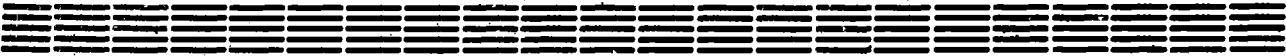


Препринт ЕФИ-1125(2)-89

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱԶԻ ԻՆՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
YEREVAN PHYSICS INSTITUTE



Р.Г. ПОГОСЯН

ОПЕРАТОРНАЯ АЛГЕБРА В ДВУХМЕРНОЙ
КОНФОРМНОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ,
СОДЕРЖАЩЕЙ СОХРАНЯЮЩИЕСЯ
«ПАРАФЕРМИОННЫЕ» ТОКИ СО СПИНОМ $4/3$

ЦНИИатоминформ
ЕРЕВАН - 1989

Ռ.Գ. ԳՈՂՐՍՅԱՆ

ՕՊԵՐԱՏՈՐԱՅԻՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ՝ 4/3 ՍՊԻՆՈՎ , , ՊԱՐԱՖԵՐ-
ՄԻՈՆԱՅԻՆ, , ԳԱՀՊԱՆՎՈՎ ՀՈՍԱՆՔՆԵՐ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՎ ՆՐԱ-
ՉԱՓ ԿՈՆՖՈՐՄ՝ ԲՎԱՆՏԱՅԻՆ ԳԱՇՏԻ ՏՆՄՈՒՔՅՈՒՆՈՒՄ

Վերջերս Ա.Բ. Զամոլոչիկովը և Վ.Ա. Ֆատևը կառուցել են երկշափ կոնֆորմ դաշարի տեսության մոդելների շարք, որոնք պարունակում են ոչ լոկալ /պարաֆերմիտային/ 4/3 սպինով հոսանքներ: Այս տեսություններում այլ ասերված դաշտերը օպերատորային վերլուծության նկատմամբ կազմում են փակ հանրահաշիվ: Ներկա աշխատանքում հաշվված են այդ օպերատորային հանրահաշվի բոլոր կառուցվածքային գործակիցները:

Երևանի ֆիզիկայի ինստիտուտ

Երևան 1989

I. Введение

В настоящее время известны несколько серий точных решений двумерной конформной теории поля [1-10]. В частности, в работе [8] построена серия "минимальных" моделей, симметрии которых генерируются сохраняющимися нелокальными токами со спином $4/3$. Алгебра этих токов содержит алгебру Вирасоро как подалгебру. Пространство всех полей является пространством представления алгебры парафермионных токов. В "минимальных" моделях оно содержит конечный набор неприводимых представлений, причем каждое из них вырожденно. Особый интерес представляет "главная серия" минимальных моделей, удовлетворяющих условию унитарности [8]. Эти модели, которые обозначаются здесь $S_3 M_p$ (все они допускают дискретную симметрию S_3), нумеруются натуральным числом $p = 3, 4, 5, \dots$ и отвечают значениям

$$c_p = 2 \left(1 - \frac{12}{p(p+4)} \right) \quad (1.1)$$

центрального заряда алгебры Вирасоро. Пространство полей модели $S_3 M_p$ содержит $[(p+3)(p-1) + 1 + (-)^p]/2$ "первичных полей" $\Phi_{(n,m)}$, $n = 1, 2, \dots, p+3$, $m = 1, 2, \dots, p-1$, при-

чем $\Phi_{(n,m)} = \Phi_{(p+4-n, p-m)}$. Спектр аномальных размерностей этих полей дается формулой

$$\Delta_{(n,m)} = \frac{(-p+4-m)^2 - 16}{16 p(p+4)} + \frac{1}{12} \left(1 - \cos^4\left(\frac{\pi(n-m)}{4}\right)\right). \quad (I.2)$$

Пространство $\mathcal{A}_p = \bigoplus_{n,m} [\Phi_{(n,m)}]$ полей модели $S_3 M_p([\Phi_{(n,m)}])$ обозначает подпространство, порождаемое первичным полем $\Phi_{(n,m)}$, образует замкнутую алгебру относительно операторных разложений. В частности, произведение двух первичных полей разлагается по формуле

$$\begin{aligned} & \Phi_{(n_1, m_1)}(x) \Phi_{(n_2, m_2)}(0) = \\ & = \sum_{n_3, m_3} C_{(n_1, m_1)(n_2, m_2)}^{(n_3, m_3)} [x^2]^{\Delta_{(n_3, m_3)} - \Delta_{(n_1, m_1)} - \Delta_{(n_2, m_2)}} [\Phi_{(n_3, m_3)}(0) \dots]. \end{aligned} \quad (I.3)$$

