_3} \vec{S}_{P_1 P_2 P_3}] / |[\vec{Y}_{P_1 P_2 P_3} \vec{S}_{P_1 P_2 P_3}]|, \quad \vec{e}_{P_1 P_2 P_3} = [\vec{Y}_{P_1 P_2 P_3} \vec{t}_{P_1 P_2 P_3}], \quad (1)$$

где числа P_1, P_2, P_3 принимают значения 0, 1, а $\vec{S}_{P_1 P_2 P_3}$ — произвольный пока вектор, зависящий от индексов P_1, P_2, P_3 . Выберем его в виде

$$\vec{S}_{P_1 P_2 P_3} = m_{P_1 P_2 P_3}^{(1)} \vec{\nabla} \xi_1 + m_{P_1 P_2 P_3}^{(2)} \vec{\nabla} \xi_2 + m_{P_1 P_2 P_3}^{(3)} \vec{\nabla} \xi_3. \quad (2)$$

Тогда при $m_{P_1 P_2 P_3}^{(1)} = m_{P_1 P_2 P_3}^{(2)} = 0$, т.е. при $\vec{S}_{P_1 P_2 P_3} \parallel \vec{\nabla} \xi_3$ получаем следующие выражения для компонент полей в трехосном эллипсоиде

$$E_{\xi_1} = -\frac{c_1}{ik h_2 \sqrt{1-\gamma_3^2}} L(\xi_1) \frac{dL(\xi_2)}{d\xi_2} L(\xi_3), \quad E_{\xi_2} = -\frac{c_1}{ik h_1 \sqrt{1-\gamma_3^2}} \frac{dL(\xi_1)}{d\xi_1} L(\xi_2) L(\xi_3), \quad E_{\xi_3} = 0, \quad H_{\xi_3} = -c_1 \sqrt{1-\gamma_3^2} L(\xi_1) L(\xi_2) L(\xi_3), \quad (3)$$

$$H_{\xi_1} = \frac{c_1}{(ik)^2 h_1 h_3 \sqrt{1-\gamma_3^2}} \frac{dL(\xi_1)}{d\xi_1} L(\xi_2) \frac{dL(\xi_3)}{d\xi_3}, \quad H_{\xi_2} = \frac{c_1}{(ik)^2 h_2 h_3 \sqrt{1-\gamma_3^2}} L(\xi_1) \frac{dL(\xi_2)}{d\xi_2} \frac{dL(\xi_3)}{d\xi_3}.$$

При $m_{P_1 P_2 P_3}^{(1)} = m_{P_1 P_2 P_3}^{(3)} = 0$, т.е. при $\vec{S}_{P_1 P_2 P_3} \parallel \vec{\nabla} \xi_2$ получаем следующие выражения для полей

$$E_{\xi_1} = -\frac{C_2}{ikh_3\sqrt{1-\gamma_2^2}} L(\xi_1)L(\xi_2) \frac{dL(\xi_3)}{d\xi_3}, E_{\xi_2} = 0, E_{\xi_3} = \frac{C_2}{ikh_1\sqrt{1-\gamma_2^2}} \frac{dL(\xi_1)}{d\xi_1} L(\xi_2)L(\xi_3), H_{\xi_2} = -C_2\sqrt{1-\gamma_2^2} L(\xi_1)L(\xi_2)L(\xi_3),$$

(4)

$$H_{\xi_1} = \frac{C_2}{(ik)^2 h_1 h_2 \sqrt{1-\gamma_2^2}} \frac{dL(\xi_1)}{d\xi_1} \frac{dL(\xi_2)}{d\xi_2} L(\xi_3), \quad H_{\xi_3} = \frac{C_2}{(ik)^2 h_2 h_3 \sqrt{1-\gamma_2^2}} L(\xi_1) \frac{dL(\xi_2)}{d\xi_2} \frac{dL(\xi_3)}{d\xi_3}.$$

И, наконец, при $m_{P_1 P_2 P_3}^{(2)} = m_{P_1 P_2 P_3}^{(3)} = 0$, т.е. при $\vec{S}_{P_1 P_2 P_3} \parallel \vec{\nabla} \xi_1$ имеем

$$E_{\xi_1} = 0, E_{\xi_2} = \frac{C_3}{ikh_3\sqrt{1-\gamma_1^2}} L(\xi_1)L(\xi_2) \frac{dL(\xi_3)}{d\xi_3}, E_{\xi_3} = -\frac{C_3}{ikh_2\sqrt{1-\gamma_1^2}} L(\xi_1) \frac{dL(\xi_2)}{d\xi_2} L(\xi_3), H_{\xi_1} = -C_3\sqrt{1-\gamma_1^2} L(\xi_1)L(\xi_2)L(\xi_3),$$

(5)

$$H_{\xi_2} = \frac{C_3}{(ik)^2 h_1 h_2 \sqrt{1-\gamma_1^2}} \frac{dL(\xi_1)}{d\xi_1} \frac{dL(\xi_2)}{d\xi_2} L(\xi_3), \quad H_{\xi_3} = \frac{C_3}{(ik)^2 h_2 h_3 \sqrt{1-\gamma_1^2}} \frac{dL(\xi_1)}{d\xi_1} L(\xi_2) \frac{dL(\xi_3)}{d\xi_3}.$$

В (3-5) $L(\xi_\ell)$ ($\ell = 1, 2, 3$) - функции Ламэ, через которые выражается точное решение скалярного уравнения Гельмгольца в виде $u = L(\xi_1)L(\xi_2)L(\xi_3)$ [4]. Они удовлетворяют уравнениям Ламэ

$$\frac{d^2 L(\xi_\ell)}{d\xi_\ell^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_1 - \xi_\ell} + \frac{1}{a_2 - \xi_\ell} + \frac{1}{a_3 - \xi_\ell} \right) \frac{dL(\xi_\ell)}{d\xi_\ell} + \kappa^2 \beta_\ell(\xi_\ell) L(\xi_\ell) = 0, \quad (6)$$

где $\beta_\ell(\xi_\ell) = P(\xi_\ell)/f(\xi_\ell)$, $P(\xi_\ell) = [(a_1 + a_2 + a_3)\rho - n(n+1)\xi_\ell] / \kappa^2 + \xi_\ell^2$, $f_\ell(\xi_\ell) = 4(a_1 - \xi_\ell)(a_2 - \xi_\ell)$

$(a_3 - \xi_\ell)$, $a_1 > a_2 > a_3$ - квадраты полуосей эллипсоида, ρ, n - кон-

СТАНТЫ,

$$\delta_1 = \left[\frac{P(\xi_1)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)} \right]^{1/2}, \quad \delta_2 = \left[\frac{P(\xi_2)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)} \right]^{1/2}, \quad \delta_3 = \left[\frac{P(\xi_3)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)} \right]^{1/2}, \quad h_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)}{f(\xi_1)} \right]^{1/2},$$

$$h_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)}{f(\xi_2)} \right]^{1/2}, \quad h_3 = \frac{1}{2} \left[\frac{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)}{f(\xi_3)} \right]^{1/2} \quad - \text{коэффициенты}$$

Ламэ эллипсоидальной системы координат.

Соответствующие выражения для электрических типов волн получаются из (3-5) заменами в них $\vec{E} \rightarrow \vec{H}$, $\vec{H} \rightarrow -\vec{E}$.

Для того, чтобы эти поля являлись бы собственными функциями зеркального эллипсоида, необходимо, чтобы они удовлетворяли граничным условиям $E_{\xi_1} = E_{\xi_2} = H_{\xi_3} = 0$ на поверхности эллипсоида $\xi_3 = 0$. С другой стороны, сообразуясь с условиями однозначности определения функций $L(\xi_e)$ на границах октантов [5], можно записать следующие граничные условия для них на концах интервалов изменения эллипсоидальных координат $a_2 < \xi_1 < a_1$, $a_3 < \xi_2 < a_2$, $0 < \xi_3 < a_3$. Для функций Ламэ $L(\xi_1)$, $L(\xi_2)$, $L(\xi_3)$ реализующих Н-типы волн [3-5], в зеркальном эллипсоиде эти условия сводятся к уравнениям для конфигурации, получающейся при $\vec{S}_{p_1 p_2 p_3} \parallel \vec{\nabla} \xi_3$ (3) $L(\xi_1 = a_1; a_2) = 0$

$$L(\xi_2 = a_2; a_3) = 0, \quad \frac{dL(\xi_3 = a_3)}{d\xi_3} = 0, \quad L(\xi_3 = 0) = 0 \quad \text{при}$$

$$\vec{S}_{P_1 P_2 P_3} \parallel \vec{\nabla} \xi_2 \quad (4): \quad L(\xi_1 = a_1; a_2) = 0,$$

$$\frac{dL(\xi_2 = a_2; a_3)}{d\xi_2} = 0, \quad L(\xi_3 = a_3) = 0, \quad \frac{dL(\xi_3 = 0)}{d\xi_3} = 0;$$

$$\text{при } \vec{S}_{P_1 P_2 P_3} \parallel \vec{\nabla} \xi_1 \quad (5): \quad \frac{dL(\xi_1 = a_1; a_2)}{d\xi_1} = 0,$$

$$L(\xi_2 = a_2; a_3) = 0, \quad L(\xi_3 = a_3) = 0, \quad \frac{dL(\xi_3 = 0)}{d\xi_3} = 0. \text{ Соответствующие граничные}$$

условия для E - типов волн получаются заменами $L(\xi_e) \rightarrow \frac{dL(\xi_e)}{d\xi_e}$

$$\text{и } \frac{dL(\xi_e)}{d\xi_e} \rightarrow L(\xi_e) .$$

Замечательной особенностью полученных решений является то, что они выражаются через произвольные функции Ламэ (и их первые производные) и могут быть конкретизированы на основании граничных условий. С другой стороны, эти граничные условия, будучи записаны для асимптотических решений, могут быть заменены каустическими квантовыми условиями [5], что сводится, в конечном счете, к подстановке в них вместо функций $L(\xi_1)$, $L(\xi_2)$, $L(\xi_3)$ их дебаевских (квазиклассических) асимптотик и к уточнению областей существования осциллирующих решений (лучей). Квазиклассическую асимптотику этих функций представим в общем виде [7]

$$L(\xi_e) = \frac{\cos \left[\frac{\kappa}{2} \int_{\xi_e}^{\xi_e} \sqrt{\beta(\xi_e)} d\xi_e \mp \frac{\pi}{4} \right]}{\sqrt[4]{\beta(\xi_e)} \sqrt{\gamma(\xi_e)}}, \quad \frac{dL(\xi_e)}{d\xi_e} = - \frac{\sqrt[4]{\beta(\xi_e)}}{\sqrt{\gamma(\xi_e)}} \sin \left[\frac{\kappa}{2} \int_{\xi_e}^{\xi_e} \sqrt{\beta(\xi_e)} d\xi_e \mp \frac{\pi}{4} \right],$$

(7)

$$\gamma(\xi_e) = [(a_1 - \xi_e)(a_2 - \xi_e)(a_3 - \xi_e)]^{1/2}.$$

Знак минус в (7) соответствует случаю, когда $\tilde{\xi}_e < \xi_e$, а знак плюс - случаю $\tilde{\xi}_e > \xi_e$ [6] ($\beta(\tilde{\xi}_e) = 0$, $\xi = \tilde{\xi}_e$ - каустические поверхности). Если $\beta(\xi_e) > 0$ (соответствующая каустика не реализуется), в асимптотике (7) фазовую добавку $\mp \pi/4$ следует опускать; при этом предел интегрирования следует заменить на начало соответствующего интервала изменения координаты ξ_e , а выбор четной (cos) или нечетной (sin) асимптотик диктуется граничным условием (L/ξ_e) = 0 или

$$\frac{dL(\xi_e)}{d\xi_e} = 0 \text{ на этом же конце интервала. Дело в том (см. [5]),}$$

что если функция $L(\xi_1)$, $L(\xi_2)$ или $L(\xi_3)$ является монотонной (в области каустической тени), то граничным условиям на обоих концах соответствующего интервала удовлетворить нельзя, и решение задачи (асимптотическое) не может быть получено. Для осциллирующих же асимптотик функций $L(\xi_1)$, $L(\xi_2)$ и $L(\xi_3)$ получается три квантовых условия, из которых определяются константы ρ , μ и собственные частоты резонатора $\kappa = \omega/c$.

