индекс 3624

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Препринт ЕФИ-1092(55)-88

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
YEREVAN PHYSICS INSTITUTE

Э.Д.ГАЗАЗЯН

РАВНОМЕРНАЯ КОРОТКОВОЛНОВАЯ АСИМПТОТИКА СКАЛЯРНЫХ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ НА ОСНОВЕ ОДНОМЕРНЫХ ЭТАЛОННЫХ ФУНКЦИЙ

ЦНИИатоминформ
ЕРЕВАН—1988

Նախատպ ԵՖԻ-1092(55)-88

Է.Դ. ԳԱԶԱԶՅԱՆ

ՍԿԱԼՅԱՐ ԵՎ ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԵՐԻ ԿԱՐՃԱԼԻՔԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿԱՆ՝ ՀԻՄՆՎԱԾ ՄԻԱՉԱՓ ԷՏԱԼՈՆԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՎՐԱ

Հոդվածում ապացուցվում են պնդումներ, որոնց օգնությամբ կառուցվում են Հելմհոլցի և Մաքսվելի հավասարումների կարճալիքային մոտարկված լուծումները։ Ապացուցվում է, որ ստացված արտահայտությունները ճշմարիտ են կաուստիկական մակերևույթների վրա, իսկ սրանցից հեռու տիրույթներում համընկնում են երկրաչափական օպտիկայի մոտավորությամբ ստացվող լուծումներին:

Երևանի ֆիզիկայի ինստիտուտ
Երևան 1988

Препринт ЕФИ-1092(55)-88

УДК 537.8

Э.Д.ГАЗАЗЯН

РАВНОМЕРНАЯ КОРОТКОВОЛНОВАЯ АСИМПТОТИКА СКАЛЯРНЫХ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ НА ОСНОВЕ ОДНОМЕРНЫХ ЭТАЛОННЫХ ФУНКЦИЙ

В статье доказываются утверждения, с помощью которых строятся равномерные коротковолновые асимптотические решения уравнений Гельмгольца и Максвелла, справедливые на каустических поверхностях и переходящие в геометрооптические вдали от них.

Ереванский физический институт
Ереван 1988

Preprint YERPHI-1092(55)-88

E.D. GAZAZIAN

THE UNIFORM SHORT-WAVE ASYMPTOTICS OF SCALAR AND ELECTROMAGNETIC FIELDS BASED ON ONE-DIMENSIONAL STANDARD FUNCTIONS

In this paper there are proved the statements with the help of which the uniform short-wave asymptotic solutions of the Helmholtz and Maxwell equations are constructed. These asymptotics are valid on the caustics and turn into geometro-optical ones far from it.

Yerevan Physics Institute
Yerevan 1988

I. Формулировка основных утверждений

В отличие от геометрооптических разложений, содержащих произведения геометрооптических амплитуд на экспоненты, аргументы которых представляют собой эйконалы лучей, равномерные асимптотические разложения конструируются (см.[I]) в виде комбинаций некоторых эталонных функций таким образом, чтобы поле вдали от областей сходимости лучей имело лучевую структуру, совпадающую с геометрооптической или дифракционной, и оставалось бы конечным в указанных областях. Впервые такая конструкция была предложена в работах [2,3] , где строилась равномерная асимптотика в области каустики, не имеющей особенностей и содержащей одну ветвь. В этом случае в качестве эталонных использовались функции Эйри. В работе [4] построение осуществлялось в случае каустик с двумя ветвями, и в качестве эталонных брались функции параболического цилиндра; цилиндрическая симметрия описывалась с помощью функций Бесселя [5-8], сферическая - с помощью присоединенных полиномов Лежандра и сферических функций Бесселя [9] ; поля, обладающие симметрией трехосного эллипсоида - функциями Ламе [I0] и т.д. Общим во всех пеусловий ортогональности

$$\vec{\nabla}\xi_{\ell}\,\vec{\nabla}\xi_{n}=0 \qquad при\ \ell\neq n. \qquad (I.I0)$$

Приведенные утверждения справедливы для трехмерных ($s = 3$), двухмерных ($s = 2$) и одномерных ($s = 1$) случаев, причем для двухмерных и одномерных задач, соответственно, две или одну из исходных функций $f_{\ell}(\xi_{\ell})$ следует полагать тождественно равной единице. Для сохранения общности будем пользоваться индексом s, принимающим значения I,2 или 3.

Число N, входящее в утверждение 2, определяется из следующих простых рассуждений. Пусть в некотором слагаемом суммы типа (I.4) или (I.5) имеется m индексов i_{ℓ}, принимающих значения 0 (остальные $s-m$ индексов принимают тогда значение I). Количество слагаемых в сумме равно числу сочетаний m из s: $C_s^m = \frac{s!}{(s-m)!\,m!}$. Тогда максимальное количество слагаемых в сумме равно сумме по всем возможным m:

$$N=\sum_{m=0}^{s}\frac{s!}{(s-m)!\,m!}=2^{s}. \qquad (I.II)$$

Таким образом, для одномерных задач имеем $N = 2$, двухмерных - $N = 4$ (см.напр., [2-4]) и для трехмерных задач $N = 8$([6-I0]). В вырожденном случае одномерной задачи, очевидно, могут получаться лишь плоские волны.

Доказательство утверждений I и 2 носит многоэтапный характер и содержит в себе доказательство дополнительных утверждений. Цель всех этих доказательств - показать, что:

а) конструкции (I.4) и (I.5) асимптотически удовлетворяют уравнениям Гельмгольца и Максвелла, соответственно;

б) амплитудные функции, входящие в разложения (I.4) и (I.5) - суть некоторые линейные комбинации геометрооптических амплитуд (см. (I.7) и (I.8)), причем такие, что остаются конечными на каустических поверхностях, где соответствующие геометрооптические амплитуды расходятся.

Эти доказательства по сути проведены для каждого конкретного случая в перечисленных работах. Здесь же мы дадим общую методику построения равномерных асимптотических разложений, ни коим образом не конкретизируя задачу, основываясь на уравнениях Гельмгольца и Максвелла, записанных в самом общем виде, и на свойствах дебаевских (ВКБ) асимптотик функций, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям второго порядка.

2. Дебаевская (ВКБ) асимптотика эталонных функций

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с коэффициентами $\alpha(\xi)$ и $\beta(\xi)$ в виде гладких функций

$$\frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2}+\alpha(\xi)\,\frac{df(\xi)}{d\xi}+K^2\beta(\xi)f(\xi)=0. \qquad (2.I)$$

При построении асимптотик этих функций, назовем их эталонными для больших K будем следовать методу, изложенному, например, в [II] . Будем искать решение (2.I) в виде

$$f(\xi)=e^{iKS(\xi)} \qquad (2.2)$$

Подставив (2.2) в (2.1), приходим к уравнению

$$\left(\frac{dS}{d\xi}\right)^2-\beta(\xi)+\frac{1}{i\kappa}\left[\frac{d^2S}{d\xi^2}+\alpha(\xi)\frac{dS}{d\xi}\right]=0. \tag{2.3}$$

Представим функцию $S(\xi)$ в виде дебаевского разложения по обратным степеням $i\kappa$:

$$S(\xi)=\sum\frac{S_n(\xi)}{(i\kappa)^n} \tag{2.4}$$

Тогда уравнение (2.3) приводится к виду

$$\left(\frac{dS_0}{d\xi}\right)^2-\beta(\xi)+\frac{1}{i\kappa}\left[\frac{d^2S_0}{d\xi^2}+\alpha(\xi)\frac{dS_0}{d\xi}+2\,\frac{dS_0}{d\xi}\,\frac{dS_1}{d\xi}\right]+$$
$$+\frac{1}{(i\kappa)^2}\left[\frac{d^2S_1}{d\xi^2}+\alpha(\xi)\frac{dS_1}{d\xi}+\frac{dS_1}{d\xi}+2\frac{dS_2}{d\xi}\,\frac{dS_0}{d\xi}\right]+\dots=0. \tag{2.5}$$

Из (2.5) в нулевом приближении имеем

$$\frac{dS_0}{d\xi}=\pm\sqrt{\beta(\xi)}\,, \qquad S_0=\pm\int\sqrt{\beta(\xi)}\,d\xi\,. \tag{2.6}$$

(2.6) справедливо в предположении

$$\left|\left(\frac{dS}{d\xi}\right)^2\right|\gg\left|\frac{1}{i\kappa}\left(\frac{d^2S}{d\xi^2}+\alpha(\xi)\frac{dS}{d\xi}\right)\right|,$$

т.е.

$$\frac{1}{\kappa}\left|\frac{d^2S}{d\xi^2}\Big/\left(\frac{dS}{d\xi}\right)^2+\frac{\alpha(\xi)}{dS/d\xi}\right|\ll 1. \tag{2.7}$$

Если $\frac{dS}{d\xi}\simeq\pm\sqrt{\beta(\xi)}$, то (2.7) запишется в виде

$$\frac{1}{\kappa}\left|\frac{\beta'(\xi)}{\beta^{3/2}(\xi)}\right|+\frac{1}{\kappa}\left|\frac{\alpha(\xi)}{\beta^{1/2}(\xi)}\right|\ll 1 \tag{2.7а}$$

или

$$\left|\frac{\beta'(\xi)}{\beta(\xi)}\right|\ll\kappa\sqrt{\beta(\xi)}\,,\qquad |\alpha(\xi)|\ll\kappa\sqrt{\beta(\xi)}\,. \tag{2.7б}$$

Условие (2.7а) означает, что функция $\beta(\xi)$ должна быть достаточно медленно меняющейся, а функция $\alpha(\xi)$ - ограниченной сверху. При дальнейших выводах соотношения (2.7а,б) будут подразумеваться.

Далее, в первом приближении из (2.5) имеем

$$\frac{d^2S_0}{d\xi^2}+\alpha(\xi)\frac{dS_0}{d\xi}+2\,\frac{dS_0(\xi)}{d\xi}\,\frac{dS_1(\xi)}{d\xi}=0 \tag{2.8}$$

откуда, с учетом (2.6)

$$S_1(\xi)=-\ln\sqrt[4]{\beta(\xi)}-\frac{1}{2}\int\alpha(\xi)\,d\xi+\mathrm{const}. \tag{2.9}$$

Ограничиваясь этим приближением, для функции $f(\xi)$ получаем следующее асимптотическое выражение

$$f(\xi)=\beta^{-1/4}(\xi)\left[C_1\exp\left(i\kappa\int_{\tilde{\xi}}^{\xi}\sqrt{\beta(\xi)}\,d\xi\right)+C_2\exp\left(-i\kappa\int_{\tilde{\xi}}^{\xi}\sqrt{\beta(\xi)}\,d\xi\right)\right]\exp\left(-\frac{1}{2}\int\alpha(\xi)\,d\xi\right)=$$
$$=\left[\sqrt{\beta(\xi)}\,\gamma(\xi)\right]^{-1/2}\left[C_1\exp\left(i\kappa\int_{\tilde{\xi}}^{\xi}\sqrt{\beta(\xi)}\,d\xi\right)+C_2\exp\left(-i\kappa\int_{\tilde{\xi}}^{\xi}\sqrt{\beta(\xi)}\,d\xi\right)\right]. \tag{2.10}$$

при $\beta(\xi) > 0$, и

$$f(\xi) = \left[\sqrt{|\beta(\xi)|}\,\gamma(\xi)\right]^{-1/2} C_1' \exp\left(-\kappa \int_{\xi}^{\tilde{\xi}} \sqrt{|\beta(\xi)|}\, d\xi\right) \qquad (2.11)$$

при $\beta(\xi) < 0$. Очевидно, что в точке $\xi = \tilde{\xi}$, где $\beta(\tilde{\xi}) = 0$, все соотношения, выведенные ранее, теряют смысл, в том числе выражения (2.10) и (2.11).

В (2.11) отсутствует член, соответствующий второй экспоненте в (2.10). Этот член опущен из тех соображений, что наличие экспоненциально растущей слагаемой нарушило бы поведение асимптотического ряда (2.5). Заметим далее, что согласно (2.10) и (2.11) область $\xi > \tilde{\xi}$ соответствует области распространения лучей, область же $\xi < \tilde{\xi}$ – области каустической тени.

Запишем (2.11) для значений $\xi \to \tilde{\xi}$. Представим $\beta(\xi)$ в виде ряда Тейлора в окрестности точки $\xi = \tilde{\xi}$ (для этого функция $\beta(\xi)$ должна быть бесконечно дифференцируема в точке $\xi = \tilde{\xi}$) и ограничимся первыми двумя членами этого ряда:

$$\beta(\xi) = \beta(\tilde{\xi}) + \beta'(\tilde{\xi})(\xi - \tilde{\xi}) = -\beta'(\tilde{\xi})(\tilde{\xi} - \xi).$$

Тогда (2.11) примет вид

$$f(\xi \to \tilde{\xi}) = \left[\sqrt{|\beta'(\tilde{\xi})(\tilde{\xi} - \xi)|}\,\gamma(\xi)\right]^{-1/2} C_1' \exp\left(-\kappa \int_{\xi}^{\tilde{\xi}} \sqrt{|\beta'(\tilde{\xi})(\tilde{\xi} - \xi)|}\, d\xi\right). \qquad (2.12)$$

Проследив затем за поведением функции $f(\xi)$ при переходе через каустику ($\xi = \tilde{\xi}$) (см.[11]), замечаем, что эти функции из области каустической тени ($\xi < \tilde{\xi}$) будут непрерывно переходить в область существования лучей ($\xi > \tilde{\xi}$), если

$$C_1 = C_1' e^{-i\frac{\pi}{4}}, \qquad C_2 = C_1' e^{+i\frac{\pi}{4}}, \qquad C_1' = \frac{C}{2}.$$

Тогда для дебаевских (ВКБ) асимптотик функций $f(\xi)$, удовлетворяющих уравнению (2.1), получаются следующие общие выражения

$$f(\xi) = \left[\sqrt{\beta(\xi)}\,\gamma(\xi)\right]^{-1/2} C \cos\left(\kappa \int_{\tilde{\xi}}^{\xi} \sqrt{\beta(\xi)}\, d\xi - \frac{\pi}{4}\right) \qquad (2.13)$$

в области существования лучей, и

$$f(\xi) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{|\beta(\xi)|}\,\gamma(\xi)\right]^{-1/2} C \exp\left(-\kappa \int_{\xi}^{\tilde{\xi}} \sqrt{|\beta(\xi)|}\, d\xi\right) \qquad (2.14)$$

в области каустической тени.