где многоточия обозначают вклад всех вторичных полей из соответствующего подпространства (класса), а числовые постоянные $C_{(n_1, m_1)(n_2, m_2)}^{(n_3, m_3)}$ называются структурными константами операторной алгебры. Они являются важнейшими характеристиками теории. Аналогичные величины для "минимальных" конформных и суперконформных моделей вычислены в [II] и [I2] соответственно. Данная работа посвящена вычислению структурных констант в моделях $S_3 M_p$, для чего использован метод работы [I2]. В разделе 3 показано, что четырехточечные корреляционные функции, содержащие вырожденные поля $\Phi_{(1,2)}$ или $\Phi_{(2,1)}$, удовлетворяют некоторым

уравнениям, решения которых выражаются через гипергеометрические функции. Исследование этих решений приводит к рекуррентным соотношениям, которым должны удовлетворять структурные константы. В разделе 4 приведены структурные константы, найденные с помощью этих рекуррентных соотношений.

2. Пространство полей и алгебра парафермионных токов

В этом разделе приведены некоторые результаты из работы [8], с целью фиксации обозначений и некоторой независимости изложения.

Рассмотрим некоторую двумерную статистическую систему (например, решеточную), инвариантную относительно дискретной группы Z_3 (обозначим её элементы E, Ω и Ω^{-1} , где E — единичный элемент, а $\Omega^3 = E$) в критической точке флуктуации в такой системе описываются локальными конформными полями $\phi_j(x)$, $x = (x_1, x_2) \in R^2$. Пространство таких взаимно локальных полей $\{\phi\}$ допускает следующее разложение:

$$\{\phi\} = \{\phi^{(-)}\} \oplus \{\phi^{(0)}\} \oplus \{\phi^{(+)}\} \quad (2.1)$$

в соответствии с неприводимым представлением группы Z_3 .

$$\Omega \phi^{(k)} = \omega^k \phi^{(k)}, \quad (2.2)$$

где $\omega = \exp 2\pi i/3$, $k = 0, \pm 1$, а $\phi^{(k)}$ некоторое поле из подпространства $\{\phi^{(k)}\}$, k называется Z_3 зарядом. Предположим, рассматриваемая система инвариантна относительно зарядового соп-

ряжения \mathcal{C} , которое меняет знак \mathbb{Z}_3 заряда,

$$\mathcal{C}; \phi^{(k)} \longleftrightarrow \phi^{(-k)}; \mathcal{C}^2 = E. \quad (2.3)$$

Совместно с элементами из \mathbb{Z}_3 , \mathcal{C} сопряжение генерирует симметрическую группу S_3 , которая содержит 6 элементов $\Omega_k = \Omega^k$, $R_k = \mathcal{C}\Omega_k$, $k = 0, \pm 1$, причем $\Omega_k \Omega_l = \Omega_{k+l}$, $\Omega_k \Omega_l = R_l \Omega_{-k} = R_{l-k}$, $R_l R_k = \Omega_{k-l}$ ($k \pm l$ берется по mod 3).

Поля беспорядка, соответствующие элементам группы \mathbb{Z}_3 (см. [8]), образуют пространство $\{\tilde{\Phi}\}$, дуальное (в смысле \mathbb{Z}_3 преобразования Краммерса-Ванье) пространству (2.1)

$$\{\tilde{\Phi}\} = \bigoplus_{\tilde{k}=0, \pm 1} \{\tilde{\Phi}^{(\tilde{k})}\}. \quad (2.4)$$

Отметим, что $\{\phi^{(0)}\} = \{\tilde{\Phi}^{(0)}\}$. Преобразования Ω , $\Omega^{-1} \in \mathbb{Z}_3$ действуют на $\{\tilde{\Phi}\}$ тривиально, а $\mathcal{C}: \tilde{\Phi}^{(\tilde{k})} \rightarrow \tilde{\Phi}^{(-\tilde{k})}$. В то же время в пространстве $\{\tilde{\Phi}\}$ действует "дуальная" группа $\tilde{\mathbb{Z}}_3 = (E, \tilde{\Omega}, \tilde{\Omega}^{-1})$

$$\tilde{\Omega} \tilde{\Phi}^{(\tilde{k})} = \omega^{\tilde{k}} \tilde{\Phi}^{(\tilde{k})}, \quad \tilde{\Omega} \phi^{(k)} = \phi^{(k)}. \quad (2.5)$$