Лучевая структура электромагнитного поля полого эллипсоидального резонатора вполне аналогична структуре скалярного

поля, рассмотренного в [5], а собственные колебания H и E - типов волн и для каждой выбранной конгруэнции лучей (выбор вектора \vec{S}_{P_1, P_2, P_3}) классифицируется по четырем типам колебаний [5,6]. Корни уравнения $\beta(\xi_e) = 0$ ϑ_1 и ϑ_2 ($\vartheta_1 < \vartheta_2$) для первого типа колебаний ($\beta(\xi_2) > 0$) лежат в интервалах $0 < \vartheta_1 < \alpha_3$, $\alpha_2 < \vartheta_2 < \alpha_1$, каустическими поверхностями служат поверхности, определяемые корнями уравнений

$\beta(\xi_3) = 0$, $\tilde{\xi}_3 = \vartheta_1$ и $\beta(\xi_1) = 0$, $\tilde{\xi}_1 = \vartheta_2$, т.е. эллипсоид ($\tilde{\xi}_3 = \vartheta_1$) и двухполостный гиперболоид ($\tilde{\xi}_1 = \vartheta_2$). Области распространения лучей (области осциллирующих решений) определяются из неравенств $0 < \xi_3 < \vartheta_1 < \alpha_3$, $\alpha_3 < \xi_2 < \alpha_2$,

$\vartheta_2 < \xi_1 < \alpha_1$. Ограничивая область изменения координат ξ_1 и ξ_3 областью существования осциллирующих решений и сообразуясь с граничными условиями, приведенными выше, представим дебаевские асимптотики функций $L(\xi_e)$ для первого типа колебаний в виде:

$$\vec{S}_{P_1, P_2, P_3} \parallel \vec{\nabla}_{\xi_3} : L(\xi_1) = \frac{\cos\left[\frac{\kappa}{2} \int_{\vartheta_2}^{\xi_1} \sqrt{\beta(\xi)} d\xi_1 - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt[4]{\beta(\xi_1)} \sqrt{\gamma(\xi_1)}}, \quad L(\xi_2) = \frac{\sin\left[\frac{\kappa}{2} \int_{\alpha_2}^{\xi_2} \sqrt{\beta(\xi)} d\xi_2\right]}{\sqrt[4]{\beta(\xi_2)} \sqrt{\gamma(\xi_2)}}, \quad L(\xi_3) = \frac{\cos\left[\frac{\kappa}{2} \int_{\vartheta_1}^{\xi_3} \sqrt{\beta(\xi)} d\xi_3 + \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt[4]{\beta(\xi_3)} \sqrt{\gamma(\xi_3)}}.$$

Заметим, что $L(\xi_e = \alpha_3) = 0$ и $\vartheta_1 > \alpha_3$.

$$\vec{S}_{P_1, P_2, P_3} \parallel \vec{\nabla}_{\xi_2} : L(\xi_1) = \frac{\cos\left[\frac{\kappa}{2} \int_{\vartheta_2}^{\xi_1} \sqrt{\beta(\xi)} d\xi_1 - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt[4]{\beta(\xi_1)} \sqrt{\gamma(\xi_1)}}, \quad L(\xi_2) = \frac{\cos\left[\frac{\kappa}{2} \int_{\alpha_2}^{\xi_2} \sqrt{\beta(\xi)} d\xi_2\right]}{\sqrt[4]{\beta(\xi_2)} \sqrt{\gamma(\xi_2)}}, \quad L(\xi_3) = \frac{\cos\left[\frac{\kappa}{2} \int_{\vartheta_1}^{\xi_3} \sqrt{\beta(\xi)} d\xi_3 + \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt[4]{\beta(\xi_3)} \sqrt{\gamma(\xi_3)}};$$

(8)

$$\vec{S}_{P_1 P_2 P_3} \parallel \vec{\nabla} \xi_3: L(\xi_1) = \frac{\cos\left[\frac{\kappa}{2} \int_{D_2}^{\xi_1} \sqrt{\beta(\xi)} d\xi_1 - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{\beta(\xi_1)} \sqrt{\gamma(\xi_1)}}, \quad L(\xi_2) = \frac{\sin\left[\frac{\kappa}{2} \int_{a_2}^{\xi_2} \sqrt{\beta(\xi)} d\xi_2\right]}{\sqrt{\beta(\xi_2)} \sqrt{\gamma(\xi_2)}}, \quad L(\xi_3) = \frac{\cos\left[\frac{\kappa}{2} \int_{D_1}^{\xi_3} \sqrt{\beta(\xi)} d\xi_3 + \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{\beta(\xi_3)} \sqrt{\gamma(\xi_3)}}.$$

Однако, для первого типа колебаний ($\beta(\xi_2) > 0$) выражение $\gamma_2 = \frac{\sqrt{\beta(\xi_2)}}{h_2}$ может равняться единице (когда $\beta(\xi_1) = \beta(\xi_2) = 0$), что следует из уравнения эйконала $\vec{\gamma}_{P_1 P_2 P_3} \cdot \vec{\gamma}_{P_1 P_2 P_3} = I$. Решение (4) в этом случае не реализует равномерную асимптотику. Таким образом, для получения равномерных асимптотических решений, когда $\beta(\xi_2) > 0$, вектор $\vec{S}_{P_1 P_2 P_3}$ нельзя выбрать параллельным оси $\vec{\nabla} \xi_2$. Сообразуясь далее с граничными условиями при $\xi_1 = a_1$, $\xi_2 = a_2$, $\xi_3 = a_3$, из (8) получаем следующие квантовые условия для первого типа колебаний H-типов волн:

$$\vec{S}_{P_1 P_2 P_3} \parallel \vec{\nabla} \xi_3: \kappa \int_{D_2}^{a_1} \sqrt{\beta(\xi_1)} d\xi_1 = \pi \left(\frac{1}{2} + 2N_1 + 1\right), \quad \vec{S}_{P_1 P_2 P_3} \parallel \vec{\nabla} \xi_1: \kappa \int_{D_2}^{a_1} \sqrt{\beta(\xi_1)} d\xi_1 = \pi \left(\frac{1}{2} + 2N_1\right),$$

$$\kappa \int_{a_3}^{a_2} \sqrt{\beta(\xi_2)} d\xi_2 = 2\pi N_2, \quad \kappa \int_{a_3}^{a_2} \sqrt{\beta(\xi_2)} d\xi_2 = 2\pi N_2, \quad (9)$$

$$\kappa \int_0^{D_1} \sqrt{\beta(\xi_3)} d\xi_3 = \pi \left(\frac{1}{2} + 2N_3 + 1\right); \quad \kappa \int_0^{D_1} \sqrt{\beta(\xi_3)} d\xi_3 = \pi \left(\frac{1}{2} + 2N_3\right).$$

Для E-типов волн, сообразуясь с соответствующими граничными условиями, получаем:

$$\vec{S}_{P_1 P_2 P_3} \parallel \vec{\nabla} \xi_2 : L(\xi_1) = \frac{\sin\left[\frac{\kappa}{2} \int_{a_2}^{\xi_1} \sqrt{\beta(\xi_1)} d\xi_1\right]}{\sqrt{\beta(\xi_1)} \sqrt{\gamma(\xi_1)}}, \quad L(\xi_2) = \frac{\cos\left[\frac{\kappa}{2} \int_{a_2}^{\xi_2} \sqrt{\beta(\xi_2)} d\xi_2 + \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{\beta(\xi_2)} \sqrt{\gamma(\xi_2)}}, \quad L(\xi_3) = \frac{\cos\left[\frac{\kappa}{2} \int_{a_1}^{\xi_3} \sqrt{\beta(\xi_3)} d\xi_3 + \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{\beta(\xi_3)} \sqrt{\gamma(\xi_3)}};$$

$$\vec{S}_{P_1 P_2 P_3} \parallel \vec{\nabla} \xi_1 : L(\xi_1) = \frac{\cos\left[\frac{\kappa}{2} \int_{a_2}^{\xi_1} \sqrt{\beta(\xi_1)} d\xi_1\right]}{\sqrt{\beta(\xi_1)} \sqrt{\gamma(\xi_1)}}, \quad L(\xi_2) = \frac{\cos\left[\frac{\kappa}{2} \int_{a_2}^{\xi_2} \sqrt{\beta(\xi_2)} d\xi_2 + \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{\beta(\xi_2)} \sqrt{\gamma(\xi_2)}}, \quad L(\xi_3) = \frac{\cos\left[\frac{\kappa}{2} \int_{a_1}^{\xi_3} \sqrt{\beta(\xi_3)} d\xi_3 + \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{\beta(\xi_3)} \sqrt{\gamma(\xi_3)}}$$

Для второго типа колебаний ($\beta(\xi_1) > 0$) неравномерными являются выражения для полей (5), так как при $\beta(\xi_2) = \beta(\xi_3) = 0$

$$\frac{\sqrt{\beta(\xi_1)}}{h_1} = 1. \text{ Следовательно, для получения равномерных}$$

асимптотических выражений для полей второго типа колебаний следует выбрать вектор $\vec{S}_{P_1 P_2 P_3}$ либо вдоль $\vec{\nabla} \xi_2$, либо вдоль $\vec{\nabla} \xi_3$. При этом для N - типов волн получаем следующие квантовые условия:

$$\vec{S}_{P_1 P_2 P_3} \parallel \vec{\nabla} \xi_3 : \kappa \int_{a_2}^{a_1} \sqrt{\beta(\xi_1)} d\xi_1 = 2\pi N_1, \quad \vec{S}_{P_1 P_2 P_3} \parallel \vec{\nabla} \xi_2 : \kappa \int_{a_2}^{a_1} \sqrt{\beta(\xi_1)} d\xi_1 = 2\pi N_1, \quad (\text{II})$$

$$\kappa \int_{a_3}^{a_2} \sqrt{\beta(\xi_2)} d\xi_2 = \pi \left(\frac{1}{2} + 2N_2 + 1\right),$$

$$\kappa \int_{a_3}^{a_2} \sqrt{\beta(\xi_2)} d\xi_2 = \pi \left(\frac{1}{2} + 2N_2\right)$$

$$\kappa \int_0^{a_1} \sqrt{\beta(\xi_3)} d\xi_3 = \pi \left(\frac{1}{2} + 2N_3 + 1\right),$$

$$\kappa \int_0^{a_1} \sqrt{\beta(\xi_3)} d\xi_3 = \pi \left(\frac{1}{2} + 2N_3\right).$$

Так как квантовые условия для H и E - типов волн при наличии каустик различаются четностью квантовых чисел (N_2 и N_3), то из (II) очевидно, что квантовые условия для E - типов волн при $\vec{S}_{P_1 P_2 P_3} \parallel \vec{\nabla} \xi_3$ будут, как и выше, совпадать с квантовыми условиями для H - типов волн при $\vec{S}_{P_1 P_2 P_3} \parallel \vec{\nabla} \xi_2$ и наоборот. Таким образом, второй тип колебаний также двукратно вырожден.