Выражение (2.13) может быть переписано в более удобном для дальнейших целей общем виде, содержащем также первую производную произвольной функции $f_\ell(\xi_\ell)$, удовлетворяющей уравнению (1.1)

$$\frac{d^{i_\ell} f_\ell(\xi_\ell)}{d\xi_\ell^{i_\ell}} = \frac{(i\kappa)^{i_\ell} \sum\limits_{\{P_\ell\}=0,1} (-1)^{P_\ell i_\ell} \cdot \exp\left[i(-1)^{P_\ell}\left(\kappa\Psi_\ell - \frac{\pi}{4}\right)\right]}{2\left[\sqrt{\beta_\ell(\xi_\ell)}\,\gamma_\ell(\xi_\ell)\right]^{1/2 - i_\ell}}, \qquad (2.15)$$

где $\Psi_\ell = \int_{\tilde{\xi}_\ell}^{\xi_\ell} \sqrt{\beta_\ell(\xi_\ell)}\, d\xi_\ell$, i_ℓ – принимает значения 0 и 1. В этом виде асимптотика функции $f_\ell(\xi_\ell)$ в дальнейшем будет неоднократно использована.

В тех случаях, когда соответствующая каустика не реализуется $(\beta_\ell(\xi_\ell) \neq 0)$, в фазе асимптотики функции $f_\ell(\xi_\ell)$ величину $\pi/4$

следует опустить. Это тем более понятно, если учесть, что скачок возникает при касании луча к каустике.

В частном случае $\alpha(\xi) = 0$ и $\beta(\xi) = const\,(\beta'(\xi) = 0)$ асимптотика функции $f(\xi)$ в соответствии с уравнениями (2.3) - (2.9) в любом приближении по $\frac{1}{ik}$ совпадает с точным решением. Сохранив для общности изложения запись асимптотики в виде (2.I5) и в этом случае , следует затем внести $\beta(\xi) = const$ в постоянную определения функции $f(\xi)$.

3. Доказательства сформулированных утверждений

Как для уравнения Гельмгольца, так и для уравнений Максвелла доказательство утверждения I проводится путем прямой подстановки разложений (I.4) и (I.5) соответственно в уравнения (I.2) и (I.3).

Доказательство утверждений I и 2 для скалярного уравнения Гельмгольца. Запишем следующие очевидные тождества, вытекающие из уравнения (I.I) и свойств функции $\gamma_\ell^{i_\ell}(\xi_\ell)$:

$$\vec\nabla \frac{\partial^{i_\ell}}{\partial \xi_\ell^{i_\ell}} f_\ell(\xi_\ell) = \Big\{ -i_\ell \alpha_\ell(\xi_\ell) \frac{\partial^{i_\ell}}{\partial \xi_\ell^{i_\ell}} f_\ell(\xi_\ell) + \tag{3.I}$$

$$+ \kappa^{2i_\ell} (-1)^{i_\ell} \beta_\ell^{i_\ell}(\xi_\ell) \frac{\partial^{1-i_\ell}}{\partial \xi_\ell^{1-i_\ell}} f_\ell(\xi_\ell) \Big\} \vec\nabla \xi_\ell \, ;$$

$$\vec\nabla \gamma_\ell^{i_\ell}(\xi_\ell) - i_\ell \alpha_\ell(\xi_\ell) \gamma_\ell^{i_\ell}(\xi_\ell) \vec\nabla \xi_\ell = 0 \, . \tag{3.2}$$

Действие оператора $\vec\nabla$ на (I.4) с учетом тождеств (3.I) и (3.2) приводит к следующему выражению:

$$\vec\nabla U = \sum_{\dots i_\ell \dots} \Big\{ \vec\nabla A^{\dots i_\ell \dots} \frac{\partial^{i_1}}{\partial \xi_1^{i_1}} f_1(\xi_1) \cdots \frac{\partial^{i_s}}{\partial \xi_s^{i_s}} f_s(\xi_s) +$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{s} \kappa^{2i_\ell} (-1)^{i_\ell} A^{\dots i_\ell \dots} \beta_\ell^{i_\ell - \frac{1}{2}}(\xi_\ell) \Big[\frac{\partial^{i_1}}{\partial \xi_1^{i_1}} f_1(\xi_1) \cdots \frac{\partial^{i_{\ell-1}}}{\partial \xi_{\ell-1}^{i_{\ell-1}}} f_{\ell-1}(\xi_{\ell-1}) \cdot \tag{3.3}$$

$$\cdot \frac{\partial^{1-i_\ell}}{\partial \xi_\ell^{1-i_\ell}} f_\ell(\xi_\ell) \frac{\partial^{i_{\ell+1}}}{\partial \xi_{\ell+1}^{i_{\ell+1}}} f_{\ell+1}(\xi_{\ell+1}) \cdots \frac{\partial^{i_s}}{\partial \xi_s^{i_s}} f_s(\xi_s) \vec\nabla \Psi_\ell \Big] \Big\} ,$$

где

$$\vec\nabla \Psi_\ell = \sqrt{\beta_\ell(\xi_\ell)}\, \vec\nabla \xi_\ell \, . \tag{3.4}$$

Под суммой в (3.3) можно произвести перестановку индексов. Введя далее обозначения

$$A^\ell \equiv A^{i_1 \dots i_{\ell-1}, 1-i_\ell, i_{\ell+1} \dots i_s} \tag{3.5}$$

и

$$\vec B^{\dots i_\ell \dots} \equiv \vec\nabla A^{\dots i_\ell \dots} + i\kappa \sum_{\ell=1}^{s} A^\ell \beta_\ell^{\frac{1}{2} - i_\ell}(\xi_\ell) \gamma_\ell^{1-2i_\ell}(\xi_\ell) \vec\nabla \Psi_\ell , \tag{3.6}$$

запишем (3.4) в виде

$$\vec\nabla U = \sum_{\dots i_\ell \dots} \frac{B^{\dots i_\ell \dots} \gamma_1^{i_1}(\xi_1) \cdots \gamma_s^{i_s}(\xi_s)}{(i\kappa)^{i_1 + \dots + i_s}} \frac{\partial^{i_1} f_1(\xi_1)}{\partial \xi_1^{i_1}} \cdots \frac{\partial^{i_s} f_s(\xi_s)}{\partial \xi_s^{i_s}} , \tag{3.7}$$

Выражение (3.7) имеет сходную с (I.4) структуру, что облегчает применение оператора $\vec{\nabla}$ вторично. Эта операция приводит к следующему выражению

$$\vec{\nabla}U = \sum_{\cdots i_\ell \cdots} \frac{T^{\cdots i_\ell \cdots}\gamma_1^{i_1}(\xi_1)\cdots\gamma_s^{i_s}(\xi_s)}{(ik)^{i_1+\cdots+i_s}} \frac{\partial^{i_1} f_1(\xi_1)}{\partial \xi_1^{i_1}} \cdots \frac{\partial^{i_s} f_s(\xi_s)}{\partial \xi_s^{i_s}}, \tag{3.8}$$

где

$$T^{\cdots i_\ell \cdots} = \vec{\nabla}\vec{B}^{\cdots i_\ell \cdots} + ik\sum_{\ell=1}^{s} \vec{B}^{\ell}\beta_\ell^{\frac{1}{2}-i_\ell}(\xi_\ell)\gamma_\ell^{1-2i_\ell}(\xi_\ell)\vec{\nabla}\Psi_\ell, \tag{3.9}$$

$$\vec{B}^{\ell} = \vec{B}^{i_1\cdots i_{\ell-1},\,1-i_\ell,\,i_{\ell+1}\cdots i_s}. \tag{3.10}$$

Воспользовавшись (3.8), запишем уравнение Гельмгольца в виде

$$\Delta U + k^2\varepsilon(\vec{z})\mu(\vec{z})U = \sum_{\cdots i_\ell \cdots} \frac{G^{\cdots i_\ell \cdots}\gamma_1^{i_1}(\xi_1)\ldots\gamma_s^{i_s}(\xi_s)}{(ik)^{i_1+\cdots+i_s}} \frac{\partial^{i_1} f_1(\xi_1)}{\partial \xi_1^{i_1}} \cdots \frac{\partial^{i_s} f_s(\xi_s)}{\partial \xi_s^{i_s}} = 0, \tag{3.11}$$

где

$$G^{\cdots i_\ell \cdots} = \Big\{\Delta A^{\cdots i_\ell \cdots} + ik\sum_{\ell=1}^{s}\Big[\big(2\beta_\ell^{\frac{1}{2}-i_\ell}(\xi_\ell)\gamma_\ell^{1-2i_\ell}(\xi_\ell)\vec{\nabla}A^{\ell} +$$

$$+ A^{\ell}\vec{\nabla}\big(\beta_\ell^{\frac{1}{2}-i_\ell}(\xi_\ell)\gamma_\ell^{1-2i_\ell}(\xi_\ell)\big)\vec{\nabla}\Psi_\ell + A^{\ell}\beta_\ell^{\frac{1}{2}-i_\ell}(\xi_\ell)\gamma_\ell^{1-2i_\ell}(\xi_\ell)\Delta\Psi_\ell\Big] -$$

$$-k^2\Big[A^{\cdots i_\ell \cdots}\sum_{\ell=1}^{s}(\vec{\nabla}\Psi_\ell)^2 + \sum_{g=1}^{s}\sum_{h=1}^{s} A^{gh}\beta_h^{\frac{1}{2}-i_h}(\xi_h)\cdot$$

$$\cdot\beta_g^{\frac{1}{2}-i_g}(\xi_g)\gamma_h^{1-2i_h}(\xi_h)\gamma_g^{1-2i_g}(\xi_g)(\vec{\nabla}\Psi_h\vec{\nabla}\Psi_g) - A^{\cdots i_\ell \cdots}\varepsilon(\vec{z})\mu(\vec{z})\Big]\Big\}. \tag{3.12}$$

В (3.I2) введено обозначение

$$A^{gh} \equiv A^{i_1\cdots i_{g-1},\,1-i_g,\,i_{g+1}\cdots i_{h-1},\,1-i_h,\,i_{h+1}\cdots i_s}. \tag{3.13}$$

Уравнение (3.II) удовлетворяется, если

$$G^{\cdots i_\ell \cdots} = 0. \tag{3.14}$$

Если теперь подставить разложение $A^{\cdots i_\ell \cdots}$ по обратным степеням ik в (3.I4) и приравнять множители при одинаковых степенях ik, получим следующую рекуррентную систему уравнений:

$$\Delta A_{n-1}^{\cdots i_\ell \cdots} + \sum_{\ell=1}^{s}\Big\{2\beta_\ell^{\frac{1}{2}-i_\ell}(\xi_\ell)\gamma_\ell^{1-2i_\ell}(\xi_\ell)\vec{\nabla}A_n^{\ell}\vec{\nabla}\Psi_\ell +$$

$$+ A_n^{\ell}\vec{\nabla}\big(\beta_\ell^{\frac{1}{2}-i_\ell}(\xi_\ell)\gamma_\ell^{1-2i_\ell}(\xi_\ell)\big)\vec{\nabla}\Psi_\ell + A_n^{\ell}\beta_\ell^{\frac{1}{2}-i_\ell}(\xi_\ell)\gamma_\ell^{1-2i_\ell}(\xi_\ell)\Delta\Psi_\ell\Big\} = 0; \tag{3.15}$$

$$A_{-1} = 0;$$

$$A_n^{\cdots i_\ell \cdots}\sum_{\ell=1}^{s}(\vec{\nabla}\Psi_\ell)^2 + \sum_{\substack{g=1\\ g\neq h}}^{s}\sum_{h=1}^{s}\Big\{A_n^{gh}\beta_g^{\frac{1}{2}-i_g}(\xi_g)\beta_h^{\frac{1}{2}-i_h}(\xi_h)\cdot$$

$$\cdot\gamma_g^{1-2i_g}(\xi_g)\gamma_h^{1-2i_h}(\xi_h)(\vec{\nabla}\Psi_h\vec{\nabla}\Psi_g)\Big\} - A_{n-1}^{\cdots i_\ell \cdots}\varepsilon(\vec{z})\mu(\vec{z}) = 0. \tag{3.16}$$

Система уравнений (3.I5) последовательно определяет амплитуды $A_n^{\dots i_\ell \dots}$ ($n = 0, I, \dots$), входящие в (I.4) и (I.6), в то время как уравнения (I.I6) определяют аргументы функций ξ_ℓ ($\ell = I, 2, \dots, s$) как функции от пространственных координат в рассматриваемой координатной системе. Найденные из (3.I5) решения типа (I.4), действительно, асимптотически удовлетворяют уравнению Гельмгольца (1,2), что требуется для доказательства утверждения I.