Индекс $\tilde{k} = 0, \pm 1$ называется дуальным \mathbb{Z}_3 зарядом. Можно ввести пространство полей $\{\Psi\}$, замкнутое относительно операторного разложения и содержащее $\{\Phi\}$ и $\{\tilde{\Phi}\}$. Это пространство имеет следующую структуру

$$\{\Psi\} = \bigoplus_{k, \tilde{k}=0, \pm 1} \{\Phi^{(k, \tilde{k})}\}, \quad (2.6)$$

где каждое подпространство $\{\Phi^{(k, \tilde{k})}\}$ характеризуется значениями k , \tilde{k} , \mathbb{Z}_3 и $\tilde{\mathbb{Z}}_3$ зарядов.

$$\Omega^{\epsilon} \tilde{\Omega}^{\tilde{\epsilon}} \phi^{(k, \tilde{k})} = \omega^{\epsilon k + \tilde{\epsilon} \tilde{k}} \phi^{(k, \tilde{k})}. \quad (2.7)$$

Очевидно, имеет место следующее отождествление: $\{\phi^{(k)}\} = \{\phi^{(k, 0)}\}$ и $\{\tilde{\phi}^{(\tilde{k})}\} = \{\phi^{(0, \tilde{k})}\}$. Свойства взаимной локальности полей $\phi^{(k, \tilde{k})}$ описывается формулой

$$\phi^{(k_1, \tilde{k}_1)} * \phi^{(k_2, \tilde{k}_2)} = \omega^{k_1 \tilde{k}_2 + k_2 \tilde{k}_1} \phi^{(k_1, \tilde{k}_1)} \phi^{(k_2, \tilde{k}_2)}, \quad (2.8)$$

где $A * B$ означает результат аналитического продолжения корреляционной функции $\langle \dots A(x) B(y) \dots \rangle$ по переменной $x \in \mathbb{R}^2$ вдоль замкнутого контура обходящего y по часовой стрелке.

Из (2.8) следует, что поле $\phi^{(k, \tilde{k})}$ имеет спин $-k\tilde{k}/3 \pmod{1}$ [6]. Операторное разложение обладает свойством:

$$\phi^{(k_1, \tilde{k}_1)} \cdot \phi^{(k_2, \tilde{k}_2)} \in \{\phi^{(k_1+k_2, \tilde{k}_1+\tilde{k}_2)}\}. \quad (2.9)$$

Если пространство $\{\Psi\}$, рассматриваемое как операторная алгебра допускает автоморфизм \mathcal{D} , $\mathcal{D}^2 = E$

$$\mathcal{D}: \{\phi^{(k, \tilde{k})}\} \longleftrightarrow \{\phi^{(\tilde{k}, k)}\}, \quad (2.10)$$

то теория называется \mathbb{Z}_3 самодуальной, а \mathcal{D} - преобразованием дуальности.

Перейдем к рассмотрению полей беспорядка, соответствующих "нечетным" элементам $R_x \in S_3$ [7, 8]. Они называются полыми "С беспорядка" и обозначаются буквой \mathcal{Y} :

$$\{\varphi\} = \bigoplus_{k=0,\pm 1} \{\varphi_k\}, \quad (2.11)$$

где каждое подпространство $\{\varphi_k\}$ соответствует элементу $R_k \in S_3$. Поля $\varphi_j \in \{\varphi\}$ можно рассматривать как триплеты $\varphi_j = (\varphi_{j,-1}, \varphi_{j,0}, \varphi_{j,1})$, где компоненты $\varphi_{j,k} \in \{\varphi_k\}$ имеют одинаковые размерности. Свойства локальности этих полей определяются законом умножения в группе S_3 [8].

$$\varphi_k * \varphi_l = \varphi_l \varphi_{-k-l}; \quad \phi^{(k, \bar{k})} * \varphi_l = \omega^{k(l+\bar{k})} \phi^{(-k, -\bar{k})} \varphi_{l+\bar{k}}, \quad (2.12)$$