Третий тип колебаний определяется неравенствами $\beta(\xi_3) > 0$ и $\alpha_3 < \nu_1 < \alpha_2 < \nu_2 < \alpha_1$. Каустиками являются поверхности $\tilde{\xi}_1 = \nu_2$ ($\beta(\xi_1) = 0$) - двухполостный гиперboloид и $\tilde{\xi}_2 = \nu_1$ ($\beta(\xi_2) = 0$) - однополостный гиперboloид. Область распространения лучей определяется неравенствами $0 < \xi_3 < \alpha_3$, $\nu_1 < \xi_2 < \alpha_2$, $\nu_2 < \xi_1 < \alpha_1$, и дебаевские асимптотики функций $L(\xi_e)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \vec{S}_{P_1 P_2 P_3} \parallel \vec{\nabla} \xi_3 : L(\xi_1) &= \frac{\cos\left[\frac{\kappa}{2} \int_{\nu_2}^{\xi_1} \sqrt{\beta(\xi)} d\xi - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt[4]{\beta(\xi_1)} \sqrt{\gamma(\xi_1)}}, & L(\xi_2) &= \frac{\cos\left[\frac{\kappa}{2} \int_{\nu_1}^{\xi_2} \sqrt{\beta(\xi)} d\xi - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt[4]{\beta(\xi_2)} \sqrt{\gamma(\xi_2)}}, & L(\xi_3) &= \frac{\sin\left[\frac{\kappa}{2} \int_0^{\xi_3} \sqrt{\beta(\xi)} d\xi\right]}{\sqrt[4]{\beta(\xi_3)} \sqrt{\gamma(\xi_3)}}; \\ \vec{S}_{P_1 P_2 P_3} \parallel \vec{\nabla} \xi_2 : L(\xi_1) &= \frac{\cos\left[\frac{\kappa}{2} \int_{\nu_2}^{\xi_1} \sqrt{\beta(\xi)} d\xi - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt[4]{\beta(\xi_1)} \sqrt{\gamma(\xi_1)}}, & L(\xi_2) &= \frac{\cos\left[\frac{\kappa}{2} \int_{\nu_1}^{\xi_2} \sqrt{\beta(\xi)} d\xi - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt[4]{\beta(\xi_2)} \sqrt{\gamma(\xi_2)}}, & L(\xi_3) &= \frac{\cos\left[\frac{\kappa}{2} \int_0^{\xi_3} \sqrt{\beta(\xi)} d\xi\right]}{\sqrt[4]{\beta(\xi_3)} \sqrt{\gamma(\xi_3)}}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\vec{S}_{P_1 P_2 P_3} \parallel \vec{\nabla} \xi_1 : L(\xi_1) = \frac{\cos\left[\frac{\kappa}{2} \int_{\nu_2}^{\xi_1} \sqrt{\beta(\xi)} d\xi - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt[4]{\beta(\xi_1)} \sqrt{\gamma(\xi_1)}}, \quad L(\xi_2) = \frac{\cos\left[\frac{\kappa}{2} \int_{\nu_1}^{\xi_2} \sqrt{\beta(\xi)} d\xi - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt[4]{\beta(\xi_2)} \sqrt{\gamma(\xi_2)}}, \quad L(\xi_3) = \frac{\cos\left[\frac{\kappa}{2} \int_0^{\xi_3} \sqrt{\beta(\xi)} d\xi\right]}{\sqrt[4]{\beta(\xi_3)} \sqrt{\gamma(\xi_3)}}.$$

Для этого типа колебаний неравномерными становятся выражения для полей (5), получающихся при $\vec{S}_{P_1 P_2 P_3} \parallel \vec{\nabla} \xi_3$. Направив

лектор $\vec{S}_{p_1 p_2 p_3}$ вдоль $\vec{\nabla}_{\xi_2}$ или $\vec{\nabla}_{\xi_1}$, получим поля (4) или (5) и соответствующие квантовые условия для N - типов волн:

$$\begin{aligned} \vec{S}_{p_1 p_2 p_3} \parallel \vec{\nabla}_{\xi_2} : \kappa \int_{\nu_2}^{\alpha_1} \sqrt{\beta(\xi_1)} d\xi_1 &= \pi \left(\frac{1}{2} + 2N_1 + 1 \right), & \vec{S}_{p_1 p_2 p_3} \parallel \vec{\nabla}_{\xi_1} : \kappa \int_{\nu_2}^{\alpha_1} \sqrt{\beta(\xi_1)} d\xi_1 &= \pi \left(\frac{1}{2} + 2N_1 \right), \\ \kappa \int_{\nu_1}^{\alpha_2} \sqrt{\beta(\xi_2)} d\xi_2 &= \pi \left(\frac{1}{2} + 2N_2 \right), & \kappa \int_{\nu_1}^{\alpha_2} \sqrt{\beta(\xi_2)} d\xi_2 &= \pi \left(\frac{1}{2} + 2N_2 + 1 \right), \\ \kappa \int_0^{\alpha_3} \sqrt{\beta(\xi_3)} d\xi_3 &= 2\pi N_3; & \kappa \int_0^{\alpha_3} \sqrt{\beta(\xi_3)} d\xi_3 &= 2\pi N_3. \end{aligned} \quad (13)$$

Третий тип колебаний также двукратно вырожден: тем же квантовым числом p , n и $\kappa = \omega/c$, определяемым из (13) для N - типов волн и аналогичных формул для E - типов волн, соответствуют две конфигурации поля, описываемые формулами (4-5), и формулами, получаемыми из них заменами $\vec{E} \rightarrow \vec{H}$ и $\vec{H} \rightarrow -\vec{E}$.

Последний, четвертый тип колебаний осуществляется при выполнении неравенств $\alpha_3 < \nu_1 < \nu_2 < \alpha_2$, $\beta(\xi_1) > 0$ и $\beta(\xi_3) > 0$. Каустические поверхности, между которыми распространяются лучи, соответствуют двум корням уравнения $\beta(\xi_2) = 0$ - $\tilde{\xi}_2 = \nu_1$ и $\tilde{\xi}_2 = \nu_2$ и представляют собой два однополостных гиперболоида. Соответствующие дебаевские асимптотики функций $L(\xi_1)$ и $L(\xi_2)$, для которых каустические поверхности не реализуются, записываются совершенно аналогично предыдущим типам колебаний в виде:

$$\begin{aligned}
\vec{S}_{P_1 P_2 P_3} \parallel \vec{\nabla} \xi_3: L(\xi_1) &= \frac{\sin\left[\frac{\kappa}{2} \int_{a_2}^{\xi_1} \sqrt{\beta(\xi_1)} d\xi_1\right]}{\sqrt[4]{\beta(\xi_1)} \sqrt{\gamma(\xi_1)}}, & L(\xi_3) &= \frac{\sin\left[\frac{\kappa}{2} \int_0^{\xi_3} \sqrt{\beta(\xi_3)} d\xi_3\right]}{\sqrt[4]{\beta(\xi_3)} \sqrt{\gamma(\xi_3)}}; \\
\vec{S}_{P_1 P_2 P_3} \parallel \vec{\nabla} \xi_2: L(\xi_1) &= \frac{\sin\left[\frac{\kappa}{2} \int_{a_2}^{\xi_1} \sqrt{\beta(\xi_1)} d\xi_1\right]}{\sqrt[4]{\beta(\xi_1)} \sqrt{\gamma(\xi_1)}}, & L(\xi_3) &= \frac{\cos\left[\frac{\kappa}{2} \int_0^{\xi_3} \sqrt{\beta(\xi_3)} d\xi_3\right]}{\sqrt[4]{\beta(\xi_3)} \sqrt{\gamma(\xi_3)}}; \quad (I4) \\
\vec{S}_{P_1 P_2 P_3} \parallel \vec{\nabla} \xi_1: L(\xi_1) &= \frac{\cos\left[\frac{\kappa}{2} \int_{a_2}^{\xi_1} \sqrt{\beta(\xi_1)} d\xi_1\right]}{\sqrt[4]{\beta(\xi_1)} \sqrt{\gamma(\xi_1)}}, & L(\xi_3) &= \frac{\sin\left[\frac{\kappa}{2} \int_0^{\xi_3} \sqrt{\beta(\xi_3)} d\xi_3\right]}{\sqrt[4]{\beta(\xi_3)} \sqrt{\gamma(\xi_3)}}.
\end{aligned}$$

Асимптотику же функций $L(\xi_2)$ можно будет записать в виде

$$\begin{aligned}
L(\xi_2) &= \frac{\cos\left[\frac{\kappa}{2} \int_{\vartheta_1}^{\xi_2} \sqrt{\beta(\xi_2)} d\xi_2 - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt[4]{\beta(\xi_2)} \sqrt{\gamma(\xi_2)}} && \text{для значений } \xi_2 > \vartheta_1, \\
L(\xi_2) &= \frac{\cos\left[\frac{\kappa}{2} \int_{\vartheta_2}^{\xi_2} \sqrt{\beta(\xi_2)} d\xi_2 - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt[4]{\beta(\xi_2)} \sqrt{\gamma(\xi_2)}} && \text{для значений } \xi_2 < \vartheta_2.
\end{aligned} \quad (I5)$$

При этом из условия совпадения этих асимптотик в промежуточных точках $\vartheta_1 < \xi_2 < \vartheta_2$ получаем второе квантовое условие для четвертого типа колебаний (для всех трех конфигураций поля):

$$\kappa \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{\beta(\xi_2)} d\xi_2 = 2\pi \left(\frac{1}{2} + 2N_2\right). \quad (I6)$$