Однако вместо того, чтобы каждый раз решать рекуррентную систему уравнений, сведем определение амплитудных и координатных функций к решению геометрооптических уравнений переноса и эйконалов. Такое рассмотрение позволит также доказать равномерность амплитуд $A_n^{\dots i_\ell \dots}$ в окрестности каустик. Это является содержанием доказательства утверждения 2.

Совершим над системой (3.I6) линейные преобразования и приведем её к эквивалентному виду, не содержащему в явном виде амплитудные функции $A_n^{\dots i_\ell \dots}$. С этой целью разделим правую и левую части уравнений на (I.9), умножим их на $(-I)^{i_1 p_1 + \dots + i_s p_s}$ ($p_\ell = 0, I$; $\ell = I, 2, \dots, s$) и просуммируем по всем индексам $i_1 \dots i_s = 0, I$. В результате получим

$$\sum_{\ell=1}^{s} (\vec{\nabla}\psi_\ell)^2 \sum_{\dots i_\ell \dots} (-1)^{i_1 p_1 + \dots + i_s p_s} \frac{A_n^{\dots i_\ell \dots}}{\chi^{\dots i_\ell \dots}} +$$

$$+ \sum_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^{s} \sum_{h=1}^{s} \sum_{\dots i_\ell \dots} \frac{(-1)^{i_1 p_1 + \dots + i_s p_s} A_n^{gh} (\vec{\nabla}\psi_g \vec{\nabla}\psi_h)}{\chi^{i_1 \dots i_{g-1}, 1-i_g, i_{g+1} \dots i_{h-1}, 1-i_h, i_{h+1} \dots i_s}} - \qquad (3.I7)$$

$$- \varepsilon(\vec{r})\mu(\vec{r}) \sum_{\dots i_\ell \dots} (-1)^{i_1 p_1 + \dots + i_s p_s} \frac{A_n^{\dots i_\ell \dots}}{\chi^{\dots i_\ell \dots}} = 0.$$

В (3.I7) суммирование производится по всем значениям индексов $i_1 \dots i_s$. Можно поэтому поменять порядок суммирования во втором слагаемом левой части по индексам i_g и i_h, т.е. заменить $1-i_g$ на i_g и $1-i_h$ на $i_h (g \neq h)$. Тогда получим уравнение

$$M_n^{\dots p_\ell \dots} \left\{ \sum_{\ell=1}^{s} (\vec{\nabla}\psi_\ell)^2 + \sum_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^{s} \sum_{h=1}^{s} (-1)^{p_g + p_h} (\vec{\nabla}\psi_g \vec{\nabla}\psi_h) \right\} - \varepsilon(\vec{r})\mu(\vec{r}) M_n^{\dots p_\ell \dots} = 0, \qquad (3.I8)$$

в котором теперь фигурируют амплитуды

$$M_n^{\dots p_\ell \dots} = \sum_{\dots i_\ell \dots} (-1)^{\sum_{\ell=1}^{s} i_\ell p_\ell} \frac{A_n^{\dots i_\ell \dots}}{\chi^{\dots i_\ell \dots}} \qquad (3.I9)$$

как линейные комбинации амплитуд $A_n^{\dots i_\ell \dots}$ (I.6). Если амплитуды $M_n^{\dots p_\ell \dots}$ не равны тождественно нулю, из (3.I8) следует уравнение

$$\vec{\gamma}^{\,2}_{\dots p_\ell \dots} = \varepsilon(\vec{r})\mu(\vec{r}), \qquad (3.20)$$

где

$$\vec{\gamma}_{\dots p_\ell \dots} = \sum_{\ell=1}^{s} (-1)^{p_\ell} \vec{\nabla}\psi_\ell \equiv \vec{\nabla}\psi_{\dots p_\ell \dots},$$

$$\psi_{\dots p_\ell \dots} = \sum_{\ell=1}^{s} (-1)^{p_\ell} \int \sqrt{\beta_\ell(\xi_\ell)}\, d\xi_\ell + C_\ell . \qquad (3.2I)$$

В (3.2I) C_ℓ - константа интегрирования. Она может быть определена из дебаевских асимптотик функций $f_\ell(\xi_\ell)$ (см.раздел 2).

Из (3.20) и (3.2I) следуют тождества

$$(\vec{\nabla}\Psi_{p_1\dots p_{\ell-1},\,p_\ell,\,p_{\ell+1}\dots p_s})^2 = (\vec{\nabla}\Psi_{p_1\dots p_{\ell-1},\,1-p_\ell,\,p_{\ell+1}\dots p_s})^2\,,$$

$$(\vec{\nabla}\Psi_{p_1\dots p_{\ell-1},\,p_\ell,\,p_{\ell+1}\dots p_{f-1},\,p_f,\,p_{f+1}\dots p_s})^2 = (\vec{\nabla}\Psi_{p_1\dots p_{\ell-1},\,1-p_\ell,\,p_{\ell+1}\dots p_{f-1},\,1-p_f,\,p_{f+1}\dots p_s})^2.$$

Вычитая эти тождества друг из друга, получаем

$$\vec{\nabla}\xi_\ell\,\vec{\nabla}\xi_f = 0 \qquad \text{если} \qquad f \neq \ell. \qquad \text{(I.IO)}$$

Таким образом, из уравнений (3.20), (3.2I) с необходимостью следует условие ортогональности (I.IO) для координатных функций ξ_ℓ. С другой стороны, так как решаются уравнения распространения волн в реальном трехмерном пространстве, то координаты ξ_ℓ являются реальными функциями от трехмерных простарнственных координат. В таком случае выполнение условия (I.IO) возможно при $s \leqslant 3$, т.е. количество функций $f_\ell(\xi_\ell)$ не должно быть больше мерности пространства.

С учетом (I.IO) уравнения (3.20) - суть уравнения эйконалов. В этих уравнениях неизвестными являются координатные функции ξ_ℓ. Само же уравнение (3.20) устанавливает связь между ними и той пространственной системой координат, в которой записывается в каждом конкретном случае это уравнение.

Покажем теперь, что амплитуды $M_n^{\dots p_\ell \dots}$ являются геометрооптическими амплитудами и удовлетворяют геометрооптическим уравнениям переноса. Обратимся к уравнениям (3.I5). Преобразуем сначала выражение для $\vec{\nabla} A_n^{\dots i_\ell \dots}$:

$$\vec{\nabla} A_n^{\dots i_\ell \dots} = \vec{\nabla}\Big(A_n^{\dots i_\ell \dots}\,\frac{\chi^{\dots i_\ell \dots}}{\chi^{\dots i_\ell \dots}}\Big) = \chi^{\dots i_\ell \dots}\,\vec{\nabla}\,\frac{A^{\dots i_\ell \dots}}{\chi^{\dots i_\ell \dots}} + \frac{A_n^{\dots i_\ell \dots}}{\chi^{\dots i_\ell \dots}}\,\vec{\nabla}\chi^{\dots i_\ell \dots}$$

Разделив затем левую и правую части системы (3.I5) на $\chi^{\dots i_\ell \dots}$, умножив на $(-I)^{p_1 i_1 + \dots + p_s i_s}$ и просуммировав по всем значениям индексов $\dots i_\ell \dots$,получим:

$$\sum_{\dots i_\ell \dots}(-1)^{p_1 i_1+\dots+p_s i_s}\,\frac{\Delta A_{n-1}^{\dots i_\ell \dots}}{\chi^{\dots i_\ell \dots}} - 2\sum_{\ell=1}^{s}\vec{\nabla}\Psi_\ell\,\vec{\nabla}\Big(\sum_{\dots i_\ell \dots}\frac{(-1)^{i_1 p_1+\dots+i_s p_s}A_n^{\dots i_\ell \dots}}{\chi^{i_1\dots i_\ell,\,1-i_\ell,\,i_{\ell+1}\dots i_s}}\Big) +$$

$$+ 2\sum_{\ell=1}^{s}\sum_{\dots i_\ell \dots}\frac{(-1)^{i_1 p_1+\dots+i_s p_s}A_n^{\ell}}{\chi^{i_1\dots i_{\ell-1},\,1-i_\ell,\,i_{\ell+1}\dots i_s}}\big(\vec{\nabla}\ln\chi^{i_1\dots i_\ell,\,1-i_\ell,\,i_{\ell+1}\dots i_s}\big)\vec{\nabla}\Psi_\ell +$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{s}\sum_{\dots i_\ell \dots}\frac{(-1)^{i_1 p_1+\dots+i_s p_s}A_n^{\ell}}{\chi^{i_1\dots i_{\ell-1},\,1-i_\ell,\,i_{\ell+1}\dots i_s}}\left(\frac{\vec{\nabla}\beta_\ell^{\frac{1}{2}-i_\ell}(\xi_\ell)\,\gamma_\ell^{1-2i_\ell}(\xi_\ell)}{\beta_\ell^{\frac{1}{2}-i_\ell}(\xi_\ell)\,\gamma_\ell^{1-2i_\ell}(\xi_\ell)}\right)\vec{\nabla}\Psi_\ell + \qquad (3.22)$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{s}\sum_{\dots i_\ell \dots}\frac{(-1)^{i_1 p_1+\dots+i_s p_s}}{\chi^{i_1\dots i_{\ell-1},\,1-i_\ell,\,i_{\ell+1}\dots i_s}}\,\Delta\Psi_\ell = 0.$$

Так как

$$\vec{\nabla}\ln\chi^{i_1\dots i_s} = \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{s}(-1)^{\ell}\,\frac{[\sqrt{\beta_\ell(\xi_\ell)}\,\gamma_\ell(\xi_\ell)]'}{\sqrt{\beta_\ell(\xi_\ell)}\,\gamma_\ell(\xi_\ell)}\,\vec{\nabla}\xi_\ell\,,$$

$$\frac{\vec{\nabla}\beta_\ell^{\frac{1}{2}-i_\ell}(\xi_\ell)\,\gamma_\ell^{1-2i_\ell}(\xi_\ell)}{\beta_\ell^{\frac{1}{2}-i_\ell}(\xi_\ell)\,\gamma_\ell^{1-2i_\ell}(\xi_\ell)} = (-1)^{\ell}\,\frac{[\sqrt{\beta_\ell(\xi_\ell)}\,\gamma_\ell(\xi_\ell)]'}{\sqrt{\beta_\ell(\xi_\ell)}\,\gamma_\ell(\xi_\ell)}\,\vec{\nabla}\xi_\ell\,,$$

то произведя в суммах перегруппировку слагаемых, из (3.22) получим:

$$2\vec{\gamma}_{\dots p_\ell \dots} \vec{\nabla} M_n^{\dots p_\ell \dots} + M_n^{\dots p_\ell \dots} \vec{\nabla} \vec{\gamma}_{\dots p_\ell \dots} + y_{n-1}^{\dots p_\ell \dots} + \mathcal{F}_n^{\dots p_\ell \dots} = 0 \tag{3.23}$$

Здесь

$$\mathcal{F}_n^{\dots p_\ell \dots} = \sum_{\ell=1}^{s} \frac{\left[\sqrt{\beta_\ell(\xi_\ell)}\, \gamma_\ell(\xi_\ell)\right]'}{\sqrt{\beta_\ell(\xi_\ell)}\, \gamma_\ell(\xi_\ell)} M^{p_1 \dots p_{\ell-1}, 1-p_\ell, p_{\ell+1} \dots p_s} \cdot \left[\vec{\gamma}_{\dots p_\ell \dots} \vec{\nabla} \psi_\ell - (-1)^{p_\ell} (\vec{\nabla} \psi_\ell)^2\right], \tag{3.24}$$

$$y_n^{\dots p_\ell \dots} = \sum (-1)^{\sum_{\ell=1}^{s} i_\ell p_\ell} \frac{\Delta A_n^{\dots i_\ell \dots}}{\chi^{\dots i_\ell \dots}}, \qquad y_{-1}^{\dots p_\ell \dots} = 0. \tag{3.25}$$

Если выполняется условие ортогональности (I.I0) утверждения 2, квадратная скобка в (3.24) обращается в ноль. Таким образом, в ортогональной системе координат $\mathcal{F}_n^{\dots p_\ell \dots} \equiv 0$, и с учетом (3.25) в нулевом приближении уравнение (3.23) запишется как

$$2\vec{\gamma}_{\dots p_\ell \dots} \vec{\nabla} M_0^{\dots p_\ell \dots} + M_0^{\dots p_\ell \dots} \vec{\nabla} \vec{\gamma}_{\dots p_\ell \dots} = 0 \tag{3.26}$$

(3.26) – есть геометрооптическое уравнение переноса, а $M_0^{\dots p_\ell \dots}$ – геометрооптические амплитуды. Действительно, подстановка дебаевских асимптотик функций $f_\ell(\xi_\ell)$ в виде (2.I5) в разложение (I.4) приводит последнее к геометрооптическому виду

$$U = \sum_{\dots p_\ell \dots} M_0^{\dots p_\ell \dots} \exp(ik\Psi_{\dots p_\ell \dots}). \tag{3.27}$$

Таким образом, для построения нулевого приближения решения уравнения Гельмгольца достаточно определить геометрооптическое

решение (3.27), являющееся его асимптотикой. Связь между амплитудами равномерной асимптотики $A_n^{\dots i_\ell \dots}$ и геометрооптической задается (3.I9). Умножив обе части (3.I9) на $(-1)^{j_1 p_1 + \dots + j_s p_s}$ ($j_\ell = 0, 1$; $\ell = 1, \dots, s$), произведя суммирование по всем p_ℓ и учитывая, что

$$\sum_{\dots p_\ell \dots} (-1)^{p_1(j_1 + i_1) + \dots + p_s(j_s + i_s)} = N \delta_{j_1 i_1} \dots \delta_{j_s i_s},$$

приходим к выражению (I.7) утверждения 2. Причем необходимым и достаточным условием отсутствия расходимостей в амплитудах $A_n^{i_1 \dots i_{\ell-1}, 1, i_{\ell+1} \dots i_s}$ является выполнение предельного неравенства

$$\lim_{\xi_\ell \to \tilde{\xi}_\ell} \frac{M_n^{p_1 \dots p_{\ell-1}, 1, p_{\ell+1} \dots p_s} - M_n^{p_1 \dots p_{\ell-1}, 0, p_{\ell+1} \dots p_s}}{\sqrt[4]{\beta_\ell(\xi_\ell)}} < \infty. \tag{3.26}$$

Этим завершается доказательство утверждения 2.