где все индексы берутся по mod 3. Отметим также следующие правила операторного разложения:

$$\begin{aligned} \varphi_k \varphi_l &\in \bigoplus_{q=0,\pm 1} \{\phi^{(q, l-k)}\} \\ \phi^{(k, \bar{k})} \varphi_l &\in \{\varphi_{l-\bar{k}}\}; \quad \varphi_l \phi^{(k, \bar{k})} \in \{\varphi_{l+\bar{k}}\}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Полным пространством полей, описывающим S_3 инвариантную теорию поля, является:

$$\{F\} = \{\Psi\} \oplus \{\varphi\}. \quad (2.14)$$

Ниже мы будем рассматривать S_3 инвариантную теорию поля, удовлетворяющую следующим требованиям специального характера:

а) в теории содержатся сохраняющиеся "парафермионные" токи [6-8] со спином $4/3$: $\Psi \in \{\phi^{(1, -1)}\}$; $\Psi^+ \in \{\phi^{(-1, 1)}\}$; $\bar{\Psi} \in \{\phi^{(1, 1)}\}$; $\bar{\Psi}^+ \in \{\phi^{(-1, -1)}\}$. Токи Ψ и Ψ^+ ($\bar{\Psi}$ и $\bar{\Psi}^+$) имеют конформные размерности $(4/3, 0)$ ($(0, 4/3)$) и удовлетворяют уравнениям

$$\partial_{\bar{z}} \Psi = \partial_z \Psi^+ = \partial_{\bar{z}} \bar{\Psi} = \partial_z \bar{\Psi}^+ = 0, \quad (2.15)$$

где $z = x_1 + ix_2$, $\bar{z} = x_1 - ix_2$ являются комплексными координатами R^2 . В соответствии с (2.15) будем использовать обозначения $\Psi = \Psi(z)$; $\Psi^+ = \Psi^+(z)$; $\bar{\Psi} = \bar{\Psi}(\bar{z})$ и $\bar{\Psi}^+ = \bar{\Psi}^+(\bar{z})$;

б) подпространство $\{\phi^{(0,0)}\}$ не содержит сохраняющиеся токи со спинами 1, 2 за исключением тензора энергии импульса.

Имея ввиду, что $\bar{\Psi}$ и $\bar{\Psi}^+$ имеют аналогичные свойства, мы сконцентрируем наше внимание только на Ψ и Ψ^+ .

Парафермионные токи имеют следующие свойства монодромии:

$$\Psi * \Psi = \omega \Psi \Psi, \quad \Psi^+ * \Psi^+ = \omega \Psi^+ * \Psi^+, \quad \Psi * \Psi^+ = \bar{\omega} \Psi \Psi^+, \quad (2.16)$$

где $\bar{\omega} = \omega^{-1}$. Совместно с б) (2.16) определяет вид операторного разложения парафермионных токов [8]

$$\Psi(z_1) \Psi(z_2) = \lambda (z_{12})^{-4/3} \left[\Psi^+(z_2) + \frac{1}{2} z_{12} \partial_{z_2} \Psi^+(z_2) + O(z_{12}^2) \right], \quad (2.17a)$$

$$\Psi^+(z_1) \Psi^+(z_2) = \lambda (z_{12})^{-4/3} \left[\Psi(z_2) + \frac{1}{2} z_{12} \partial_{z_2} \Psi(z_2) + O(z_{12}^2) \right], \quad (2.17b)$$

$$\Psi(z_1) \Psi^+(z_2) = (z_{12})^{-8/3} \left[I + 8/3c (z_{12})^2 T(z_2) + O(z_{12}^3) \right], \quad (2.17c)$$

где $T(z) - z\bar{z}$ компонента тензора энергии импульса, c - центральный заряд алгебры Вирасоро, λ - некоторая действительная константа. Предполагается, что токи Ψ и Ψ^+ нормированы усло-

вием $\langle \Psi(z_1) \Psi^+(z_2) \rangle = z_{12}^{-8/3}$. Алгебра парафермионных токов, определяемая операторными разложениями (2.17) ассоциативна, если имеет место следующее равенство: $9\lambda^2 c = 4(8-c)[8]$. Удобно использовать параметризацию.

$$c = 2 \left(1 - \frac{12}{\nu(\nu+4)} \right), \quad \lambda^2 = \frac{4(\nu+2)^2}{(\nu-2)(\nu+6)}, \quad (2.18)$$

с действительным параметром $\nu > 2$.