Остальные два квантовых условия для функций $L(\xi_1)$ и $L(\xi_2)$ также получаются одинаковыми для всех трех конфигураций и будут иметь вид:

$$\kappa \int_{a_2}^{a_1} \sqrt{\beta(\xi_1)} d\xi_1 = 2\pi N_1, \quad \kappa \int_0^{a_3} \sqrt{\beta(\xi_2)} d\xi_2 = 2\pi N_3. \quad (I6a)$$

2. В силу общности утверждения работы [4], рассмотрим другую возможную конструкцию решений. Она реализуется выбором вектора $\vec{S}_{P_1 P_2 P_3}$ в виде

$$\vec{S}_{P_1 P_2 P_3} = (-1)^{P_1} m_1 \vec{\nabla} \xi_1 + (-1)^{P_2} m_2 \vec{\nabla} \xi_2 + (-1)^{P_3} m_3 \vec{\nabla} \xi_3. \quad (I7)$$

При $m_1 = m_2 = 0$, т.е. когда $\vec{S}_{P_1 P_2 P_3} \parallel (-1)^{P_3} \vec{\nabla} \xi_3$ получаем следующие выражения для компонент полей H -типов волн:

$$E_{\xi_1} = \frac{c}{(i\kappa)^2 h_2 \sqrt{\beta(\xi_3)} \sqrt{1-\gamma_3^2}} L(\xi_1) \frac{dL(\xi_2)}{d\xi_2} \frac{dL(\xi_3)}{d\xi_3}, \quad E_{\xi_2} = -\frac{c}{(i\kappa)^2 h_1 \sqrt{1-\gamma_3^2} \sqrt{\beta(\xi_3)}} \frac{dL(\xi_1)}{d\xi_1} L(\xi_2) \frac{dL(\xi_3)}{d\xi_3}, \quad E_{\xi_3} = 0, \quad (I8)$$

$$H_{\xi_1} = \frac{c}{i\kappa h_1 h_3} \sqrt{\frac{\beta(\xi_3)}{1-\gamma_3^2}} \frac{dL(\xi_1)}{d\xi_1} L(\xi_2) L(\xi_3), \quad H_{\xi_2} = \frac{c}{i\kappa h_2 h_3} \sqrt{\frac{\beta(\xi_3)}{1-\gamma_3^2}} L(\xi_1) \frac{dL(\xi_2)}{d\xi_2} L(\xi_3), \quad H_{\xi_3} = -\frac{c}{i\kappa} \sqrt{\frac{1-\gamma_3^2}{\beta(\xi_3)}} L(\xi_1) L(\xi_2) \frac{dL(\xi_3)}{d\xi_3}.$$

Выражения (I8) не являются равномерными для первого и второго типов колебаний. Таким образом, при выборе вектора

$\vec{S}_{P_1 P_2 P_3} \parallel (-1)^{P_3} \vec{\nabla} \xi_3$ равномерными оказываются колебания третьего типа ($\rho(\xi_3) > 0$). Совершенно аналогично, выбирая $\vec{S}_{P_1 P_2 P_3}$ параллельным направлениям $(-1)^{P_2} \vec{\nabla} \xi_2$ или $(-1)^{P_1} \vec{\nabla} \xi_1$, получаем равномерные выражения, соответственно, для первого или второго типов колебаний. Однако, для дебаевской асимптотики функций $L(\xi_3)$ справедливы соотношения $\frac{1}{ik\sqrt{\rho(\xi_3)}} \frac{dL(\xi_3)}{d\xi_3} \rightarrow L(\xi_3)$ или $ik\sqrt{\rho(\xi_3)} L(\xi_3) \rightarrow \frac{dL(\xi_3)}{d\xi_3}$, что соответствует замене

фигурирующей в (18) "нечетной" дебаевской асимптотики (\sin) на "четную" (\cos). После такой замены выражения (18) переходят в равномерные выражения (3). При конфигурациях

$\vec{S}_{P_1 P_2 P_3} \parallel (-1)^{P_2} \vec{\nabla} \xi_2$ и $\vec{S}_{P_1 P_2 P_3} \parallel (-1)^{P_1} \vec{\nabla} \xi_1$ заменами,

соответственно $\frac{1}{ik\sqrt{\rho(\xi_2)}} \frac{dL(\xi_2)}{d\xi_2} \rightleftharpoons L(\xi_2)$ и $\frac{1}{ik\sqrt{\rho(\xi_1)}} \frac{dL(\xi_1)}{d\xi_1} \rightleftharpoons L(\xi_1)$

полученные неравномерные выражения (при $\rho(\xi_2)=0$ и $\rho(\xi_1)=0$) переходят в выражения (4) и (5). Таким образом, снимается вырождение, связанное с выбором вектора $\vec{S}_{P_1 P_2 P_3}$. В конце этого пункта приведем для справки выражения для полей других конфигураций:

$$\vec{S}_{P_1 P_2 P_3} \parallel (-1)^{P_2} \vec{\nabla} \xi_2 : E_{\xi_1} = -\frac{c}{(ik)^2 h_3 \sqrt{1-\gamma_2^2} \sqrt{\rho(\xi_2)}} L(\xi_1) \frac{dL(\xi_2)}{d\xi_2} \frac{dL(\xi_3)}{d\xi_3}, E_{\xi_2} = 0, E_{\xi_3} = \frac{c}{(ik)^2 h_1 \sqrt{1-\gamma_2^2} \sqrt{\rho(\xi_2)}} \frac{dL(\xi_1)}{d\xi_1} \frac{dL(\xi_2)}{d\xi_2} L(\xi_3); \quad (19)$$

$$H_{\xi_1} = \frac{c}{ik h_1 h_2 \sqrt{1-\gamma_2^2}} \frac{dL(\xi_1)}{d\xi_1} L(\xi_2) L(\xi_3), H_{\xi_2} = -\frac{c}{ik} \frac{\sqrt{1-\gamma_2^2}}{\sqrt{\rho(\xi_2)}} L(\xi_1) \frac{dL(\xi_2)}{d\xi_2} L(\xi_3), H_{\xi_3} = \frac{c}{ik h_2 h_3 \sqrt{1-\gamma_2^2}} L(\xi_1) L(\xi_2) \frac{dL(\xi_3)}{d\xi_3};$$

$$\vec{S}_{P_1 P_2 P_3} \parallel (-1)^p \vec{\nabla}_{\xi_1}: E_{\xi_1} = 0, E_{\xi_2} = \frac{c}{(ik)^2 h_3 \sqrt{1-\gamma_1^2} \sqrt{\beta(\xi_2)}} \frac{dL(\xi_1)}{d\xi_1} L(\xi_2) \frac{dL(\xi_3)}{d\xi_3}, E_{\xi_3} = -\frac{c}{(ik)^2 h_2 \sqrt{1-\gamma_1^2} \sqrt{\beta(\xi_1)}} \frac{dL(\xi_1)}{d\xi_1} \frac{dL(\xi_2)}{d\xi_2} L(\xi_3), \quad (20)$$

$$H_{\xi_1} = \frac{c}{ik} \sqrt{\frac{1-\gamma_1^2}{\beta(\xi_1)}} \frac{dL(\xi_1)}{d\xi_1} L(\xi_2) L(\xi_3), H_{\xi_2} = \frac{c}{ikh_1 h_2 \sqrt{1-\gamma_1^2}} \sqrt{\beta(\xi_1)} L(\xi_1) \frac{dL(\xi_2)}{d\xi_2} L(\xi_3), H_{\xi_3} = \frac{c}{ikh_1 h_3 \sqrt{1-\gamma_1^2}} \sqrt{\beta(\xi_1)} L(\xi_1) L(\xi_2) \frac{dL(\xi_3)}{d\xi_3}.$$

3. Выражения (3-5) и (18-20) были получены в предположении, что константа c не зависит от индексов P_1, P_2, P_3 . Это требование обеспечивало непрерывность перехода луча через каустическую ($\beta(\xi_1) = 0$, $\beta(\xi_2) = 0$ и $-\beta(\xi_3) = 0$). Между тем, для первого типа колебаний эта константа могла бы зависеть от P_2 ($\beta(\xi_2) > 0$), т.е. $c = c_{P_2}$, для второго типа колебаний ($\beta(\xi_1) > 0$) - от P_1 , т.е. $c = c_{P_1}$, для третьего типа колебаний ($\beta(\xi_3) > 0$) - от P_3 , т.е. $c = c_{P_3}$. Для четвертого типа колебаний ($\beta(\xi_1) > 0$, $\beta(\xi_3) > 0$) константа c , может зависеть от P_1 и P_3 , т.е. $c = c_{P_1 P_3}$. Выражения для электрических компонент H -типов волн, получающихся методом, развитым в [4], с учетом таких значений константы c сведены в таблицу. Можно показать, что дополнительные члены, возникающие в выражениях для полей (с коэффициентами $c_0 - c_1$), совпадают с соответствующими выражениями, получающимися при выборе вектора $\vec{S}_{P_1 P_2 P_3}$ в виде (17), а первые члены - с выражениями, когда вектор $\vec{S}_{P_1 P_2 P_3}$ был определен согласно (2). Для первого приведенного в таблице типа колебаний ($\beta(\xi_2) > 0$) справедливы асимптотические замены

$\frac{1}{ik\sqrt{\rho(\xi_2)}} \frac{dL(\xi_2)}{d\xi_2} \rightleftharpoons L(\xi_2)$, для второго ($\rho(\xi_1) > 0$) - заме-
ны $\frac{1}{ik\sqrt{\rho(\xi_1)}} \frac{dL(\xi_1)}{d\xi_1} \rightleftharpoons L(\xi_1)$, для третьего
($\rho(\xi_2) > 0$) - $\frac{1}{ik\sqrt{\rho(\xi_3)}} \frac{dL(\xi_3)}{d\xi_3} \rightleftharpoons L(\xi_3)$ и, наконец , для
четвертого типа колебаний парные замены

$$\frac{1}{ik\sqrt{\rho(\xi_1)}} \frac{dL(\xi_1)}{d\xi_1} \rightleftharpoons L(\xi_1), \quad \frac{1}{ik\sqrt{\rho(\xi_2)}} \frac{dL(\xi_2)}{d\xi_2} \rightleftharpoons L(\xi_2).$$

После таких замен выражения для полей переходят в выражения (3-5) для соответствующих типов колебаний при $c_1 = c_0$ или в выражения (18-20) при $c_1 = -c_0$. Так можно обосновать выбор константы c , не зависящей от индексов $P_1 P_2 P_3$ в нашем приближении.