Строгое доказательство равномерности разложений (I.4) в случае, когда $\beta_\ell(\xi_\ell)$ – бесконечно-дифференцируемые функции, будет дано в разделе 4.

Доказательство утверждений I и 2 для уравнений Максвелла. Доказательство утверждений I и 2 для случая электромагнитных волн во многом аналогично их доказательству в приведенном выше случае скалярного уравнения Гельмгольца. Подставив разложения (I.5) в уравнения (I.3), после несложных преобразований получим следующие уравнения относительно амплитуд $\vec{A}^{\dots i_\ell \dots}$ и $\vec{\mathcal{D}}^{\dots i_\ell \dots}$:

$$\sum_{\dots i_\ell \dots} \gamma_1^{i_1}(\xi_1)\cdots\gamma_s^{i_s}(\xi_s)\frac{d^{i_1}f_1(\xi_1)}{d\xi_1^{i_1}}\cdots\frac{d^{i_s}f_s(\xi_s)}{d\xi_s^{i_s}}\;\frac{\vec{F}^{\dots i_\ell\dots}}{(i\kappa)^{i_1+\dots+i_s}}=0,$$

$$\sum_{\dots i_\ell \dots} \gamma_1^{i_1}(\xi_1)\cdots\gamma_s^{i_s}(\xi_s)\frac{d^{i_1}f_1(\xi_1)}{d\xi_1^{i_1}}\cdots\frac{d^{i_s}f_s(\xi_s)}{d\xi_s^{i_s}}\;\frac{\vec{G}^{\dots i_\ell\dots}}{(i\kappa)^{i_1+\dots+i_s}}=0; \tag{3.29}$$

где

$$\vec{F}^{\dots i_\ell\dots} = \mathrm{rot}\,\vec{A}^{\dots i_\ell\dots} - i\kappa\sum_{\ell=1}^{s}[\vec{A}^\ell\vec\nabla\psi_\ell]\,\gamma_\ell^{1-2i_\ell}(\xi_\ell)\,\beta_\ell^{\frac12-i_\ell}(\xi_\ell) - i\kappa\mu(\vec r)\vec{\mathcal D}^{\dots i_\ell\dots},$$

$$\vec{G}^{\dots i_\ell\dots} = \mathrm{rot}\,\vec{\mathcal D}^{\dots i_\ell\dots} - i\kappa\sum_{\ell=1}^{s}[\vec{\mathcal D}^\ell\vec\nabla\psi_\ell]\,\gamma_\ell^{1-2i_\ell}(\xi_\ell)\,\beta_\ell^{\frac12-i_\ell}(\xi_\ell) + i\kappa\varepsilon(\vec r)\vec{A}^{\dots i_\ell\dots}. \tag{3.30}$$

В (3.30) введены обозначения, аналогичные обозначениям (3.5) и (3.10):

$$\vec A^\ell = \vec A^{i_1\dots i_{\ell-1},1-i_\ell,i_{\ell+1}\dots i_s}, \quad \vec{\mathcal D}^\ell = \vec{\mathcal D}^{i_1\dots i_{\ell-1},1-i_\ell,i_{\ell+1}\dots i_s}. \tag{3.31}$$

Равенства (3.29) выполняются, если имеет место

$$\vec F^{i_1\dots i_s}=0; \qquad \vec G^{i_1\dots i_s}=0. \tag{3.32}$$

Подставив в (3.32) амплитудные функции $\vec A^{\dots i_\ell\dots}$, $\vec{\mathcal D}^{\dots i_\ell\dots}$ в виде рядов (I.6) по обратным степеням $i\kappa$ и приравняв к нулю члены, содержащие одинаковые степени $i\kappa$, приходим к системе

уравнений

$$\sum_{\ell=1}^s[\vec A_n^\ell\vec\nabla\psi_\ell]\,\gamma_\ell^{1-2i_\ell}(\xi_\ell)\,\beta_\ell^{\frac12-i_\ell}(\xi_\ell)-\mu(\vec r)\vec{\mathcal D}_n^{\dots i_\ell\dots}=\mathrm{rot}\,\vec A_{n-1}^{\dots i_\ell\dots}, \quad \vec A_{-1}^{\dots i_\ell\dots}=0,$$

$$\sum_{\ell=1}^s[\vec{\mathcal D}_n^\ell\vec\nabla\psi_\ell]\,\gamma_\ell^{1-2i_\ell}(\xi_\ell)\,\beta_\ell^{\frac12-i_\ell}(\xi_\ell)+\varepsilon(\vec r)\vec A_n^{\dots i_\ell\dots}=\mathrm{rot}\,\vec{\mathcal D}_{n-1}^{\dots i_\ell\dots}, \quad \vec{\mathcal D}_{-1}^{\dots i_\ell\dots}=0. \tag{3.33}$$

которая является электромагнитным аналогом уравнений (3.I5) и (3.I6). В силу равенств (3.32) амплитуды $\vec A_n^{\dots i_\ell\dots}$, $\vec{\mathcal D}_n^{\dots i_\ell\dots}$, определяемые последовательно из рекуррентной системы (3.33), асимптотически удовлетворяют уравнениям Максвелла (I.5), что требует для своего доказательства утверждение I.

Однако, как и в скалярном случае, удобнее перейти в системе (3.33) к линейным комбинациям амплитуд $\vec A_n^{\dots i_\ell\dots}$ и $\vec{\mathcal D}_n^{\dots i_\ell\dots}$:

$$\vec M_n^{\dots p_\ell\dots} = \sum_{\dots i_\ell\dots}(-1)^{\sum_{\ell=1}^s i_\ell p_\ell}\frac{\vec A_n^{\dots i_\ell\dots}}{\chi^{\dots i_\ell\dots}}, \quad \vec N_n^{\dots p_\ell\dots}=\sum(-1)^{\sum_{\ell=1}^s i_\ell p_\ell}\frac{\vec{\mathcal D}_n^{\dots i_\ell\dots}}{\chi^{\dots i_\ell\dots}}. \tag{3.34}$$

Разделив обе части уравнений (3.33) на $\chi^{\dots i_\ell\dots}$, умножив на $(-1)^{p_1 i_1+\dots+p_s i_s}$ и просуммировав результат по всем значениям индексов $i_1\dots i_s$, получим систему уравнений относительно амплитуд $\vec M_n^{\dots p_\ell\dots}$, $\vec N_n^{\dots p_\ell\dots}$:

$$[\vec M_n^{\dots p_\ell\dots}\vec\gamma_{\dots p_\ell\dots}]+\mu(\vec r)\vec N_n^{\dots p_\ell\dots}=\vec X_{n-1}^{\dots p_\ell\dots}, \quad [\vec N_n^{\dots p_\ell\dots}\vec\gamma_{\dots p_\ell\dots}]-\varepsilon(\vec r)\vec M_n^{\dots p_\ell\dots}=\vec Y_{n-1}^{\dots p_\ell\dots}. \tag{3.35}$$

Здесь введены обозначения

$$\vec{X}_n^{\dots p_\ell \dots} = \sum_{\dots i_\ell \dots} (-1)^{\sum_{\ell=1}^{s} i_\ell p_\ell} \frac{\mathrm{rot}\, \vec{A}^{\dots i_\ell \dots}}{\chi^{\dots i_\ell \dots}}, \qquad \vec{X}_{-1}^{\dots p_\ell \dots} \equiv 0,$$

$$\vec{Y}_n^{\dots p_\ell \dots} = \sum_{\dots i_\ell \dots} (-1)^{\sum_{\ell=1}^{s} i_\ell p_\ell} \frac{\mathrm{rot}\, \vec{\mathcal{D}}_n^{\dots i_\ell \dots}}{\chi^{\dots i_\ell \dots}}, \qquad \vec{Y}_{-1}^{\dots p_\ell \dots} \equiv 0, \tag{3.36}$$

а $\vec{\gamma}_{\dots p_\ell \dots}$, как и в скалярном случае, определяется формулой (3.2I). В нулевом приближении система (3.35) принимает вид, совпадающий с геометрооптическими уравнениями в этом приближении:

$$[\vec{M}_0^{\dots p_\ell \dots} \vec{\gamma}_{\dots p_\ell \dots}] + \mu(\vec{z}) \vec{N}_0^{\dots p_\ell \dots} = 0, \quad [\vec{N}_0^{\dots p_\ell \dots} \vec{\gamma}_{\dots p_\ell \dots}] - \varepsilon(\vec{z}) \vec{M}_0^{\dots p_\ell \dots} = 0. \tag{3.37}$$

Из системы (3.37) следует, что $\vec{M}_0^{\dots p_\ell \dots}$, $\vec{N}_0^{\dots p_\ell \dots}$, $\vec{\gamma}_{\dots p_\ell \dots}$ взаимно ортогональны. Условие разрешимости однородной системы совпадает с уравнением (3.20). В этом уравнении неизвестными являются лишь координаты ξ_ℓ . Если, как и в скалярном случае, в разложениях (I.5) вместо функций $f_\ell(\xi_\ell)$ подставить их дебаевские асимптотики, определенные в разделе 2, формулы (I.5) преобразятся к лучевой форме

$$\vec{E} = \sum_{\dots p_\ell \dots} \vec{M}_0^{\dots p_\ell \dots} e^{ik\Psi_{\dots p_\ell \dots}}, \qquad \vec{H} = \sum_{\dots p_\ell \dots} \vec{N}_0^{\dots p_\ell \dots} e^{ik\Psi_{\dots p_\ell \dots}}, \tag{3.38}$$

где эйконалы $\Psi_{\dots p_\ell \dots}$, как и в скалярном случае, определены формулами (3.2I). Таким образом, и в электромагнитном случае уравнения эйконалов записываются в виде (3.20).

В электромагнитном случае уравнения относительно геометрооптических амплитуд $\vec{M}_0^{\dots p_\ell \dots}$ и $\vec{N}_0^{\dots p_\ell \dots}$ получаются как условие разрешимости системы (3.35) в первом приближении:

$$[\vec{M}_1^{\dots p_\ell \dots} \vec{\gamma}_{\dots p_\ell \dots}] + \mu(\vec{z}) \vec{N}_1^{\dots p_\ell \dots} = \vec{X}_0^{\dots p_\ell \dots}, \quad [\vec{N}_1^{\dots p_\ell \dots} \vec{\gamma}_{\dots p_\ell \dots}] - \varepsilon(\vec{z}) \vec{M}_1^{\dots p_\ell \dots} = \vec{Y}_0^{\dots p_\ell \dots}. \tag{3.39}$$

Система (3.39), как впрочем, система (3.36), при всех $n>0$ отличается от соответствующих им уравнений геометрической оптики правыми частями. Действительно, после несложных преобразований равенства (3.36) можно переписать в виде

$$\vec{X}_n^{\dots p_\ell \dots} = \mathrm{rot}\, \vec{M}_n^{\dots p_\ell \dots} - \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{s} S_\ell(\xi_\ell) [\vec{M}_n^{p_1 \dots p_{\ell-1}, 1-p_\ell, p_{\ell+1} \dots p_s} \vec{\nabla} \Psi_\ell],$$

$$\vec{Y}_n^{\dots p_\ell \dots} = \mathrm{rot}\, \vec{N}_n^{\dots p_\ell \dots} - \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{s} S_\ell(\xi_\ell) [\vec{N}_n^{p_1 \dots p_{\ell-1}, 1-p_\ell, p_{\ell+1} \dots p_s} \vec{\nabla} \Psi_\ell], \tag{3.40}$$

тогда как в геометрооптическом случае (см.напр., [I2] и т.д.) они имеют вид:

$$\vec{X}_n^{\dots p_\ell \dots} = \mathrm{rot}\, \vec{M}_n^{\dots p_\ell \dots}, \qquad \vec{Y}_n^{\dots p_\ell \dots} = \mathrm{rot}\, \vec{N}_n^{\dots p_\ell \dots}. \tag{3.40a}$$