Алгебра парафермионных токов (2.17) генерирует бесконечномерную симметрию рассматриваемой системы. Пространство (2.14) соответствует некоторому приводимому представлению этой алгебры, следовательно, исследование структуры $\{F\}$ сводится к изучению неприводимых представлений. Сначала рассмотрим представления алгебры (2.17) в пространстве $\{\Psi\}$. Иногда удобнее ввести "левый" и "правый" z_3 заряды $q = k - \tilde{k} \pmod{3}$; $\bar{q} = k + \tilde{k} \pmod{3}$ и переобозначить поля из $\{\Psi\}$ следующим образом:

$$\phi^{[q, \bar{q}]} \equiv \phi^{(k, \tilde{k})}. \quad (2.19)$$

Учитывая (2.8), можно написать следующие операторные разложения:

$$\Psi(z) \phi^{[q, \bar{q}]}(0,0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^{r+q/3} A_{-n-q/3-4/3} \phi^{[q, \bar{q}]}(0,0), \quad (2.20)$$

$$\Psi^+(z) \phi^{[q, \bar{q}]}(0,0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^{n-q/3} A_{-n+q/3-4/3}^+ \phi^{[q, \bar{q}]}(0,0),$$

где $A \phi^{[q, \bar{q}]} \in \{ \phi^{[q-1, \bar{q}]} \}$, а $A^+ \phi^{[q, \bar{q}]} \in \{ \phi^{[q+1, \bar{q}]} \}$.

Коммутационные соотношения для операторов A и A^+ имеют форму [6].

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} C_{(-1/3)}^{(\ell)} [A_{n+(1-q)/3-\ell} A_{m-(1-q)/3+\ell}^+ + A_{m-(2-q)/3-\ell}^+ A_{n+(2-q)/3+\ell}] =$$

(2.21a)

$$= \frac{1}{2} (n-q/3)(n+1-q/3) \delta_{n+m,0} + \frac{\theta}{3c} L_{n+m} ,$$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} C_{(2/3)}^{(\ell)} [A_{n-q/3-\ell} A_{m+(2-q)/3+\ell} - A_{m-q/3-\ell} A_{n+(2-q)/3+\ell}] =$$

(2.21b)

$$= \frac{\lambda}{2} (n-m) A_{(2-2q)/3+n+m}^+ ,$$

где $C_{(\alpha)}^{(\ell)} = \frac{\Gamma(\ell-\alpha)}{\ell! \Gamma(-\alpha)}$, а L_n - генераторы алгебры Вирасоро.

Так как значения аномальных размерностей ограничены снизу, должны существовать инвариантные (первичные) поля, удовлетворяющие условию

$$A_\nu \Phi^{[q, \bar{q}]} = A_\mu^+ \Phi^{[q, \bar{q}]} = L_n \Phi^{[q, \bar{q}]} = 0; \nu, \mu, n > 0. \quad (2.22)$$

Поля вида $A_{-\nu_1} \dots A_{-\nu_n} A_{-\mu_1}^+ \dots A_{-\mu_m}^+ \Phi^{[q, \bar{q}]}$ с неотрицательными ν_i, μ_j (они должны быть согласованы с (2.20)) задают представление алгебры (2.17) $[\Phi^{[q, \bar{q}]}]_A \in \{\Psi\}$, которое неприводимо, за исключением специальных случаев "вырождения" (см. раздел 3).
Ниже инвариантные поля обозначаются через $S(\mathcal{D})$, если $q, \bar{q} = 0$ ($q, \bar{q} = \pm 1$).

Перейдем к рассмотрению представлений в пространстве полей с беспорядка $\{\psi\}$. (2.12) позволяет написать следующее разложение [8]

$$\psi(z) \psi_k(0,0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{\frac{n}{2} - \frac{4}{3}} A_{-\frac{n}{2}} \psi_k(0,0),$$

$$\psi^+(z) \psi_k(0,0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{\frac{n}{2} - \frac{4}{3}} (-)^n U_{k,k'} A_{-n/2} \psi_{k'},$$
(2.23)

где $U_{k,k'} = \omega^{1-k} \delta_{k+1,k'}$, и $A_{-\frac{n}{2}} \psi_k \in \{\psi\}$. Коммутационные соотношения имеют вид [8]