4. Случаи сфероидальных резонаторов [2] могут быть рассмотрены совершенно аналогично. Если вектор $\vec{S}_{P_1 P_2 P_3}$ выбрать в виде (2), где $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = \eta$, $\xi_3 = \varphi$ - координаты в вытянутой сфероидальной системе координат, получаем следующие выражения для полей Н - типов волн:

при $\vec{S}_{P_1 P_2 P_3} \parallel \vec{\nabla} \varphi$:

$$E_{\xi} = \frac{c}{ikh_{\xi} \sqrt{1-\gamma_{\varphi}^2}} R(\xi) \frac{dS(\eta)}{d\eta} T(\varphi), \quad E_{\eta} = -\frac{c}{ikh_{\xi} \sqrt{1-\gamma_{\varphi}^2}} \frac{dR(\xi)}{d\xi} S(\eta) T(\varphi), \quad E_{\varphi} = 0, \quad (2I)$$

$$H_{\xi} = \frac{c}{(ik)^2 h_{\xi} h_{\varphi} \sqrt{1-\gamma_{\varphi}^2}} \frac{dR(\xi)}{d\xi} S(\eta) \frac{dT(\varphi)}{d\varphi}, \quad H_{\eta} = -\frac{c}{(ik)^2 h_{\eta} h_{\varphi} \sqrt{1-\gamma_{\varphi}^2}} R(\xi) \frac{dS(\eta)}{d\eta} \frac{dT(\varphi)}{d\varphi}, \quad H_{\varphi} = -c \sqrt{1-\gamma_{\xi}^2} R(\xi) S(\eta) T(\varphi);$$

при $\vec{S}_{P_1 P_2 P_3} \parallel \vec{\nabla} \eta$:

$$E_{\xi} = \frac{c}{ikh_{\varphi} \sqrt{1-\gamma_{\eta}^2}} R(\xi) S(\eta) \frac{dT(\varphi)}{d\varphi}, \quad E_{\eta} = 0, \quad E_{\varphi} = \frac{c}{ikh_{\xi} \sqrt{1-\gamma_{\eta}^2}} \frac{dR(\xi)}{d\xi} S(\eta) T(\varphi), \quad (22)$$

$$H_{\xi} = \frac{c}{(ik)^2 h_{\xi} h_{\eta} \sqrt{1-\gamma_{\eta}^2}} \frac{dR(\xi)}{d\xi} \frac{dS(\eta)}{d\eta} T(\varphi), \quad H_{\eta} = -c \sqrt{1-\gamma_{\xi}^2} R(\xi) S(\eta) T(\varphi), \quad H_{\varphi} = \frac{c}{(ik)^2 h_{\eta} h_{\varphi} \sqrt{1-\gamma_{\eta}^2}} R(\xi) \frac{dS(\eta)}{d\eta} \frac{dT(\varphi)}{d\varphi};$$

при $\vec{S}_{P_1 P_2 P_3} \parallel \vec{\nabla} \xi$:

$$E_{\xi} = 0, \quad E_{\eta} = \frac{c}{ikh_{\varphi} \sqrt{1-\gamma_{\xi}^2}} R(\xi) S(\eta) \frac{dT(\varphi)}{d\varphi}, \quad E_{\varphi} = \frac{c}{ikh_{\eta} \sqrt{1-\gamma_{\xi}^2}} R(\xi) \frac{dS(\eta)}{d\eta} T(\varphi), \quad (23)$$

$$H_{\xi} = -c \sqrt{1-\gamma_{\xi}^2} R(\xi) S(\eta) T(\varphi), \quad H_{\eta} = \frac{c}{(ik)^2 h_{\xi} h_{\varphi} \sqrt{1-\gamma_{\xi}^2}} \frac{dR(\xi)}{d\xi} \frac{dS(\eta)}{d\eta} T(\varphi), \quad H_{\varphi} = \frac{c}{(ik)^2 h_{\xi} h_{\varphi} \sqrt{1-\gamma_{\xi}^2}} \frac{dR(\xi)}{d\xi} S(\eta) \frac{dT(\varphi)}{d\varphi}$$

Здесь $h_{\xi} = f\left(\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1}\right)^{1/2}$, $h_{\eta} = f\left(\frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}\right)^{1/2}$, $h_{\varphi} = f[(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]^{1/2}$ — ко-

эффициенты Ламе, $1 < \xi < \infty$, $-1 < \eta < 1$, $0 < \varphi < 2\pi$, $\gamma_{\xi} = \frac{\sqrt{\rho(\xi)}}{h_{\xi}}$,

$$\gamma_\eta = \frac{\sqrt{\beta(\eta)}}{h_\eta}, \quad \gamma_\varphi = \frac{\sqrt{\beta(\varphi)}}{h_\varphi}, \quad \beta_\varphi = m^2/\kappa^2, \quad \beta(\xi) = -\frac{\lambda}{\kappa^2(\xi^2-1)} + f^2 - \frac{m}{\kappa^2(\xi^2-1)^2}$$

$$\beta(\eta) = \frac{\lambda}{(1-\eta^2)\kappa^2} + f^2 - \frac{m^2}{(1-\eta^2)^2}, \quad R(\xi), S(\eta) \quad - \text{вытянутые радиальные}$$

и угловые сферические функции, $T(\varphi) = e^{im\varphi}$. Выражения для соответствующих E-типов волн получаются из (21-23) заменами $\vec{E} \rightarrow \vec{H}$ и $\vec{H} \rightarrow -\vec{E}$.

Систему функций, описывающих электромагнитное поле, можно построить также путем использования угловых и радиальных сферических функций Q_1 и Q_2 , нормированных следующим образом:

$$R(\xi) = Q_1(\xi)(\xi^2-1)^\nu, \quad S(\eta) = Q_2(\eta)(1-\eta^2)^\nu, \quad \nu = -\frac{1}{2}\sqrt{2m-1}. \quad (24)$$

Они удовлетворяют уравнениям:

$$(\xi^2-1) \frac{d^2 Q_1(\xi)}{d\xi^2} + 2(2\nu+1)\xi \frac{dQ_1(\xi)}{d\xi} + \kappa^2 P_1(\xi)Q_1(\xi) = 0,$$

$$(1-\eta^2) \frac{d^2 Q_2(\eta)}{d\eta^2} - 2(2\nu+1)\eta \frac{dQ_2(\eta)}{d\eta} + \kappa^2 P_2(\eta)Q_2(\eta) = 0,$$

причем

$$P_1(\xi) = -\lambda + 2m - 1 + \sqrt{2m-1} + f^2(\xi^2-1) - (m-1)^2/(\xi^2-1),$$

$$P_2(\eta) = \lambda - 2m + 1 - \sqrt{2m-1} + f^2(1-\eta^2) - (m-1)^2/(1-\eta^2).$$

Тогда для Н - типов волн будем иметь следующие три группы решений, соответствующие (21-23):

$$\vec{S}_{\eta_2 P_3} \parallel \vec{\nabla} \varphi: E_{\xi} = \frac{F(\xi, \eta, \nu)}{ik h_{\eta} h_{\varphi} \sqrt{1-\gamma_{\varphi}^2}} Q_1(\xi) \frac{dQ_2(\eta)}{d\eta} T(\varphi), \quad E_{\eta} = \frac{F(\xi, \eta, \nu)}{ik h_{\xi} h_{\varphi} \sqrt{1-\gamma_{\varphi}^2}} \frac{dQ_1(\xi)}{d\xi} Q_2(\eta) T(\varphi), \quad E_{\varphi} = 0,$$

$$H_{\xi} = \frac{F(\xi, \eta, \nu)}{(ik)^2 h_{\xi} h_{\varphi}^2 \sqrt{1-\gamma_{\varphi}^2}} \frac{dQ_1(\xi)}{d\xi} Q_2(\eta) \frac{dT(\varphi)}{d\varphi}, \quad H_{\eta} = \frac{F(\xi, \eta, \nu)}{(ik)^2 h_{\eta} h_{\varphi}^2 \sqrt{1-\gamma_{\varphi}^2}} Q_1(\xi) \frac{dQ_2(\eta)}{d\eta} \frac{dT(\varphi)}{d\varphi}, \quad (25)$$

$$H_{\varphi} = -\sqrt{1-\gamma_{\varphi}^2} \frac{F(\xi, \eta, \nu)}{h_{\varphi}} Q_1(\xi) Q_2(\eta) T(\varphi);$$

$$\vec{S}_{\eta_2 P_3} \parallel \vec{\nabla} \eta: E_{\xi} = -\frac{F(\xi, \eta, \nu)}{ik h_{\varphi}^2 \sqrt{1-\gamma_{\eta}^2}} Q_1(\xi) Q_2(\eta) \frac{dT(\varphi)}{d\varphi}, \quad E_{\eta} = 0, \quad E_{\varphi} = \frac{F(\xi, \eta, \nu)}{ik h_{\xi} h_{\varphi} \sqrt{1-\gamma_{\eta}^2}} \frac{dQ_1(\xi)}{d\xi} Q_2(\eta) T(\varphi),$$

(26)

$$H_{\xi} = \frac{F(\xi, \eta, \nu)}{(ik)^2 h_{\xi} h_{\eta} h_{\varphi} \sqrt{1-\gamma_{\eta}^2}} \frac{dQ_1(\xi)}{d\xi} \frac{dQ_2(\eta)}{d\eta} T(\varphi), \quad H_{\eta} = -\sqrt{1-\gamma_{\eta}^2} \frac{F(\xi, \eta, \nu)}{h_{\varphi}} Q_1(\xi) Q_2(\eta) T(\varphi),$$

$$H_{\varphi} = \frac{F(\xi, \eta, \nu)}{(ik)^2 h_{\eta} h_{\varphi}^2 \sqrt{1-\gamma_{\eta}^2}} Q_1(\xi) \frac{dQ_2(\eta)}{d\eta} \frac{dT(\varphi)}{d\varphi};$$

$$\vec{S}_{\eta, \xi, \varphi} \parallel \vec{\nabla} \xi: E_{\xi} = 0, E_{\eta} = \frac{F(\xi, \eta, \nu)}{ik h_{\varphi}^2 \sqrt{1-\gamma_{\xi}^2}} Q_1(\xi) Q_2(\eta) \frac{dT(\varphi)}{d\varphi}, E_{\varphi} = -\frac{F(\xi, \eta, \nu)}{ikh_{\eta} h_{\varphi} \sqrt{1-\gamma_{\xi}^2}} Q_1(\xi) \frac{dQ_2(\eta)}{d\eta} T(\varphi),$$

$$H_{\xi} = -\frac{\sqrt{1-\gamma_{\xi}^2}}{h_{\varphi}} F(\xi, \eta, \nu) Q_1(\xi) Q_2(\eta) T(\varphi), H_{\eta} = \frac{F(\xi, \eta, \nu)}{(ik)^2 h_{\xi} h_{\eta} h_{\varphi} \sqrt{1-\gamma_{\xi}^2}} \frac{dQ_1(\xi)}{d\xi} \frac{dQ_2(\eta)}{d\eta} T(\varphi), \quad (27)$$

$$H_{\varphi} = \frac{F(\xi, \eta, \nu)}{(ik)^2 h_{\xi} h_{\varphi}^2 \sqrt{1-\gamma_{\xi}^2}} \frac{dQ_1(\xi)}{d\xi} Q_2(\eta) \frac{dT(\varphi)}{d\varphi}.$$

$$\text{В (25-27) } F(\xi, \eta, \nu) = c_1 [(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]^{1/2 + \nu} = ch_{\varphi}^{1+2\nu},$$

$$\gamma_{\varphi} = \frac{\sqrt{\beta(\varphi)}}{kh_{\varphi}} = \frac{m-1}{kh_{\varphi}}, \quad T(\varphi) = e^{i(m-1)\varphi}. \quad \text{Выражения для}$$

полей E - типов волн получаются из (25-27) заменами $\vec{E} \rightarrow \vec{H}$ и $\vec{H} \rightarrow -\vec{E}$.