В (3.40) введено обозначение

$$S_\ell(\xi_\ell) = \frac{[\sqrt{\beta_\ell(\xi_\ell)}\, \gamma_\ell(\xi_\ell)]'}{\sqrt{\beta_\ell(\xi_\ell)}\, \gamma_\ell(\xi_\ell)}. \tag{3.4I}$$

Условием разрешимости системы (3.39) является ортогональность её правой части решениям однородной системы, эрмитово сопряженной с системой (3.37), т.е. решениям системы

$$\varepsilon\vec{e} + [\vec{m}\,\vec{\gamma}_{\dots p_\ell\dots}] = 0\,, \qquad -\mu\vec{m} + [\vec{e}\,\vec{\gamma}_{\dots p_\ell\dots}] = 0\,, \tag{3.42}$$

которая имеет два линейно независимых частных решения

$$\vec{e}_1 = \sqrt{\mu(\vec{z})}\,\vec{e}_{\dots p_\ell\dots}\,, \qquad \vec{e}_2 = \sqrt{\mu(\vec{z})}\,\vec{t}_{\dots p_\ell\dots}\,,$$
$$\vec{m}_1 = \sqrt{\varepsilon(\vec{z})}\,\vec{t}_{\dots p_\ell\dots}\,, \qquad \vec{m}_2 = -\sqrt{\varepsilon(\vec{z})}\,\vec{e}_{\dots p_\ell\dots}\,, \tag{3.43}$$

где $\vec{e}_{\dots p_\ell\dots}$, $\vec{t}_{\dots p_\ell\dots}$ - произвольные единичные векторы, образующие ортогональную тройку с единичным вектором $\dfrac{\vec{\gamma}_{\dots p_\ell\dots}}{\sqrt{\varepsilon(\vec{z})\mu(\vec{z})}}$:

$$[\vec{t}_{\dots p_\ell\dots}\,\vec{e}_{\dots p_\ell\dots}] = \frac{\vec{\gamma}_{\dots p_\ell\dots}}{\sqrt{\varepsilon(\vec{z})\mu(\vec{z})}}\,. \tag{3.44}$$

Условия разрешимости системы (3.39) примут вид

$$\sqrt{\mu(\vec{z})}\,(\vec{Y}_0^{\dots p_\ell\dots}\,\vec{e}_{\dots p_\ell\dots}) + \sqrt{\varepsilon(\vec{z})}\,(\vec{X}_0^{\dots p_\ell\dots}\,\vec{t}_{\dots p_\ell\dots}) = 0\,,$$
$$\sqrt{\mu(\vec{z})}\,(\vec{Y}_0^{\dots p_\ell\dots}\,\vec{t}_{\dots p_\ell\dots}) - \sqrt{\varepsilon(\vec{z})}\,(\vec{X}_0^{\dots p_\ell\dots}\,\vec{e}_{\dots p_\ell\dots}) = 0. \tag{3.45}$$

Как следует из системы (3.37), амплитуды $\vec{M}_0^{\dots p_\ell\dots}$ и $\vec{N}_0^{\dots p_\ell\dots}$ могут быть выражены через единичные векторы $\vec{e}_{\dots p_\ell\dots}$, $\vec{t}_{\dots p_\ell\dots}$ и некоторые скалярные функции $\Phi_0^{\dots p_\ell\dots}$ и $\Psi_0^{\dots p_\ell\dots}$, подлежащие определению, в виде

$$\vec{M}_0^{\dots p_\ell\dots} = \vec{t}_{\dots p_\ell\dots}\,\Phi_0^{\dots p_\ell\dots}\sqrt{\mu(\vec{z})} + \vec{e}_{\dots p_\ell\dots}\,\Psi_0^{\dots p_\ell\dots}\sqrt{\varepsilon(\vec{z})}\,,$$
$$\vec{N}_0^{\dots p_\ell\dots} = \vec{e}_{\dots p_\ell\dots}\,\Phi_0^{\dots p_\ell\dots}\sqrt{\varepsilon(\vec{z})} - \vec{t}_{\dots p_\ell\dots}\,\Psi^{\dots p_\ell\dots}\sqrt{\varepsilon(\vec{z})} \tag{3.46}$$

Подстановка (3.46) в правые части равенства (3.40) при $n = 0$

позволяет записать последние через те же самые величины $\vec{e}_{\dots p_\ell\dots}$, $\vec{t}_{\dots p_\ell\dots}$, $\Phi_0^{\dots p_\ell\dots}$ и $\Psi_0^{\dots p_\ell\dots}$:

$$\begin{aligned}
\vec{X}_0^{\dots p_\ell\dots} = \sqrt{\mu(\vec{z})}\,\Big\{&\Phi_0^{\dots p_\ell\dots}\,\mathrm{rot}\,\vec{t}_{\dots p_\ell\dots} - [\vec{t}_{\dots p_\ell\dots}\,\vec{\nabla}\Phi_0^{\dots p_\ell\dots}] + \\
&+\Psi_0^{\dots p_\ell\dots}\,\mathrm{rot}\,\vec{e}_{\dots p_\ell\dots} - [\vec{e}_{\dots p_\ell\dots}\,\vec{\nabla}\Psi_0^{\dots p_\ell\dots}] - \\
&-\frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{s} S_\ell(\xi_\ell)\,[(\Phi_0^\ell\,\vec{t}_\ell + \Psi_0^\ell\,\vec{e}_\ell)\,\vec{\nabla}\Psi_\ell] - \\
&-[(\vec{t}_{\dots p_\ell\dots}\,\Phi_0^{\dots p_\ell\dots} + \vec{e}_{\dots p_\ell\dots}\,\Psi_0^{\dots p_\ell\dots})\,\vec{\nabla}\sqrt{\mu(\vec{z})}]\Big\}, \\
\vec{Y}_0^{\dots p_\ell\dots} = \sqrt{\varepsilon(\vec{z})}\,\Big\{&\Phi_0^{\dots p_\ell\dots}\,\mathrm{rot}\,\vec{e}_{\dots p_\ell\dots} - [\vec{e}_{\dots p_\ell\dots}\,\vec{\nabla}\Phi_0^{\dots p_\ell\dots}] - \\
&-\Psi_0^{\dots p_\ell\dots}\,\mathrm{rot}\,\vec{t}_{\dots p_\ell\dots} + [\vec{t}_{\dots p_\ell\dots}\,\vec{\nabla}\Psi_0^{\dots p_\ell\dots}] - \\
&-\frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{s} S_\ell(\xi_\ell)\,[(\Phi_0^\ell\,\vec{e}_\ell - \Psi_0^\ell\,\vec{t}_\ell)\,\vec{\nabla}\Psi_\ell] - \\
&-[(\vec{e}_{\dots p_\ell\dots}\,\Phi_0^{\dots p_\ell\dots} - \vec{t}_{\dots p_\ell\dots}\,\Psi_0^{\dots p_\ell\dots})\,\vec{\nabla}\sqrt{\varepsilon(\vec{z})}]\Big\}.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Здесь введены обозначения

$$\Phi_0^\ell = \Phi_0^{p_1\dots p_{\ell-1},1-p_\ell,p_{\ell+1}\dots p_s}\,, \qquad \Psi_0^\ell = \Psi_0^{p_1\dots p_{\ell-1},1-p_\ell,p_{\ell+1}\dots p_s}\,,$$
$$\vec{t}_\ell = \vec{t}_{p_1\dots p_{\ell-1},1-p_\ell,p_{\ell+1}\dots p_s}\,, \qquad \vec{e}_\ell = \vec{e}_{p_1\dots p_{\ell-1},1-p_\ell,p_{\ell+1}\dots p_s}\,. \tag{3.48}$$

Сообразуясь с (3.45) и (3.47), получим уравнения для скалярных функций $\Phi_0^{\dots p_\ell\dots}$ и $\Psi_0^{\dots p_\ell\dots}$:

$$2\vec{\gamma}_{\dots p_\ell\dots}\vec{\nabla}\Psi_0^{\dots p_\ell\dots} + \Psi_0^{\dots p_\ell\dots}\vec{\nabla}\vec{\gamma}_{\dots p_\ell\dots} - \frac{2\sqrt{\varepsilon(\vec{z})\mu(\vec{z})}}{T_{\dots p_\ell\dots}}\Phi_0^{\dots p_\ell\dots} + \sqrt{\varepsilon(\vec{z})\mu(\vec{z})}\,\frac{H_{\dots p_\ell\dots}}{2} = 0, \tag{3.49}$$

$$2\vec{\gamma}_{\dots p_\ell\dots}\nabla\Phi_0^{\dots p_\ell\dots} + \Phi_0^{\dots p_\ell\dots}\vec{\nabla}\vec{\gamma}_{\dots p_\ell\dots} + \frac{2\sqrt{\varepsilon(\vec{z})\mu(\vec{z})}}{T_{\dots p_\ell\dots}}\Psi_0^{\dots p_\ell\dots} + \sqrt{\varepsilon(\vec{z})\mu(\vec{z})}\,\frac{\tilde{\vec{H}}_{\dots p_\ell\dots}}{2} = 0,$$

где

$$\frac{2}{T_{\dots p_\ell \dots}} = \vec{\ell}_{\dots p_\ell \dots} \operatorname{rot} \vec{\ell}_{\dots p_\ell \dots} + \vec{t}_{\dots p_\ell \dots} \operatorname{rot} \vec{t}_{\dots p_\ell \dots} \;,$$

$$H_{\dots p_\ell \dots} = \sum_{\ell=1}^{s} S_\ell(\xi_\ell)\Big(\Phi_0^\ell \overset{\rightleftarrows}{W}{}^{\dots p_\ell \dots}_{p_1 \dots p_{\ell-1}, 1-p_\ell, p_{\ell+1} \dots p_s} - \Psi_0^\ell \vec{W}{}^{\dots p_\ell \dots}_{p_1 \dots p_{\ell-1}, 1-p_\ell, p_{\ell+1} \dots p_s}\Big) \vec{\nabla} \Psi_\ell \;, \qquad (3.5I)$$

$$\tilde{H}_{\dots p_\ell \dots} = \sum_{\ell=1}^{s} S_\ell(\xi_\ell)\Big(\Phi_0^\ell \vec{W}{}^{\dots p_\ell \dots}_{p_1 \dots p_{\ell-1}, 1-p_\ell, p_{\ell+1} \dots p_s} + \Psi_0^\ell \overset{\rightleftarrows}{W}{}^{\dots p_\ell \dots}_{p_1 \dots p_{\ell-1}, 1-p_\ell, p_{\ell+1} \dots p_s}\Big) \vec{\nabla} \Psi_\ell \;,$$

и где , в свою очередь,

$$\vec{W}{}^{\alpha_1 \dots \alpha_s}_{\beta_1 \dots \beta_s} = [\vec{\ell}_{\alpha_1 \dots \alpha_s} \vec{t}_{\beta_1 \dots \beta_s}] - [\vec{t}_{\alpha_1 \dots \alpha_s} \vec{\ell}_{\beta_1 \dots \beta_s}] \;,$$

$$\overset{\rightleftarrows}{W}{}^{\alpha_1 \dots \alpha_s}_{\beta_1 \dots \beta_s} = [\vec{\ell}_{\alpha_1 \dots \alpha_s} \vec{\ell}_{\beta_1 \dots \beta_s}] - [\vec{t}_{\alpha_1 \dots \alpha_s} \vec{t}_{\beta_1 \dots \beta_s}] \,. \qquad (3.52)$$

Докажем , что при выполнении условий ортогональности (I.IO)

$$\vec{W}{}^{\dots p_\ell \dots}_{p_1 \dots p_{\ell-1}, 1-p_\ell, p_{\ell+1} \dots p_s} \vec{\nabla} \Psi_\ell = 0 \;, \qquad \overset{\rightleftarrows}{W}{}^{\dots p_\ell \dots}_{p_1 \dots p_{\ell-1}, 1-p_\ell, p_{\ell+1} \dots p_s} \vec{\nabla} \Psi_\ell = 0 \,. \qquad (3.53)$$

Исходим из очевидных тождеств, вытекающих из определения (3.44):

$$\vec{\ell}_{\dots p_\ell \dots} \operatorname{rot} \vec{t}_{\dots p_\ell \dots} - \vec{t}_{\dots p_\ell \dots} \operatorname{rot} \vec{\ell}_{\dots p_\ell \dots} = \operatorname{div} \frac{\vec{\gamma}_{\dots p_\ell \dots}}{\sqrt{\varepsilon(\vec{r})\mu(\vec{r})}} \;,$$

$$\sqrt{\varepsilon(\vec{r})\mu(\vec{r})}\, \vec{\ell}_{\dots p_\ell \dots} = [\vec{t}_{\dots p_\ell \dots} \vec{\gamma}_{\dots p_\ell \dots}] \,, \quad \sqrt{\varepsilon(\vec{r})\mu(\vec{r})}\, \vec{t}_{\dots p_\ell \dots} = [\vec{\gamma}_{\dots p_\ell \dots} \vec{\ell}_{\dots p_\ell \dots}] ; \qquad (3.54)$$

$$\vec{t}_{\dots p_\ell \dots} \vec{\gamma}_{\dots p_\ell \dots} = 0 \,, \qquad \vec{\ell}_{\dots p_\ell \dots} \vec{t}_{\dots p_\ell \dots} = 0 \;, \qquad \vec{\ell}_{\dots p_\ell \dots} \vec{\gamma}_{\dots p_\ell \dots} = 0 \,. \qquad (3.55)$$