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \mathcal{D}_{(\gamma_3, -\gamma_3)}^{(\ell)} [A_{\frac{n-\ell}{2}} A_{\frac{m+\ell}{2}} + A_{\frac{m-\ell}{2}} A_{\frac{n+\ell}{2}}] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[2^{-2/3} \lambda(-)^{n+m} A_{\frac{n+m}{2}} U + 2^{2/3} \cos^2 \frac{\pi(n+m)}{2} (-)^n \left(\frac{8}{3c} L_{\frac{n+m}{2}} + \mathfrak{z}(n) \delta_{n+m,0} \right) U^{-1} \right]$$
(2.24)

Здесь $\mathcal{D}_{(\alpha, \beta)}^{(\ell)}$ коэффициенты разложения

$$(1-x)^\alpha (1-x)^\beta = \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathcal{D}_{(\alpha, \beta)}^{(\ell)} x^\ell,$$
(2.25)

а $\mathfrak{z}(n) = n^2/3 - 5/48$. Существуют триплеты инвариантных полей $R_k \in \{\psi_k\}$, $k = 0, \pm 1$ удовлетворяющих уравнениям

$$A_{\frac{n}{2}} R_k = L_n R_k = 0, \quad n > 0$$
(2.26)

Оператор A_0 действует как матрица 3×3

$$A_0 R_k = A_{k,k'} R_{k'}; \quad A_{k,k'} = 2^{-2/3} \lambda y^{(\pm)} U_{k,k'},$$
(2.27)

где $y^{(\pm)}$ являются корнями уравнения

$$4\left(\frac{8\Delta}{3c} - \frac{5}{48}\right)\lambda^{-2} = 4y^2 - y, \quad (2.26)$$

а Δ - размерность поля R_K . Линейная оболочка полей вида $A_{-\frac{p_i}{2}} \dots A_{-\frac{p_n}{2}} R_K$, с произвольными $p_i > 0$ реализует представление алгебры (2.17) в пространстве $\{\varphi\}$. Эти представления обозначим через $R^{(+)}$ или $R^{(-)}$ в зависимости от выбора корней $y^{(\pm)}$ уравнения (2.26).

3. Вырожденные поля и четырехточечные корреляционные функции

Представление, генерируемое инвариантным полем (типа S , \mathcal{D} , или R) приводимо, если пространство $[\Phi]_A$ содержит нуль вектор, т.е. поле $\chi \in [\Phi]_A$, удовлетворяющее уравнениям:

$$A_\nu \chi = A_\mu^+ \chi = 0; \quad \nu > 0, \quad \mu > 0 \quad (3.1)$$

$$L_0 \chi = (\Delta + \ell) \chi,$$

где Δ - размерность поля Φ , а ℓ (принимает значения n , $n+1/3$; n , $n+2/3$, n , $n+1/2$, $n \in \mathbb{N}$ для представлений типа S , \mathcal{D} ,

R соответственно) называется уровнем вырождения. Неприводимое представление получается с помощью факторизации $[\Phi]_A$ по подпространству $[\chi]_A$, т.е. мы должны положить $[\chi]_A = 0$.

Все вырожденные представления образуют замкнутую алгебру отно-

сительно операторного разложения [8]. Размерности первичных вырожденных полей даются формулами

$$\Delta_{(n,m)}^{(s)} = -\frac{1}{16}\alpha_0^2 + \frac{1}{16}(n\alpha_- + m\alpha_+)^2; \quad n-m=0 \pmod{4} \quad (3.2a)$$

$$\Delta_{(n,m)}^{(2)} = -\frac{1}{16}\alpha_0^2 + \frac{1}{16}(n\alpha_- + m\alpha_+)^2 + \frac{1}{12}; \quad n-m=2 \pmod{4} \quad (3.26)$$

$$\Delta_{(n,m)}^{(R^{(\pm)})} = -\frac{1}{16}\alpha_0^2 + \frac{1}{16}(n\alpha_- + m\alpha_+)^2 + \frac{1}{16}; \quad n-m=\mp 1 \pmod{4}, \quad (3.2b)$$

где $\alpha_+ = -1/\alpha_- = \sqrt{\frac{v+4}{v}}$, $\alpha_0 = \alpha_+ + \alpha_-$, а верхние индексы Δ - (5) (2) и $(R^{(\pm)})$ показывают тип представления.