Асимптотические решения (25-27) не зависят от φ при $m = 1$. При этом решения (25), когда $\gamma_{\varphi} = 0$ ($m = 1$), переходят в возможные при $m = 1$ точные решения задачи [8,9] для H - типов волн:

$$E_{\xi} = \frac{1}{ikh_{\eta} h_{\varphi}} Q_1(\xi) \frac{dQ_2(\eta)}{d\eta}, \quad E_{\eta} = -\frac{1}{ikh_{\xi} h_{\varphi}} \frac{dQ_1(\xi)}{d\xi} Q_2(\eta),$$

$$H_{\varphi} = -\frac{1}{h_{\varphi}} Q_1(\xi) Q_2(\eta), \quad E_{\varphi} = H_{\xi} = H_{\eta} = 0.$$

В этом случае $Q_1(\xi) = R(\xi)(\xi^2 - 1)^{1/2}$, $Q_2(\eta) = S(\eta)(1 - \eta^2)^{1/2}$ и

$$E_\xi = \frac{c(\xi^2 - 1)^{1/2}}{ik h_\eta h_\varphi} R(\xi) \frac{d}{d\eta} [(1 - \eta^2)^{1/2} S(\eta)], \quad E_\eta = - \frac{c(1 - \eta^2)^{1/2}}{ik h_\xi h_\varphi} S(\eta) \frac{d}{d\xi} [(\xi^2 - 1)^{1/2} R(\xi)], \quad (28)$$

$$H_\varphi = -cR(\xi)S(\eta).$$

Очевидно, что угловые сферические функции в (28) имеют индекс $m = 1$. С другой стороны, как следует из определения квазиклассической асимптотики, для функций $R(\xi)$ и $S(\eta)$ (см. [8]) при дифференцировании этих функций не следует дифференцировать множители, содержащиеся при \cos или \sin , так как такое дифференцирование дает превышение точности применяемого приближения, т.е.

$$\frac{d}{d\eta} [\sqrt{1 - \eta^2} S(\eta)] \approx \sqrt{1 - \eta^2} \frac{d}{d\eta} S(\eta), \quad \frac{d}{d\xi} [\sqrt{\xi^2 - 1} R(\xi)] \approx \sqrt{\xi^2 - 1} \frac{d}{d\xi} R(\xi).$$

Но тогда

$$E_\xi = \frac{c}{ik h_\eta} R(\xi) \frac{dS(\eta)}{d\eta}, \quad E_\eta = - \frac{c}{ik h_\xi} \frac{dR(\xi)}{d\xi} S(\eta), \quad H_\varphi = -cR(\xi)S(\eta) \quad (29)$$

Решения (29) отличаются от (25) тем, что здесь стоят сферические функции с индексом $m = 1$, тогда как однородные азимутальные моды в (28) имели индекс $m = 0$. С другой сто-

роны, при $k^2 f^2 \cdot (\xi^2 - 1)^2 \gg 1$ и $k^2 f^2 (1 - \eta^2)^2 \gg 1$ (вдали от точек $\xi = 1$, $\eta = \pm 1$) справедливы асимптотические равенства $R_m(\xi) \approx R_{m-1}(\xi)$, $S_{m-1}(\eta) \approx S_m(\eta)$. Таким образом, в пределах точности метода равносильны оба приближения (21-23) и (25-27). Заметим также, что при $\beta(\varphi) > 0$ ($m \neq 0$) каустические поверхности $\xi = \tilde{\xi}$ и $\eta = \tilde{\eta}$ экранируют собой области $\xi = 1$ и $\eta = \pm 1$, где вышеуказанные асимптотические равенства оказываются некорректными.

Каустические поверхности в вытянутом сфероидальном резонаторе реализуются при выполнении условий $\beta(\xi) = 0$ и $\beta(\eta) = 0$ и определяются корнями этих уравнений $\xi = \tilde{\xi}$ и $\eta = \tilde{\eta}$. Они суть софокусные исходному сфероиду $\xi = \xi_0$ сфероид ($\xi = \tilde{\xi}$) и двухполостный гиперboloид ($\eta = \tilde{\eta}$). При этом следует учесть, что для азимутально-однородных сфероидальных мод ($m = 0$) в вытянутом сфероидальном резонаторе каустика $\eta = \tilde{\eta}$ не реализуется ($\beta(\eta) > 0$). Более того, когда $m = 0$ ($\beta(\varphi) = 0$) и $\beta(\xi) = 0$, из уравнения эйконала следует, что

$$\gamma_\eta = \frac{\sqrt{\beta(\eta)}}{h_\eta} = 1.$$

Но тогда из конфигураций (21-23) только поля (21) и (23) являются равномерными вскду. Причем, если воспользоваться заменами

$$\frac{1}{ik\sqrt{\beta(\eta)}} \cdot \frac{dS(\eta)}{d\eta} \rightleftharpoons S(\eta), \text{ то можно показать, что выра-}$$

жения для компонент полей Н-типов волн в (21) переходят в выражения для полей Е-типов волн, получающихся из (23) заме-

нами $\vec{E} \rightarrow \vec{H}$ и $\vec{H} \rightarrow -\vec{E}$. Вырождение полностью снимается. Заметим, что этот случай отличается от аналогичного случая в трехосном эллипсоиде тем, что здесь $\beta(\varphi) = 0$ не соответствует какой-либо каустической поверхности. Для однородных азимутальных мод ($m = 0$) в вытянутом сфероидальном резонаторе поля (21) приобретают вид (29).

Дебаевские асимптотики вытянутой радиальной сфероидальной функции $R(\xi)$ и ее первой производной имеют вид (см. [8]):

$$R(\xi) = \frac{\cos \left[\kappa \int_{\xi}^{\xi_0} \sqrt{\beta(\xi)} d\xi - \frac{\pi}{4} \right]}{4 \sqrt{\beta(\xi)} \sqrt{\xi^2 - 1}}, \quad \frac{dR(\xi)}{d\xi} = -\frac{\kappa \sqrt{\beta(\xi)}}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \sin \left[\kappa \int_{\xi}^{\xi_0} \sqrt{\beta(\xi)} d\xi - \frac{\pi}{4} \right] \quad (30)$$

Как как гиперболическая каустическая поверхность не реализуется ($\beta(\eta) > 0$), а из симметрии системы следует, что

$$E_{\eta}(-\eta) = -E_{\eta}(\eta), \quad H_{\eta}(-\eta) = H_{\eta}(\eta), \quad (31)$$

квазиклассическая асимптотика угловой сфероидальной функции запишется в виде:

$$S(\eta) = \frac{\sin \left[\kappa \int_{|\eta|}^{\eta_0} \sqrt{\beta(\eta)} d\eta \right]}{4 \sqrt{\beta(\eta)} \sqrt{1 - \eta^2}}. \quad (32)$$

Квантовые условия для H -типов волн (21) или соответствующих (23) E -типов получатся теперь удовлетворяющими граничным условиям на поверхности идеально проводящего сфероида $\xi = \xi_0$:

$$E_\eta = E_\psi = H_\xi = 0 \quad (33)$$

и условиям однозначности (31). Они имеют вид

$$\int_{\operatorname{arcsch} \tilde{\xi}}^{\operatorname{arcsch} \xi_0} \sqrt{k^2 f^2 \operatorname{sh}^2 \psi - \lambda} d\psi = \frac{\pi}{2} (1 + 2N_\xi + 1), \quad \int_0^{\pi/2} \sqrt{\lambda - k^2 f^2 \sin^2 \psi} d\psi = \pi N_\eta. \quad (34)$$

Второе из них есть полный эллиптический интеграл второго рода. Квантовые условия для E - типов волн, соответствующих (21), и для H - типов волн - (23) получаются из (34) заменой

$$2N_\xi + 1 \rightarrow 2N_\xi :$$

В остальных случаях ($\beta(\psi) > 0$, $m \neq 0$) равномерными всюду являются асимптотические выражения (22) и (23), тогда как решения (21) будут расходиться на пересечениях каустических поверхностей $\xi = \tilde{\xi}$ и $\eta = \tilde{\eta}$, когда $1 - \chi_\psi^2 = \chi_\xi^2 + \chi_\eta^2 = 0$ ($\beta(\xi) = 0$, $\beta(\eta) = 0$). Условия (31) и (33) для H - типов волн сводятся теперь к следующим уравнениям:

$$\frac{dR(\xi = \xi_0)}{d\xi} = 0, \quad S(\eta = 0) = 0 \quad \text{когда} \quad \vec{S}_{P_1 P_2 P_3} \parallel \vec{\nabla} \eta, \quad (35a)$$

$$R(\xi = \xi_0) = 0, \quad \frac{dS(\eta = 0)}{d\eta} = 0 \quad \text{когда} \quad \vec{S}_{P_1 P_2 P_3} \perp \vec{\nabla} \xi. \quad (35b)$$

Для E - типов волн, получающихся из (22-23) заменами $\vec{E} \rightarrow \vec{H}$ и $\vec{H} \rightarrow -\vec{E}$, для конфигурации поля при

$\vec{S}_{P_1 P_2 P_3} \parallel \vec{\nabla} \eta$ мы будем иметь граничные условия (35б),
а при $\vec{S}_{P_1 P_2 P_3} \parallel \vec{\nabla} \xi$ - (35а). Таким образом, имеет место дву-
кратное вырождение.

Квазиклассические асимптотики для угловых сфероидальных
функций теперь имеют вид:

$$S(\eta) = \frac{\cos \left[\kappa \int_{|\tilde{\eta}|}^{\eta} \sqrt{\beta(\eta)} d\eta + \frac{\pi}{4} \right]}{4 \sqrt{\beta(\eta)} \sqrt{1-\eta^2}}, \quad \frac{dS(\eta)}{d\eta} = - \frac{\kappa \sqrt{\beta(\eta)}}{\sqrt{1-\eta^2}} \sin \left[\kappa \int_{|\tilde{\eta}|}^{\eta} \sqrt{\beta(\eta)} d\eta + \frac{\pi}{4} \right]. \quad (36)$$

Квантовые условия для конфигурации полей (22) и (23) полу-
чаются соответственно

$$\kappa \int_{\tilde{\eta}}^{\xi_0} \sqrt{\beta(\xi)} d\xi = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + 2N_{\xi} \right), \quad \kappa \int_0^{|\tilde{\eta}|} \sqrt{\beta(\eta)} d\eta = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + 2N_{\eta} + 1 \right). \quad (37a)$$

и

$$\kappa \int_{\tilde{\xi}}^{\xi_0} \sqrt{\beta(\xi)} d\xi = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + 2N_{\xi} + 1 \right), \quad \kappa \int_0^{|\tilde{\eta}|} \sqrt{\beta(\eta)} d\eta = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + 2N_{\eta} \right). \quad (37б)$$

Причем условия (37а) для полей (22) совпадают с условиями для
полей E - типов, соответствующих (23), а условия (37б) для
полей (23) - с условиями для E - типов, соответствующих (22).
Если снабдить сфероидальные функции индексами [8] $R_{\ell m}(\xi)$ и
 $S_{\ell m}(\xi)$, соответствующими собственным значениям $\lambda_{\ell m}$,

то число нулей угловых сфероиальных функций определяет разность $l-m$, а их четность - соотношение

$$S_{em}(\eta) = (-1)^{l-m} S(-\eta). \quad (38)$$

Очевидно поэтому четность квантовых чисел $2N_\eta + 1$ или $2N_\eta$ однозначно связана с выбором четной или нечетной угловой сфероиальной функции.