Опустив для краткости все индексы в выражениях (3.52), кроме нижних индексов $1-p_\ell$, p_ℓ , запишем выражения для $\vec{W}_{1-p_\ell}$ и $\overset{\rightleftarrows}{W}_{1-p_\ell}$ используя тождества (3.55):

$$\vec{W}_{1-p_\ell} = \frac{[[\vec{t}_{p_\ell} \vec{\gamma}_{p_\ell}] \vec{t}_{1-p_\ell}] - [\vec{t}_{p_\ell} [\vec{t}_{1-p_\ell} \vec{\gamma}_{1-p_\ell}]]}{\sqrt{\varepsilon(\vec{r})\mu(\vec{r})}} \;,$$

$$\overset{\rightleftarrows}{W}_{1-p_\ell} = \frac{[\vec{\ell}_{p_\ell} [\vec{t}_{1-p_\ell} \vec{\gamma}_{1-p_\ell}]] + [[\vec{\gamma}_{p_\ell} \vec{\ell}_{p_\ell}] \vec{t}_{1-p_\ell}]}{\sqrt{\varepsilon(\vec{r})\mu(\vec{r})}} \,. \qquad (3.56)$$

Раскрыв в (3.56) двойные векторные произведения

$$\vec{W}_{1-p_\ell} = \frac{-\vec{t}_{p_\ell}(\vec{t}_{1-p_\ell} \vec{\gamma}_{p_\ell}) + \vec{\gamma}_{p_\ell}(\vec{t}_{p_\ell} \vec{t}_{1-p_\ell}) - \vec{t}_{1-p_\ell}(\vec{t}_{p_\ell} \vec{\gamma}_{1-p_\ell}) + \vec{\gamma}_{1-p_\ell}(\vec{t}_{p_\ell} \vec{t}_{1-p_\ell})}{\sqrt{\varepsilon(\vec{r})\mu(\vec{r})}} \;,$$

$$\overset{\rightleftarrows}{W}_{1-p_\ell} = \frac{\vec{t}_{1-p_\ell}(\vec{\ell}_{p_\ell} \vec{\gamma}_{1-p_\ell}) - \vec{\gamma}_{1-p_\ell}(\vec{\ell}_{p_\ell} \vec{t}_{1-p_\ell}) - \vec{\gamma}_{p_\ell}(\vec{\ell}_{p_\ell} \vec{t}_{1-p_\ell}) + \vec{\ell}_{p_\ell}(\vec{t}_{1-p_\ell} \vec{\gamma}_{p_\ell})}{\sqrt{\varepsilon(\vec{r})\mu(\vec{r})}}$$

и заметив, что

$$\vec{\gamma}_{p_\ell} - \vec{\gamma}_{1-p_\ell} = 2(-1)^{p_\ell} \vec{\nabla} \Psi_\ell \;, \qquad \vec{\gamma}_{p_\ell} + \vec{\gamma}_{1-p_\ell} = 2 \sum_{\substack{f=1 \\ f \neq \ell}}^{s} (-1)^{p_f} \vec{\nabla} \Psi_f \;, \qquad (3.57)$$

а также использовав тождества, полученные из (3.55) и (3.57)

$$\vec{t}_{p_\ell} \vec{\gamma}_{p_\ell} = 2(-1)^{p_\ell} (\vec{\nabla} \Psi_\ell \vec{t}_{1-p_\ell}) \;, \qquad \vec{t}_{p_\ell} \vec{\gamma}_{1-p_\ell} = -2(-1)^{p_\ell} (\vec{\nabla} \Psi_\ell \vec{t}_{p_\ell}) \,,$$

$$\vec{\ell}_{p_\ell} \vec{\gamma}_{1-p_\ell} = -2(-1)^{p_\ell} (\vec{\nabla} \Psi_\ell \vec{\ell}_{p_\ell}) \,,$$

получим

$$\vec{W}_{1-p_\ell} = \frac{2(-1)^{p_\ell} [-\vec{t}_{p_\ell}(\vec{\nabla} \Psi_\ell \vec{t}_{1-p_\ell}) + (\vec{\nabla} \Psi_\ell \vec{t}_{p_\ell}) \vec{\ell}_{1-p_\ell}] + 2(\vec{t}_{p_\ell} \vec{t}_{1-p_\ell}) \sum_{f=1 (f \neq \ell)}^{s} (-1)^{p_f} \vec{\nabla} \Psi_f}{\sqrt{\varepsilon(\vec{r})\mu(\vec{r})}} \;,$$

$$\vec{\widetilde{W}}_{1-p_\ell}=\frac{2(-1)^{p_\ell}\left[-\vec{t}_{1-p_\ell}(\vec{\nabla}\psi_\ell\vec{\ell}_{p_\ell})+(\vec{\nabla}\psi_\ell\vec{t}_{1-p_\ell})\vec{\ell}_{p_\ell}\right]-2(\vec{t}_{1-p_\ell}\vec{\ell}_{p_\ell})\sum\limits_{f=1(f\neq\ell)}^{s}(-1)^{p_f}\vec{\nabla}\psi_f}{\sqrt{\varepsilon(\vec{r})\mu(\vec{r})}}.$$

Так как

$$-\vec{t}_{p_\ell}(\vec{\nabla}\psi_\ell\vec{t}_{1-p_\ell})+\vec{t}_{1-p_\ell}(\vec{\nabla}\psi_\ell\vec{t}_{p_\ell})=-\left[\vec{\nabla}\psi_\ell\left[\vec{t}_{p_\ell}\vec{t}_{1-p_\ell}\right]\right],$$

$$-\vec{t}_{1-p_\ell}(\vec{\nabla}\psi_\ell\vec{\ell}_{p_\ell})+\vec{\ell}_{p_\ell}(\vec{\nabla}\psi_\ell\vec{t}_{1-p_\ell})=\left[\vec{\nabla}\psi_\ell\left[\vec{\ell}_{p_\ell}\vec{t}_{1-p_\ell}\right]\right],$$

равенства (3.56) окончательно переписываются в виде

$$\vec{W}_{1-p_\ell}=\frac{2(-1)^{p_\ell}\left[\vec{\nabla}\psi_\ell\left[\vec{t}_{p_\ell}\vec{t}_{1-p_\ell}\right]\right]+2(\vec{t}_{p_\ell}\vec{t}_{1-p_\ell})\sum\limits_{f=1(f\neq\ell)}^{s}(-1)^{f}\vec{\nabla}\psi_f}{\sqrt{\varepsilon(\vec{r})\mu(\vec{r})}},$$

$$\vec{\widetilde{W}}_{1-p_\ell}=\frac{2(-1)^{p_\ell}\left[\vec{\nabla}\psi_\ell\left[\vec{\ell}_{p_\ell}\vec{t}_{1-p_\ell}\right]\right]-2(\vec{t}_{1-p_\ell}\vec{\ell}_{p_\ell})\sum\limits_{f=1(f\neq\ell)}^{s}(-1)^{f}\vec{\nabla}\psi_f}{\sqrt{\varepsilon(\vec{r})\mu(\vec{r})}} \qquad (3.58)$$

из которых при выполнении условий (I.IO) с очевидностью следует выполнение векторных тождеств (3.53)

Выполнение тождеств (3.53) означает, что последние члены $H_{\dots p_\ell \dots}$ и $\widetilde{H}_{\dots p_\ell \dots}$ в уравнениях (3.49) тождественно обращаются в ноль, а сами эти уравнения переходят в геометрооптические уравнения переноса

$$2\vec{\gamma}_{\dots p_\ell \dots}\vec{\nabla}\psi_o^{\dots p_\ell \dots}+\psi_o^{\dots p_\ell \dots}\vec{\nabla}\vec{\gamma}_{\dots p_\ell \dots}-\frac{2\sqrt{\varepsilon(\vec{r})\mu(\vec{r})}}{T_{\dots p_\ell \dots}}\phi_o^{\dots p_\ell \dots}=0,$$

$$2\vec{\gamma}_{\dots p_\ell \dots}\vec{\nabla}\varsigma_o^{\dots p_\ell \dots}+\phi_o^{\dots p_\ell \dots}\vec{\nabla}\vec{\gamma}_{\dots p_\ell \dots}+\frac{2\sqrt{\varepsilon(\vec{r})\mu(\vec{r})}}{T_{\dots p_\ell \dots}}\psi_o^{\dots p_\ell \dots}=0. \qquad (3.59)$$

Уравнения (3.59) являются электромагнитным аналогом уравнений (3.26) и совместно с уравнением эйконала (3.20) описывают геометрооптическое поле (3.36), являющееся асимптотикой выражения для полей (I.5). Связь между амплитудами равномерной асимптотики $\vec{A}_n^{\dots i_\ell \dots}$, $\vec{\mathcal{D}}_n^{\dots i_\ell \dots}$ и геометрооптической задается равенствами (3.34). Умножив обе части (3.34) на $(-I)^{j_1 p_1+\dots+j_s p_s}$ ($j_\ell = 0, I$; $\ell = I,\dots,s$) и произведя суммирование по всем p_ℓ, совершенно аналогично скалярному случаю, приходим к выражениям (I.7) утверждения 2, причем необходимым и достаточным условием отсутствия расходимостей амплитуд $\vec{A}^{i_1\dots i_{\ell-1},1,i_{\ell+1}\dots i_s}$ и $\vec{\mathcal{D}}^{i_1\dots i_{\ell-1},1,i_{\ell+1}\dots i_s}$ на каустических поверхностях ($\beta_\ell(\xi_\ell) = 0$) являются следующие предельные неравенства

$$\lim_{\xi_\ell\to\tilde{\xi}_\ell}\frac{\vec{M}_o^{p_1\dots p_{\ell-1},1,p_{\ell+1}\dots p_s}-\vec{M}_o^{p_1\dots p_{\ell-1},0,p_{\ell+1}\dots p_s}}{\sqrt[4]{\beta_\ell(\xi_\ell)}}<\infty,$$

$$\lim_{\xi_\ell\to\tilde{\xi}_\ell}\frac{\vec{N}_o^{p_1\dots p_{\ell-1},1,p_{\ell+1}\dots p_s}-\vec{N}_o^{p_1\dots p_{\ell-1},0,p_{\ell+1}\dots p_s}}{\sqrt[4]{\beta_\ell(\xi_\ell)}}<\infty. \qquad (3.60)$$

Утверждения I и 2 доказаны и для электромагнитного случая. Строгое доказательство неравенств (3.60) приводится в следующем разделе.

4. Решение уравнений переноса и строгое доказательство равномерности асимптотических разложений

Как и следует ожидать, доказательства равномерности асимптотических разложений (I.4) и (I.5), т.е. конечность амплтуд $\vec{A}^{\dots i_\ell \dots}$

и $\vec{A}^{\dots i_\ell \dots}$, $\vec{\mathcal{D}}^{\dots i_\ell \dots}$ на каустических поверхностях $\xi_\ell = \tilde{\xi}_\ell (\beta_\ell(\xi_\ell) = 0)$ имеют общий характер. Существенная разница между случаями скалярного уравнения Гельмгольца (3.2) и уравнениями Максвелла (3.60) заключается в наличии у последних свойства поляризации приводящего к дополнительным требованиям, вытекающим, однако, из тех же предельных неравенств (3.60).

Проследим сначала за решением уравнения (3.26), для чего перепишем его в виде

$$\operatorname{div}\left\{ (M_0^{\dots p_\ell \dots})^2 \vec{\gamma}_{\dots p_\ell \dots} \right\} = 0 . \qquad (4.1)$$

В ортогональной системе координат $\xi_1 \dots \xi_s$ уравнение (4.I) запишется в виде

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi_\ell} \left\{ (M_0^{\dots p_\ell \dots})^2 \sqrt{g}\, g^{\ell\ell} \sqrt{\beta_\ell(\xi_\ell)} \right\} = 0, \qquad (4.2)$$

где по повторяющимся индексам ℓ подразумевается суммирование. Входящие в (4.2) обозначения следующие

$$g_{ij} = 0, \text{ когда } i \neq j;\ g_{ii} = h_i^2,\ g^{ii} = \frac{1}{h_i^2}, \qquad (4.3)$$

где h_i - коэффициенты Ламе, и

$$g = h_i^2 \dots h_s^2 \qquad (4.4)$$

Решение уравнения (4.2) записывается в виде

$$M_0^{\dots p_\ell \dots} = \frac{C_{\dots p_\ell \dots} \sqrt{F_{\dots p_\ell \dots}(\xi_1 \dots \xi_s)}}{\sqrt{\beta_1(\xi_1) \dots \beta_s(\xi_s)}\ \sqrt{g}}, \qquad (4.5)$$

где функция $F_{\dots p_\ell \dots}(\xi_1 \dots \xi_s)$ удовлетворяет уравнению

$$\sum_{\ell=1}^{s} (-1)^{p_\ell} \sqrt{\beta_\ell(\xi_\ell)}\, \frac{\partial}{\partial \xi_\ell} \left(g^{\ell\ell} F_{\dots p_\ell \dots}(\xi_1 \dots \xi_s) \right) = 0. \qquad (4.6)$$

В правой части равенства (4.5) $C_{\dots p_\ell \dots}$ - константы, параметрически зависящие от индексов $p_1 \dots p_s$.