Для дальнейшего особый интерес представляют поля $R_{(1,2)k}^{(+)}$ и $R_{(2,1)k}^{(-)}$ (ниже, когда не будет необходимости конкретизировать, мы обозначим оба триплета этих полей через R_k). В этом случае существует нуль вектора на уровне $\ell = 1/2$

$$\chi_k = A_{-\frac{1}{2}} R_k \equiv 0. \quad (3.3)$$

Из (2.24) и (3.3) следует

$$A_{-1} R_k(z, \bar{z}) = \gamma U_{k,k'} \partial_z R_{k'}(z, \bar{z}'), \quad (3.4)$$

где $\gamma = 2/(3\Delta) 2^{-2/3} \lambda \gamma$ (напомним, что $L_{-1} \equiv \partial_z$). Прежде чем перейти к выводу дифференциальных уравнений для четырехто-

чечников напомним правила перестановок полей в корреляционных функциях [8] :

$$\begin{aligned} \phi^{(\kappa_1, \tilde{\kappa}_1)}(z_1, \bar{z}_1) \phi^{(\kappa_2, \tilde{\kappa}_2)}(z_2, \bar{z}_2) &= \omega^{\tilde{\kappa}_1 \kappa_2} \phi^{(\kappa_2, \tilde{\kappa}_2)}(z_2, \bar{z}_2) \phi^{(\kappa_1, \tilde{\kappa}_1)}(z_1, \bar{z}_1), \\ \phi^{(\kappa, \tilde{\kappa})}(z_1, \bar{z}_1) \mathcal{Y}_\rho(z_2, \bar{z}_2) &= \mathcal{Y}_{\rho+\tilde{\kappa}}(z_2, \bar{z}_2) \phi^{(\kappa, \tilde{\kappa})}(z_1, \bar{z}_1), \\ \mathcal{Y}_\rho(z_1, \bar{z}_1) \phi^{(\kappa, \tilde{\kappa})}(z_2, \bar{z}_2) &= \omega^{\rho \kappa} \phi^{+(\kappa, \tilde{\kappa})}(z_2, \bar{z}_2) \mathcal{Y}_\rho(z_1, \bar{z}_1). \end{aligned} \quad (3.5)$$

В (3.5) предполагается, что $\text{Re } z_1 > \text{Re } z_2$. Нам понадобятся также следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 \phi^{[-1, \bar{q}]} &= \bar{\omega}^{\bar{q}} \mathcal{A} \phi^{[1, \bar{q}]}, \\ \mathcal{A}_0^+ \phi^{[1, \bar{q}]} &= \omega^{\bar{q}} \mathcal{A} \phi^{[-1, \bar{q}]}, \quad \mathcal{A} = \left(\frac{8\Delta}{3c} - \frac{1}{9} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Они следуют из (2.21a), если предположить нормировку двухточечных корреляционных функций полей $\phi^{[q, \bar{q}]}$:

$$\langle \phi^{[q_1, \bar{q}_1]}(z_1, \bar{z}_1) \phi^{[q_2, \bar{q}_2]}(z_2, \bar{z}_2) \rangle = \delta_{q_1, q_2} \delta_{\bar{q}_1, \bar{q}_2} (z_{12} \bar{z}_{12})^{-2\Delta}. \quad (3.7)$$

Рассмотрим корреляционную функцию

$$\langle \Psi(z) R_{\kappa_1}(z_1, \bar{z}_1) R_{\kappa_2}(0) \mathcal{D}^{[-1, \bar{q}_1]}(z_3, \bar{z}_3) \mathcal{D}^{[-1, \bar{q}_2]}(z_4, \bar{z}_4) \rangle (z-z_1)^{1/3} z^{4/3} \times$$

$$\begin{aligned} & \times (\sqrt{z z_{31}} - \sqrt{(z-z_1) z_3})^{1/3} (\sqrt{z z_{31}} + \sqrt{(z-z_1) z_3})^{2/3} (\sqrt{z z_{41}} - \sqrt{(z-z_1) z_4})^{1/3} \times \\ & \times (\sqrt{z z_{41}} + \sqrt{(z-z_1) z_4})^{2/3}, \quad \operatorname{Re} z_1 < 0 < \operatorname{Re} z_2 < \operatorname{Re} z_3 < \operatorname{Re} z_4, \quad (3.8) \end{aligned}$$