В сплюснутом сфероиальном резонаторе поля будут описываться выражениями (21)-(23), если в них подставлять соответствующие сплюснутые сфероиальные функции, а под коэффициентами Ламэ подразумевать коэффициенты Ламэ сплюснутой сфероиальной системы координат

$$\xi \geq 0, \quad -1 \leq \eta \leq 1, \quad 0 < \varphi < 2\pi: \quad h_\xi = f\left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{1 + \xi^2}\right)^{1/2},$$

$$h_\eta = f\left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{1 - \eta^2}\right)^{1/2}, \quad h_\varphi = f[(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)]^{1/2},$$

и, соответственно, иметь в виду, что в (21)-(23)

$$\beta(\xi) = -\frac{\lambda}{\kappa^2(\xi^2 + 1)} + f^2 + \frac{m^2}{\kappa^2(\xi^2 + 1)^2}, \quad \beta(\eta) = \frac{\lambda}{\kappa^2(1 - \eta^2)} - f^2 - \frac{m^2}{\kappa^2(1 - \eta^2)^2}.$$

В отличие от вытянутого, в сплюснутом сфероиальном резонаторе реализуется два типа колебаний. Для первого типа колебаний квантовые условия для $m > 0$ совпадают с квантовыми условиями (37а,б), если в них подразумевать под $\beta(\xi)$ и $\beta(\eta)$ соответствующие сфероиальные выражения, а пределы интегрирова-

ния по η заменить на $(\tilde{\eta} - 1)$. В случае однородных тороидальных мод ситуация более сложная. В этом случае могут быть реализованы для различных квантовых мод две различные каустические поверхности $\tilde{\xi} = \sqrt{\frac{\lambda^2}{\kappa^2 f^2} - 1}$ и $\tilde{\eta} = \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\kappa^2 f^2}}$. Очевидно, что для мод с собственными значениями $\lambda > \kappa f$ будет реализовываться единственная эллиптическая каустическая поверхность $\xi = \tilde{\xi}$. В случае $\lambda = \kappa f$ какие-либо колебания отсутствуют, а для остальных мод с $\lambda < \kappa f$ - каустическая поверхность - гиперболическая. В первом случае квантовые условия, аналогичные (35), будут иметь вид ($\beta(\eta) > 0$)

$$\int_{\alpha z \operatorname{csch} \tilde{\xi}}^{\alpha z \operatorname{csh} \tilde{\xi}_0} \sqrt{\kappa^2 f^2 \operatorname{ch}^2 \varphi - \lambda} d\varphi = \frac{\pi}{2} (1 + 2N_{\tilde{\xi}} + 1) \quad \text{и} \quad \int_0^{\pi/2} \sqrt{\lambda^2 - \kappa^2 f^2 \cos^2 \varphi} d\varphi = \pi N_{\eta}, \quad (39)$$

в другом случае ($\lambda < \kappa f$, $\beta(\xi) > 0$)

$$\int_{\ln(1+\sqrt{2})}^{\alpha z \operatorname{csh} \tilde{\xi}_0} \sqrt{\kappa^2 f^2 \operatorname{ch}^2 \varphi - \lambda} d\varphi = \pi N_{\tilde{\xi}}, \quad \int_{\alpha z \operatorname{csch} \sqrt{1-\lambda^2/\kappa^2 f^2}}^{\pi/2} \sqrt{\lambda^2 - \kappa^2 f^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{2} (1 + 2N_{\eta} + 1) \quad (40)$$

(39-40) - квантовые условия для H-типов волн. Квантовые условия для E-типов волн в (39) отличаются четностью чисел $2N_{\tilde{\xi}} + 1$ (т.е. $2N_{\tilde{\xi}}$), в (40) - четностью чисел $2N_{\eta} + 1$ (т.е. $2N_{\eta}$). Второй тип колебаний реализуется между двумя гиперболическими каустическими поверхностями $\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2$, соответствующими двум корням уравнения $\beta(\eta) = 0$ ($\beta(\xi) > 0$):

$$\tilde{\eta}_{1,2} = \left[1 - \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4m^2 \kappa^2 f^2}}{2\kappa^2 f^2} \right]^{1/2}, \quad \tilde{\eta}_1 < \tilde{\eta}_2. \quad (41)$$

В этом случае квазиклассическую асимптотику можно построить двумя различными способами:

$$S(\eta) = \frac{\cos\left[\kappa \int_{\tilde{\eta}_1}^{\eta} \sqrt{\beta(\eta)} d\eta - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt[4]{\beta(\eta)} \sqrt{1-\eta^2}} \quad \text{либо} \quad S(\eta) = \frac{\cos\left[\kappa \int_{\tilde{\eta}_2}^{\eta} \sqrt{\beta(\eta)} d\eta - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt[4]{\beta(\eta)} \sqrt{1-\eta^2}} .$$

Область осциллирующих решений не включает в себя полость $\eta = 0$, поэтому квантовые условия в данном случае получим из условия совпадения двух асимптотических выражений в промежуточной точке, т.е.

$$\cos\left[\kappa \int_{\tilde{\eta}_1}^{\eta} \sqrt{\beta(\eta)} d\eta - \frac{\pi}{4}\right] = \cos\left[\kappa \int_{\tilde{\eta}_2}^{\eta} \sqrt{\beta(\eta)} d\eta + \frac{\pi}{4}\right], \quad \text{т.е.} \quad (42)$$

$$\kappa \int_{\tilde{\eta}_1}^{\eta} \sqrt{\beta(\eta)} d\eta - \frac{\pi}{4} = \kappa \int_{\tilde{\eta}_2}^{\eta} \sqrt{\beta(\eta)} d\eta + \frac{\pi}{4} + 2\pi N_{\eta}, \quad \text{или}$$

$$\kappa \int_{\tilde{\eta}_1}^{\tilde{\eta}_2} \sqrt{\beta(\eta)} d\eta = \pi \left(\frac{1}{2} + 2N_{\eta}\right).$$

Квантовое условие (42) для угловых сплюснутых сфероидальных функций общее для всех решений. Для радиальных сплюснутых сфероидальных функций будем иметь также единое квантовое условие для всех колебаний

$$\kappa \int_0^{\xi_0} \sqrt{\beta(\xi)} d\xi = \pi N_{\xi}. \quad (43)$$

Заметим в конце, что в случае решений (25)–(27) все квантовые условия сохраняют свой вид. В самом деле, если переобозначить собственные значения $\lambda_{\ell m} \rightarrow \lambda_{\ell m} - 2m + 1 + \sqrt{2m-1}$, то квантовые условия для мод с $m+1$ (25)–(27) будут совпадать с квантовыми условиями мод с m (21)–(23), что, как было показано выше, для больших сфероидальных резонаторов несущественно.

Таблица

Тип ко- лебаний	Компонент в поперечн	Направление вектора $\vec{S}_{P_1 P_2 P_3}$		
		$\vec{S}_{P_1 P_2 P_3} \parallel \vec{\nabla} \xi_3$	$\vec{S}_{P_1 P_2 P_3} \parallel \vec{\nabla} \xi_2$	$\vec{S}_{P_1 P_2 P_3} \parallel \vec{\nabla} \xi_1$
I	2	3	4	5
I $\rho(\xi_2) > 0$	E_{ξ_1}	$\frac{C_0 + C_1}{iKh_2 \sqrt{1-\gamma_3^2}} L_1 L_2 L_3 +$ $+ \frac{C_0 - C_1}{h_2 \sqrt{1-\gamma_3^2}} \sqrt{\rho(\xi_2)} L_1 L_2 L_3$	$- \frac{C_0 + C_1}{iKh_3 \sqrt{1-\gamma_2^2}} L_1 L_2 L_3 -$ $- \frac{C_0 - C_1}{(iK)^2 h_3 \sqrt{\rho(\xi_2)} \sqrt{1-\gamma_2^2}} L_1 L_2 L_3$	0
	E_{ξ_2}	$- \frac{C_0 + C_1}{iKh_1 \sqrt{1-\gamma_3^2}} L_1 L_2 L_3 -$ $- \frac{C_0 - C_1}{(iK)^2 h_2 \sqrt{\rho(\xi_2)} \sqrt{1-\gamma_3^2}} L_1 L_2 L_3$	0	$\frac{C_0 + C_1}{iKh_3 \sqrt{1-\gamma_1^2}} L_1 L_2 L_3 +$ $+ \frac{C_0 - C_1}{(iK)^2 h_3 \sqrt{\rho(\xi_2)} \sqrt{1-\gamma_1^2}} L_1 L_2 L_3$
	E_{ξ_3}	0	$\frac{C_0 + C_1}{iKh_1 \sqrt{1-\gamma_2^2}} L_1 L_2 L_3 +$ $+ \frac{C_0 - C_1}{(iK)^2 h_1 \sqrt{\rho(\xi_2)} \sqrt{1-\gamma_2^2}} L_1 L_2 L_3$	$- \frac{C_0 + C_1}{iKh_2 \sqrt{1-\gamma_1^2}} L_1 L_2 L_3$ $- \frac{C_0 - C_1}{h_2 \sqrt{1-\gamma_1^2}} \sqrt{\rho(\xi_2)} L_1 L_2 L_3$

Продолжение таблицы

I	2	3	4	5
II	E_{ξ_1}	$\frac{C_0 + C_1}{iKh_2 \sqrt{1-\gamma_2^2}} L_1 L_2 L_3 +$ $+ \frac{C_0 - C_1}{(iK)^2 h_2 \sqrt{\beta(\xi_1)} \sqrt{1-\gamma_2^2}} L_1' L_2' L_3$	$- \frac{C_0 + C_1}{iKh_3 \sqrt{1-\gamma_2^2}} L_1 L_2 L_3 -$ $- \frac{C_0 - C_1}{(iK)^2 h_3 \sqrt{\beta(\xi_1)} \sqrt{1-\gamma_2^2}} L_1' L_2' L_3$	0
	E_{ξ_2}	$- \frac{C_0 + C_1}{iKh_1 \sqrt{1-\gamma_3^2}} L_1' L_2 L_3 -$ $- \frac{C_0 - C_1}{h_1 \sqrt{1-\gamma_3^2}} \sqrt{\beta(\xi_1)} L_1 L_2 L_3$	0	$\frac{C_0 + C_1}{iKh_3 \sqrt{1-\gamma_1^2}} L_1 L_2 L_3 +$ $+ \frac{C_0 - C_1}{(iK)^2 h_3 \sqrt{\beta(\xi_1)} \sqrt{1-\gamma_1^2}} L_1' L_2' L_3$
	E_{ξ_3}	0	$\frac{C_0 + C_1}{iKh_1 \sqrt{1-\gamma_2^2}} L_1' L_2 L_3 +$ $+ \frac{C_0 - C_1}{h_1 \sqrt{1-\gamma_2^2}} \sqrt{\beta(\xi_1)} L_1 L_2 L_3$	$- \frac{C_0 + C_1}{iKh_2 \sqrt{1-\gamma_1^2}} L_1 L_2 L_3 -$ $- \frac{C_0 - C_1}{(iK)^2 h_2 \sqrt{\beta(\xi_1)} \sqrt{1-\gamma_1^2}} L_1' L_2' L_3$