Амплитуды $M_0^{\dots p_\ell \dots}$ (4.5), являясь геометрооптическими, расходятся при $\beta_\ell(\tilde{\xi}_\ell) = 0$. Уравнение $\xi_\ell = \tilde{\xi}_\ell$ определяет каустическую поверхность (см. 2), где лучевая трактовка геометрооптического поля (3.27) теряет смысл.

Перейдем теперь к решению уравнений (3.59), выведенных для электромагнитного поля. Если ввести линейные комбинации функций $\Psi_0^{\dots p_\ell \dots}$ и $\Phi_0^{\dots p_\ell \dots}$ вида

$$\Lambda_0^{\dots p_\ell \dots} = \Phi_0^{\dots p_\ell \dots} + i \Psi_0^{\dots p_\ell \dots}, \quad \tilde{\Lambda}_0^{\dots p_\ell \dots} = \Phi_0^{\dots p_\ell \dots} - i \Psi_0^{\dots p_\ell \dots}, \qquad (4.7)$$

то из уравнений (3.59) получатся уравнения

$$\begin{aligned} &\Lambda_0^{\dots p_\ell \dots} \vec{\nabla} \vec{\gamma}_{\dots p_\ell \dots} + 2 \vec{\gamma}_{\dots p_\ell \dots} \vec{\nabla} \Lambda_0^{\dots p_\ell \dots} - i \frac{2\sqrt{\varepsilon(\vec{z})\mu(\vec{z})}}{T_{\dots p_\ell \dots}} \Lambda_0^{\dots p_\ell \dots} = 0, \\ &\tilde{\Lambda}_0^{\dots p_\ell \dots} \vec{\nabla} \vec{\gamma}_{\dots p_\ell \dots} + 2 \vec{\gamma}_{\dots p_\ell \dots} \vec{\nabla} \tilde{\Lambda}_0^{\dots p_\ell \dots} + i \frac{2\sqrt{\varepsilon(\vec{z})\mu(\vec{z})}}{T_{\dots p_\ell \dots}} \tilde{\Lambda}_0^{\dots p_\ell \dots} = 0. \end{aligned} \qquad (4.8)$$

Записав выражения (4.7) в виде

$$\Lambda_0^{\dots p_\ell \dots} = \left| \Lambda_0^{\dots p_\ell \dots} \right| e^{i\alpha_{\dots p_\ell}}, \quad \tilde{\Lambda}_0 = \left| \Lambda_0^{\dots p_\ell \dots} \right| e^{-i\alpha_{\dots p_\ell \dots}}, \qquad (4.9)$$

где

$$\left| \Lambda_0^{\dots p_\ell \dots} \right| = \sqrt{(\Phi_0^{\dots p_\ell \dots})^2 + (\Psi_0^{\dots p_\ell \dots})^2}, \quad \alpha_{\dots p_\ell \dots} = \operatorname{arctg} \frac{\Psi_0^{\dots p_\ell \dots}}{\Phi_0^{\dots p_\ell \dots}}, \qquad (4.10)$$

сведем систему (4.8) окончательно к системе

$$|\Lambda_0^{\dots p_\ell \dots}| \vec{\nabla} \vec{\gamma}_{\dots p_\ell \dots} + 2\vec{\gamma}_{\dots p_\ell \dots} \vec{\nabla} |\Lambda_0^{\dots p_\ell \dots}| = 0, \qquad (4.11)$$

$$\vec{\gamma}_{\dots p_\ell \dots} \vec{\nabla} \alpha_{\dots p_\ell \dots} - \frac{\sqrt{\varepsilon(\vec{r})\mu(\vec{r})}}{T_{\dots p_\ell \dots}} = 0 . \qquad (4.12)$$

Уравнение (4.12) можно проинтегрировать вдоль траектории луча

$$\alpha_{\dots p_\ell \dots} = \int \frac{dS_{\dots p_\ell \dots}}{T_{\dots p_\ell \dots}} , \qquad (4.13)$$

где $dS_{\dots p_\ell \dots}$ - элемент длины луча, а уравнение (4.11) совпадает с уравнением (4.2) и имеет решение (4.5) с условием (4.6). Как и в скалярном случае, уравнение $\beta_\ell(\tilde{\xi}_\ell) = 0$ определяет каустическую поверхность лучей геометрооптического поля (3.38).

Мы установили, что решения уравнений переносов (3.26) и (3.59) в виде (4.5) расходятся на каустиках $\xi_\ell = \tilde{\xi}_\ell$. Как следует из выражений (1.7) утверждения 2, амплитуды

$$\vec{A}^{i_1 \dots i_{\ell-1}, 1, i_{\ell+1} \dots i_s}, \quad \vec{D}^{i_1 \dots i_{\ell-1}, 1, i_{\ell+1} \dots i_s}, \quad A^{i_1 \dots i_{\ell-1}, 1, i_{\ell+1} \dots i_s}$$

также могут иметь расходимости при $\beta_\ell(\tilde{\xi}_\ell) = 0$. Они, однако, остаются конечными, если выполняются предельные неравенства (3.28) для скалярного поля и (3.60) - для электромагнитного.

С учетом (4.5) эти условия сводятся к неравенству

$$C_{p_1 \dots p_{\ell-1}, 1, p_{\ell+1} \dots p_s} = C_{p_1 \dots p_{\ell-1}, 0, p_{\ell+1} \dots p_s} , \qquad (4.14)$$

которое означает, что

$$C_{p_1 \dots p_s} = \mathrm{const} \qquad (4.15)$$

и должно выполняться предельное неравенство

$$\lim_{\xi \to \tilde{\xi}_\ell} \frac{\sqrt{F_{p_1 \dots p_{\ell-1}, 1, p_{\ell+1} \dots p_s}(\xi_1 \dots \xi_s) - F_{p_1 \dots p_{\ell-1}, 0, p_{\ell+1} \dots p_s}(\xi_1 \dots \xi_s)}}{\sqrt{\beta_\ell(\xi_\ell)}} < \infty ; \qquad (4.16)$$

В электромагнитном случае к условиям (4.15) и (4.16) добавляются условия

$$\alpha_{p_1 \dots p_{\ell-1}, 1, p_{\ell+1} \dots p_s} = \alpha_{p_1 \dots p_{\ell-1}, 0, p_{\ell+1} \dots p_s} \quad \text{при} \quad \xi_\ell = \tilde{\xi}_\ell , \qquad (4.17)$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{\ell}_{p_1 \dots p_{\ell-1}, 1, p_{\ell+1} \dots p_s} &= \vec{\ell}_{p_1 \dots p_{\ell-1}, 0, p_{\ell+1} \dots p_s} \quad \text{при} \quad \xi_\ell = \tilde{\xi}_\ell \\ \vec{t}_{p_1 \dots p_{\ell-1}, 1, p_{\ell+1} \dots p_s} &= \vec{t}_{p_1 \dots p_{\ell-1}, 0, p_{\ell+1} \dots p_s} \quad \text{при} \quad \xi_\ell = \tilde{\xi}_\ell \end{aligned}\right\} . \qquad (4.18)$$

Выполнение условия (4.17) связано с выбором начала отсчета угла кручения на каустике, а выполнение условий (4.18) - выбором в качестве ортов $\vec{t}_{\dots p_\ell \dots}$ и $\vec{\ell}_{\dots p_\ell \dots}$ - векторов нормали и бинормали к лучу $\vec{\gamma}_{\dots p_\ell \dots}/\sqrt{\varepsilon(\vec{r})\mu(\vec{r})}$. Поскольку на каустике идущий к ней луч, которому соответствует вектор $\vec{\gamma}_{p_1 \dots p_{\ell-1}, 1, p_{\ell+1} \dots p_s}$, и луч, исходящий из нее ($\vec{\gamma}_{p_1 \dots p_{\ell-1}, 0, p_{\ell+1} \dots p_s}$), совпадают, то совпадают и орты главных кривизн этих лучей.

Условия (4.15), (4.17) и (4.18) обеспечивают непрерывность геометрооптических амплитуд при переходе через каустическую поверхность $\xi_\ell = \tilde{\xi}_\ell$ и тем самым обеспечивают равномерное описание полей. Условие же (4.16) обеспечивает конечность амплитуд асимптотических разложений (1.4) и (1.6) на каустиках. В этом смысле условие (4.16) является необходимым условием равномерности разложений (1.4) или (1.6).

Нам необходимо доказать следующее утверждение: предельное неравенство (4.I6) выполняется, если функции $\beta_\ell(\xi_\ell)$ бесконечно дифференцируемы в окрестности каустик $\xi_\ell=\tilde{\xi}_\ell$ $(\beta_\ell(\tilde{\xi}_\ell)=0)$ (см. утверждение I).

Покажем, что предельное неравенство (4.I6) выполняется, если существует решение уравнения (4.6) в окрестности каустики $\xi_\ell=\tilde{\xi}_\ell$, имеющее форму

$$F_{\dots p_\ell \dots}(\xi_1 \dots \xi_s) = f^1_{p_1 \dots p_{\ell-1}, p_{\ell+1} \dots p_s} + f^2_{\dots p_\ell \dots} \sqrt{\beta_\ell(\xi_\ell)} + O\left[(\beta_\ell(\xi_\ell))^{3/2}\right], \quad (4.19)$$

причем функции f^1 и f^2 не имеют особенностей при $\xi_\ell=\tilde{\xi}_\ell$.

Ограничимся случаем, когда функции $\beta_\ell(\xi_\ell)$ (бесконечно дифференцируемые) разлагаются в ряд Тейлора по координате ξ_ℓ в окрестности каустики $\xi_\ell=\tilde{\xi}_\ell$. В этом случае в окрестности этой точки функции $\beta_\ell(\xi_\ell)$ можно аппроксимировать

$$\beta_\ell(\xi_\ell) = \varkappa_f(\xi_\ell-\tilde{\xi}_\ell)^f. \quad (4.20)$$

Здесь f - целое число - порядок первой, отличной от нуля в точке $\xi_\ell=\tilde{\xi}_\ell$, производной функций $\beta_\ell(\xi_\ell)$:

$$\varkappa_f = \frac{1}{f!}\left.\frac{\partial^f \beta_\ell(\xi_\ell)}{\partial \xi_\ell^f}\right|_{\xi_\ell=\tilde{\xi}_\ell} \quad (4.21)$$

Уравнение (4.6) запишется теперь в виде

$$(-1)^{p_\ell}\sqrt{\varkappa_f}(\xi_\ell-\tilde{\xi}_\ell)^{\frac{f}{2}}\frac{\partial}{\partial \xi_\ell}\frac{F_{\dots p_\ell \dots}(\xi_1\dots\xi_s)}{h_\ell^2} + \hat{\Lambda}_{\ell'} F_{\dots p_\ell \dots}(\xi_1\dots\xi_s)=0. \quad (4.22)$$

В уравнении (4.22) оператор $\hat{\Lambda}_{\ell'}$ имеет вид:

$$\hat{\Lambda}_{\ell'} = \sum_{\substack{\ell'=1 \\ \ell'\neq\ell}}^{s} (-1)^{p_{\ell'}}\sqrt{\beta_{\ell'}(\xi_{\ell'})}\frac{\partial}{\partial \xi_{\ell'}}\frac{1}{h_{\ell'}^2}.$$

Пренебрегая первым членом в левой части уравнения (4.22) при $\xi_\ell \to \tilde{\xi}_{\ell'}$, получаем уравнение

$$\hat{\Lambda} F_{\dots p_\ell \dots}(\xi_1\dots\xi_s)=0. \quad (4.23)$$

Это означает, что функция $F_{\dots p_\ell \dots}(\xi_1\dots\xi_s)$ в указанном приближении в окрестности точки $\xi_\ell=\tilde{\xi}_\ell$ не содержит особенностей в этой точке (мы не рассматриваем случай, когда один или несколько коэффициентов Ламе имеют особенности в этой точке), а зависимость функции $F_{\dots p_\ell \dots}(\xi_1\dots\xi_s)$ (4.I9) от индекса p_ℓ в окрестности $\xi_\ell=\tilde{\xi}_\ell$ в том же приближении выражается в виде постоянного множителя, который с учетом условия (4.I6) можно положить равным единице.