Продолжение таблицы

I	2	3	4	5
E_{ξ_1}		$\frac{C_0 + C_1}{ik h_2 \sqrt{1 - \gamma_3^2}} L_1 L_2 L_3 +$ $+ \frac{C_0 - C_1}{(ik)^2 h_2 \sqrt{\beta(\xi_3)} \sqrt{1 - \gamma_3^2}} L_1 L_2 L_3$	$- \frac{C_0 + C_1}{ik h_3 \sqrt{1 - \gamma_2^2}} L_1 L_2 L_3 -$ $- \frac{C_0 - C_1}{h_3 \sqrt{1 - \gamma_2^2}} \sqrt{\beta(\xi_3)} L_1 L_2 L_3$	0
E_{ξ_2}		$- \frac{C_0 + C_1}{ik h_1 \sqrt{1 - \gamma_3^2}} L_1 L_2 L_3 -$ $- \frac{C_0 - C_1}{(ik)^2 h_1 \sqrt{\beta(\xi_2)} \sqrt{1 - \gamma_3^2}} L_1 L_2 L_3$	0	$\frac{C_0 + C_1}{ik h_3 \sqrt{1 - \gamma_1^2}} L_1 L_2 L_3 +$ $+ \frac{C_0 - C_1}{h_3 \sqrt{1 - \gamma_1^2}} \sqrt{\beta(\xi_3)} L_1 L_2 L_3$
E_{ξ_3}	0		$\frac{C_0 + C_1}{ik h_3 \sqrt{1 - \gamma_2^2}} L_1 L_2 L_3 +$ $+ \frac{C_0 - C_1}{(ik)^2 h_2 \sqrt{\beta(\xi_3)} \sqrt{1 - \gamma_2^2}} L_1 L_2 L_3$	$- \frac{C_0 + C_1}{ik h_2 \sqrt{1 - \gamma_1^2}} L_1 L_2 L_3$ $- \frac{C_0 - C_1}{(ik)^2 h_2 \sqrt{\beta(\xi_3)} \sqrt{1 - \gamma_1^2}} L_1 L_2 L_3$

III

$\beta(\xi_3) > 0$

Продолжение таблицы

I	2	3	4	5
<p>IV</p> <p>$\beta(\xi_1) > 0$</p> <p>$\beta(\xi_3) > 0$</p>	<p>E_{ξ_1}</p>	$\frac{C_{00} + C_{10} + C_{01} + C_{11}}{ik h_2 \sqrt{1-\gamma_3^2}} L_1 L_2 L_3 +$ $+ \frac{C_{00} - C_{10} + C_{01} - C_{11}}{(ik)^2 h_2 \sqrt{\beta(\xi_1)} \sqrt{1-\gamma_3^2}} L_1 L_2 L_3 +$ $+ \frac{C_{00} + C_{10} - C_{01} - C_{11}}{(ik)^2 h_2 \sqrt{\beta(\xi_3)} \sqrt{1-\gamma_3^2}} L_1 L_2 L_3 +$ $+ \frac{C_{00} - C_{10} - C_{01} + C_{11}}{(ik)^2 h_2 \sqrt{\beta(\xi_1)\beta(\xi_3)} \sqrt{1-\gamma_3^2}} L_1 L_2 L_3$	$- \frac{C_{00} + C_{10} + C_{01} + C_{11}}{ik h_3 \sqrt{1-\gamma_2^2}} L_1 L_2 L_3 -$ $- \frac{C_{00} - C_{10} + C_{01} - C_{11}}{(ik)^2 h_3 \sqrt{\beta(\xi_1)} \sqrt{1-\gamma_2^2}} L_1 L_2 L_3 -$ $- \frac{C_{00} + C_{10} - C_{01} - C_{11}}{h_3 \sqrt{1-\gamma_2^2}} \sqrt{\beta(\xi_3)} L_1 L_2 L_3 -$ $- \frac{C_{00} - C_{10} - C_{01} + C_{11}}{ik h_3 \sqrt{1-\gamma_2^2}} \sqrt{\beta(\xi_3)} L_1 L_2 L_3$	<p>0</p>
	<p>E_{ξ_2}</p>	$- \frac{C_{00} + C_{10} + C_{01} + C_{11}}{ik h_1 \sqrt{1-\gamma_3^2}} L_1 L_2 L_3 -$ $- \frac{C_{00} - C_{10} + C_{01} - C_{11}}{h_1 \sqrt{1-\gamma_3^2}} \sqrt{\beta(\xi_1)} L_1 L_2 L_3 -$ $- \frac{C_{00} + C_{10} - C_{01} - C_{11}}{(ik)^2 h_1 \sqrt{\beta(\xi_3)} \sqrt{1-\gamma_3^2}} L_1 L_2 L_3 -$ $- \frac{C_{00} - C_{10} - C_{01} + C_{11}}{ik h_2 \sqrt{\beta(\xi_3)} \sqrt{1-\gamma_3^2}} \sqrt{\beta(\xi_1)} L_1 L_2 L_3$	<p>0</p>	$\frac{C_{00} + C_{10} + C_{01} + C_{11}}{ik h_3 \sqrt{1-\gamma_1^2}} L_1 L_2 L_3 +$ $+ \frac{C_{00} - C_{10} - C_{01} - C_{11}}{(ik)^2 h_3 \sqrt{\beta(\xi_1)} \sqrt{1-\gamma_1^2}} L_1 L_2 L_3 +$ $- \frac{C_{00} + C_{10} - C_{01} - C_{11}}{h_3 \sqrt{1-\gamma_1^2}} \sqrt{\beta(\xi_3)} L_1 L_2 L_3 +$ $+ \frac{C_{00} - C_{10} - C_{01} + C_{11}}{ik h_3 \sqrt{1-\gamma_1^2}} \sqrt{\beta(\xi_3)} L_1 L_2 L_3$

Продолжение таблицы

I	2	3	4	5
IV			$\frac{C_{00} + C_{10} + C_{01} + C_{11}}{ik h_1 \sqrt{1-\gamma_2^2}} L_1' L_2 L_3 +$	$\frac{C_{00} + C_{10} + C_{01} + C_{11}}{ik h_2 \sqrt{1-\gamma_1^2}} L_1 L_2 L_3 -$
$\rho(\xi_1) > 0$	$E \xi_3$	0	$+ \frac{C_{00} - C_{10} + C_{01} - C_{11}}{h_1 \sqrt{1-\gamma_2^2}} \sqrt{\rho(\xi_1)} L_1 L_2 L_3 +$	$\frac{C_{00} - C_{10} + C_{01} - C_{11}}{(ik)^2 h_2 \sqrt{\rho(\xi_1)} \sqrt{1-\gamma_1^2}} L_1' L_2 L_3 -$
$\rho(\xi_3) > 0$			$+ \frac{C_{00} + C_{10} - C_{01} - C_{11}}{(ik)^2 h_1 \sqrt{\rho(\xi_3)} \sqrt{1-\gamma_2^2}} L_1 L_2 L_3 +$	$\frac{C_{00} + C_{10} - C_{01} - C_{11}}{(ik)^2 h_2 \sqrt{\rho(\xi_3)} \sqrt{1-\gamma_1^2}} L_1 L_2 L_3 -$
			$+ \frac{C_{00} - C_{10} - C_{01} + C_{11}}{ik h_1 \sqrt{\rho(\xi_3)} \sqrt{1-\gamma_2^2}} L_1 L_2 L_3$	$\frac{C_{00} - C_{10} - C_{01} + C_{11}}{(ik)^2 h_2 \rho(\xi_3) \sqrt{1-\gamma_1^2}} L_1' L_2 L_3 -$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Газазян Э.Д.,Иванян М.И. Коротковолновая асимптотика электромагнитного поля внутри замкнутого эллипсоида. Радиотехника и электроника. 1976, т.21, № 10, с.2052-2061.
2. Газазян Э.Д.,Иванян М.И.,Тер-Погосян А.Д. Асимптотическая теория сфероидальных резонаторов. Препринт ЕФИ-897(48)-86, Ереван, 1986.
3. Газазян Э.Д.,Иванян М.И. Асимптотическое разделение переменных в уравнениях Максвелла для неоднородной среды. Тез. докладов УП Всесоюзной конференции по дифракции и распространению волн.Р. н/д, 1977, т.1, с.78-81.
4. Газазян Э.Д.,Иванян М.И. Равномерные коротковолновые асимптотические решения уравнений Гельмгольца и Максвелла. Радиотехника и электроника, 1984, т.29, № 5, с.830-835.
5. Вайнштейн Л.А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Сов.радио, 1966.
6. Быков В.П. Геометрическая оптика трехмерных колебаний в открытых резонаторах. В кн.Электроника больших мощностей. М.: Наука, 1965, сб.4 , с.66-92.
7. Ландау Л.Д.,Лифшиц Е.М. Квантовая механика. М.: Наука,1973.
8. Комаров И.В.,Пономарев Л.И.,Славянов С.Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. М.: Наука, 1978.
9. Стреттон Дж.Б. Теория электромагнетизма. М.: ГИТТЛ, 1948.

Рукопись поступила 11 февраля 1988 г.

The address for requests:
Information Department
Yerevan Physics Institute
Markaryan St., 2
Yerevan, 375036
Armenia, USSR

Э.Д. ГАЗАЯН.

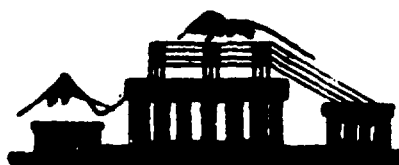
**О СОБСТВЕННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЯХ
В ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ РЕЗОНАТОРАХ**

Редактор **И.П. Мукаян**
Технический редактор **А.С. Абрамян**

Подписано в печать 7/У-88г. ВФ-03091 формат 60x84/16
Офсетная печать. Уч. изд. л. 2,0 Тираж 299 экз. Ц. 30к.
Зак. тип. № 203 Индекс 3624

Отпечатано в Ереванском физическом институте
Ереван 36, Маркьяна 2

индекс 3624



ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