Из сказанного следует, что функция $F_{\dots p_\ell \dots}(\xi_1\dots\xi_s)$ в окрестности точки $\xi_\ell=\tilde{\xi}_\ell$ содержит разность $\xi_\ell-\tilde{\xi}_\ell$ в виде малого параметра, т.е. члены, содержащие разность $\xi_\ell-\tilde{\xi}_\ell$, входят в решение в виде малой поправки, поэтому ищем решение уравнения (4.22) в окрестности точки $\xi_\ell=\tilde{\xi}_\ell$ в виде ряда

$$F_{\dots p_\ell \dots} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{\dots p_\ell \dots}(\xi_\ell-\tilde{\xi}_\ell)^{k/2}, \qquad a_0^{\dots p_\ell \dots} \neq 0, \quad (4.24)$$

где коэффициенты $a_k^{\dots p_\ell \dots}$, являющиеся функциями ξ_ℓ, подлежат определению. Подстановка выражений (4.24) в уравнение (4.22) и приравнивание к нулю множителей перед одинаковыми степенями

$(\xi_\ell - \tilde{\xi}_\ell)^{\kappa/2}$ приводят к следующей рекуррентной системе уравнений относительно коэффициентов $a_\kappa^{\dots p_\ell \dots}$:

$$(-1)^{p_\ell}\sqrt{x_f}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi_\ell}\,\frac{a_{\kappa-f}^{\dots p_\ell\dots}}{h_\ell^2} + a_{\kappa-f+2}\,\frac{\kappa-f+2}{2h_\ell^2}\right\} + \hat{\Lambda}_\ell a_\kappa^{\dots p_\ell\dots} = 0, \qquad (4.25)$$

$$a_m^{\dots p_\ell\dots} = 0 \quad \text{при} \quad m < 0.$$

Будем рассматривать систему (4.25) отдельно для значений $f = 1$, $f = 2$, $f \geqslant 3$

1. $f = 1$. В этом случае система (4.25) принимает вид

$$(-1)^{p_\ell}\frac{\sqrt{x_1}}{2h_\ell^2}\,a_1^{\dots p_\ell\dots} + \hat{\Lambda}_\ell\, a_0^{\dots p_\ell\dots} = 0, \qquad \kappa = 0$$

$$(-1)^{p_\ell}\sqrt{x_1}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi_\ell}\,\frac{a_{\kappa-1}^{\dots p_\ell\dots}}{h_\ell^2} + \frac{\kappa+1}{2h_\ell^2}\,a_{\kappa+1}^{\dots p_\ell\dots}\right\} + \hat{\Lambda}_\ell a_\kappa^{\dots p_\ell\dots} = 0, \quad \kappa \geqslant 1. \qquad (4.25а)$$

Подставив значение $a_1^{\dots p_\ell\dots}$ из первого уравнения (4.25а) во второе, положив в нем $\kappa = 1$, получим уравнение

$$(-1)^{p_\ell}\sqrt{x_1}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi_\ell}\,\frac{a_0^{\dots p_\ell\dots}}{h_\ell^2} + \frac{a_2^{\dots p_\ell\dots}}{2h_\ell^2}\right\} + 2(-1)^{p_\ell}\hat{\Lambda}_\ell(h_\ell^2\hat{\Lambda}_\ell a_1^{\dots p_\ell\dots}) = 0,$$

которое инвариантно относительно замены p_ℓ на $1 - p_\ell$, и , следовательно, решения $a_0^{\dots p_\ell\dots}$, $a_2^{\dots p_\ell\dots}$ отличаются от решений $a_0^{p_1\dots p_{\ell-1},1-p_\ell,p_{\ell+1}\dots p_s}$ и $a_2^{p_1\dots p_{\ell-1},1-p_\ell,p_{\ell+1}\dots p_s}$ постоянным множителем. Этот множитель, в соответствии с (4.16) , следует положить равным единице. Далее из первого уравнения (4.25) имеем:

$$a_1^{\dots 0\dots} = -a_1^{\dots 1\dots} = \frac{2h_\ell^2}{\sqrt{x_1}}\hat{\Lambda}_\ell a_0^{\dots p_\ell\dots} \equiv g_1 .$$

и g_1 не зависит от индекса p_ℓ . Итак, в окрестности точки $\xi_\ell = \tilde{\xi}_\ell$ для функций $F_{\dots p_\ell\dots}(\xi_1\dots\xi_s)$ имеем:

$$F_{\dots p_\ell\dots}(\xi_1\dots\xi_s) = a_0 + (-1)^{p_\ell} g_1(\xi_\ell - \tilde{\xi}_\ell)^{1/2} + O(\xi_\ell - \tilde{\xi}_\ell). \qquad (4.26а)$$

2. $f = 2$. Система (4.25) принимает вид:

$$\hat{\Lambda}_\ell a_0^{\dots p_\ell\dots} = 0, \qquad \kappa = 0;$$

$$(-1)^{p_\ell}\sqrt{x_2}\,\frac{a_1^{\dots p_\ell\dots}}{2h_\ell^2} + \hat{\Lambda}_\ell a_1^{\dots p_\ell\dots} = 0, \quad \kappa = 1;$$

$$(-1)^{p_\ell}\sqrt{x_2}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi_\ell}\,\frac{a_{\kappa-2}^{\dots p_\ell\dots}}{h_\ell^2} + \frac{\kappa a_\kappa^{\dots p_\ell\dots}}{2h_\ell^2}\right\} + \hat{\Lambda}_\ell a_\kappa^{\dots p_\ell\dots} = 0, \ \kappa \geqslant 2.$$

Из первого уравнения следует, что $a_0^{\dots p_\ell\dots} \equiv a_0$ не зависит от индексов p_ℓ , из второго – что $a_1^{\dots p_\ell\dots} = 0$. Из третьего уравнения следует, что $a_\kappa^{p_1\dots p_{\ell-1},0,p_{\ell+1}\dots p_s} \neq a_\kappa^{p_1\dots p_{\ell-1},1,p_{\ell+1}\dots p_s}$
Таким образом, функцию $F_{\dots p_\ell\dots}(\xi_1\dots\xi_s)$ для $f = 2$ в окрестности $\xi_\ell = \tilde{\xi}_\ell$ можно представить в виде

$$F_{\dots p_\ell\dots}(\xi_1\dots\xi_s) = a_0 + a_2^{\dots p_\ell\dots}(\xi_\ell - \tilde{\xi}_\ell)^{1/2} + O[(\xi_\ell - \tilde{\xi}_\ell)^{3/2}]. \qquad (4.26б)$$

3. $f \geqslant 3$. Система (4.25) в этом случае принимает вид

$$\hat{\Lambda}_\ell a_\kappa^{\dots p_\ell\dots} = 0, \qquad \kappa = 0, 1 \dots f-2,$$

$$(-1)^{p_\ell}\sqrt{x_f}\,\frac{a_1^{\dots p_\ell\dots}}{2h_\ell^2} + \hat{\Lambda}_\ell a_{f-1}^{\dots p_\ell\dots} = 0, \quad \kappa = f-1,$$

$$(-1)^{p_\ell}\sqrt{x_f}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi_\ell}\,\frac{a_{\kappa-f}}{h_\ell^2} + a_{\kappa-f+2}^{\dots p_\ell\dots}\,\frac{\kappa-f+2}{2h_\ell^2}\right\} +$$

$$+ \hat{\Lambda}_\ell a_\kappa^{\dots p_\ell\dots} = 0, \quad \kappa \geqslant f.$$

Из первого уравнения следует, что $a_k^{\dots p_\ell \dots}$ при $k = 0, I, \dots, f-2$ не зависят от индексов p_ℓ, причем для $k = I, 2, \dots, f-2$ $a_k^{\dots p_\ell \dots} = 0$. Тогда второе уравнение системы тоже дает нулевые решения для всех коэффициентов вплоть до $a_{f-1}^{\dots p_\ell \dots} = 0$. Третье уравнение при $f = k$ принимает теперь вид

$$(-1)^{p_\ell} \sqrt{\chi_f} \, \frac{\partial}{\partial \xi_\ell} \frac{a_0^{\dots p_\ell \dots}}{h_\ell^\ell} + \hat{\Lambda}_\ell \, a_f^{\dots p_\ell \dots} = 0,$$

откуда следует, что $a_f^{p_1 \dots p_{\ell-1}, 0, p_{\ell+1} \dots p_s} \neq a_f^{p_1 \dots p_{\ell-1}, 1, p_{\ell+1} \dots p_s}$ и можно записать для случая $f \geqslant 3$

$$F_{\dots p_\ell \dots}(\xi_1 \dots \xi_s) = a_0 + a_f^{\dots p_\ell \dots} (\xi_\ell - \tilde{\xi}_\ell)^{f/2} + O[(\xi_\ell - \tilde{\xi}_\ell)^{f/2}]. \qquad (4.26в)$$

Полученные асимптотические выражения для функции $F_{\dots p_\ell \dots}(\xi_1 \dots \xi_s)$ (4.26а-в) показывают, что предельные неравенства (4.I6), действительно, выполняются.

Таким образом, если функции $\beta_\ell(\xi_\ell)$, входящие в уравнения (I.I) бесконечно дифференцируемы (их можно разлагать в ряд Тейлора) в окрестности точки $\xi_\ell = \tilde{\xi}_\ell$, то можно конструировать решения уравнения (4.6), имеющие асимптотику вида (4.26) в окрестности точки $\xi_\ell = \tilde{\xi}_\ell$ и удовлетворяющие условию (4.I6) на каустике, что доказывает конечность амплитуд $A^{\dots i_\ell \dots}$ $\vec{A}^{\dots i_\ell \dots}$ и $\vec{\mathcal{D}}^{\dots i_\ell \dots}$ асимптотических разложений (I.4) и (I.5) на каустиках.

Этим завершаются доказательства всех утверждений и предпосылок, приведенных в разделе I настоящей статьи. В заключение

обобщим результаты работы в виде следующих кратких выводов.

I. Уравнения Гельмгольца и Максвелла допускают равномерные коротковолновые асимптотические решения в произвольной неоднородной изотропной среде, построенные на базе соответствующих геометрооптических (неравномерных) разложений. Эти решения справедливы на каустиках и переходят в геометрооптические вдали от них.

2. Равномерные коротковолновые асимптотические решения уравнений Гельмгольца и Максвелла могут быть построены с помощью набора "эталонных" функций, удовлетворяющих обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с коэффициентами в виде гладких функций (дифференцируемых в нужное количество раз), причем нули функций, стоящих перед свободным членом в уравнении, определяют каустические поверхности.

3. Амплитуды указанных равномерных асимптотических решений являются линейными комбинациями геометрооптических амплитуд, расходящихся на каустиках, а координатные функции - аргументами "эталонных" функций, определенных из соответствующих уравнений эйконалов в рассматриваемой системе координат и условий ортогональности.

4. Равномерность указанных асимптотических решений достигается наложением условий непрерывности геометрооптических амплитуд при переходе соответствующего геометрооптического луча через каустику из геометрооптической тени.

5. Предлагаемая конструкция решений применима, когда переменные разделяются уже в уравнении эйконалов. Она также может

быть применима в качестве метода асимптотического разделения переменных в уравнениях Максвелла в системах координат, в которых переменные разделяются лишь в уравнении Гельмгольца соответствущей скалярной задачи.

6. Если уравнения эйконалов неразрешимы относительно аргументов "эталонных" функций, т.е. переменные в этих уравнениях не разделяются, проблема существенно осложняется. В этом случае следует искать эквивалентные пути к определению функций ξ_ℓ, в противном случае неразрешимость уравнений эйконалов относительно этих функций следует признать пределом применимости предлагаемого метода.

Автор выражает благодарность Иваняну М.И. за содействие при выполнении этой работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Газазян Э.Д., Иванян М.И. Равномерные коротковолновые асимптотические решения уравнений Гельмгольца и Максвелла. Радиотехника и электроника, 1984, т.29, № 5, с.830-835.
2. Кравцов Ю.А. Об одной модификации метода геометрической оптики. Изв.вузов - Радиофизика, 1964, т.7, № 4,с.664-673.
3. Кравцов Ю.А. Асимптотическое решение уравнений Максвелла вблизи каустик. Изв.вузов - Радиофизика, 1964, т.7, № 6, с.1049-1056.
4. Быков В.П. Построение волнового поля по известной лучевой картине, обладающей каустикой с двумя ветвями. Изв.вузов - Радиофизика, 1971, т.14, № 6, с.880-886.
5. Токатлы В.И., Кинбер Б.Е. Коротковолновая асимптотика осесимметричных волновых пучков. Изв.вузов - Радиофизика,1971, т.14, № 5, с.761-767.
6. Газазян Э.Д., Кинбер Б.Е. Асимптотика осесимметричных пучков электромагнитных волн. Изв.вузов - Радиофизика, 1971, т.14, № 8, с.1219-1223.
7. Газазян Э.Д., Тер-Погосян А.Д. Описание полей осесимметричных пучков электромагнитных волн вблизи каустической поверхности в неоднородной диэлектрической среде. Изв.АН АрмССР-Физика, 1974, т.9, № 2, с.169-172.
8. Газазян Э.Д., Иванян М.И., Тер-Погосян А.Д. Равномерая коротковолновая асимптотика собственных электромагнитных колебаний в круглом цилиндрическом волно-

воде с аксиально-симметричным заполнением. Препринт ЕФИ-886(37)-86, Ереван, 1986.

9. Газазян Э.Д., Иванян М.И. Коротковолновая асимптотика полей в замкнутой сферической области с неоднородным заполнением. Изв.АН АрмССР, Физика, 1976, т.II, № 4,с.259-267.

IO. Газазян Э.Д., Иванян М.И. Коротковолновая асимптотика электромагнитного поля замкнутого эллипсоида. Радиотехника и электроника, 1976, т.21, № IO, с.2052-2061.

II. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1974, с.752.

I2. Дебай П. Полярные молекулы. М.-Л.: ГИТИ, 1931, с.I53.

Рукопись поступила I9 апреля 1988 г.

ГАЗАЗЯН Э.Д.

РАВНОМЕРНАЯ КОРОТКОВОЛНОВАЯ АСИМПТОТИКА СКАЛЯРНЫХ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ НА ОСНОВЕ ОДНОМЕРНЫХ ЭТАЛОННЫХ ФУНКЦИЙ

Редактор Л.П.Мукаян

Технический редактор А.С.Абрамян

Подписано в печать 20/УП-88г. ВФ-03202 Формат 60х84/I6
Офсетная печать.Уч.изд.л. 2,0 Тираж 299 экз.Ц.30 к.
Зак.тип.№ 374 Индекс 3624

Отпечатано в Ереванском физическом институте
Ереван 36, Маркаряна 2