где $R_{k_1}(z_1, \bar{z}_1)$ - это $R_{(1,2)k_1}$ или $R_{(2,1)k_1}$, а поля R_{k_2} , $\mathcal{D}^{[-1, \bar{q}_1]}$, $\mathcal{D}^{[-1, \bar{q}_2]}$ характеризуются параметрами y_2 , α_1 , и α_2 соответственно (см. (2.28) и (3.6)). Нетрудно проверить, что (3.8) рассматриваемая как функция от z однозначна на двулистной римановой поверхности с точками ветвления z_1 и 0 , и имеет полюса на первом листе при $z = z_3$ и $z = z_4$. Разложение около точки z_1 начинается с члена $\sim (z - z_1)^{-1}$, а в бесконечности (3.8) ведет себя как $\text{const} + O(1/z)$ (напомним, что $\Psi(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} z^{-8/3}$, так как размерность Ψ равна $4/3$). Любую функцию $F(z)$ с такими аналитическими свойствами можно представить в виде:

$$\begin{aligned} F(z) = & \frac{A + B \sqrt{z(z-z_1)}}{z-z_1} + C \frac{\sqrt{z_3 z_{31}} + \sqrt{z(z-z_1)}}{z-z_3} + \\ & + \mathcal{D} \frac{\sqrt{z_4 z_{41}} + \sqrt{z(z-z_1)}}{z-z_4} + E, \quad (3.9) \end{aligned}$$

где A , B , C , D и E не зависят от z . В этом можно убедиться, используя следующее интегральное представление:

$$F(z) = \frac{iz_1}{4\pi \sqrt{z(z-z_1)}} \oint \frac{F(\zeta)}{\sqrt{(z-z_1)/z} \zeta - \sqrt{\zeta(z-z_1)}} d\zeta, \quad (3.10)$$

где интегрирование производится по положительно ориентированному замкнутому (возможно непростому) контуру, охватывающему точку z , но обходящему все другие особенности.

Используя операторные разложения (2.20) и (2.23) (с учетом условий (2.22) и (2.26)), получаем следующие выражения для A , B , C , D и E .

$$\begin{aligned}
 A &= \langle A_0 R_{K_1} R_{K_2} \mathcal{D}^{[-1, \bar{q}_1]} \mathcal{D}^{[-1, \bar{q}_2]} \rangle z_1^{4/3} (z_{31} z_{41})^{1/2}, \\
 B &= \frac{1}{3} \langle A_0 R_{K_1} R_{K_2} \mathcal{D}^{[-1, \bar{q}_1]} \mathcal{D}^{[-1, \bar{q}_2]} \rangle z_1^{4/3} (\sqrt{z_{41} z_3} + \sqrt{z_{31} z_4}), \\
 C &= \langle R_{K_1-1} R_{K_2-1} A_0 \mathcal{D}^{[-1, \bar{q}_1]} \mathcal{D}^{[-1, \bar{q}_2]} \rangle z_{31}^{1/3} z_3^{4/3} (-z_1)^{1/3} (2\sqrt{z_3 z_{31}})^{-2/3} \times \\
 &\times (\sqrt{z_3 z_{41}} - \sqrt{z_{31} z_4})^{1/3} (\sqrt{z_3 z_{41}} + \sqrt{z_{31} z_4})^{2/3}.
 \end{aligned} \tag{3.II}$$

$$\begin{aligned}
 D &= \omega^{\bar{q}_1-1} \langle R_{K_1-1} R_{K_2-1} \mathcal{D}^{[-1, \bar{q}_1]} A_0 \mathcal{D}^{[-1, \bar{q}_2]} \rangle z_{41}^{1/3} z_4^{4/3} (-z_1)^{1/3} \times \\
 &\times (2\sqrt{z_4 z_{41}})^{-2/3} (\sqrt{z_4 z_{31}} - \sqrt{z_{41} z_3})^{1/3} (\sqrt{z_4 z_{31}} + \sqrt{z_{41} z_3})^{2/3},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E - D\sqrt{z_4/z_{41}} - C\sqrt{z_3/z_{31}} &= \langle A_{-1} R_{K_1} R_{K_2} \mathcal{D}^{[-1, \bar{q}_1]} \mathcal{D}^{[-1, \bar{q}_2]} \rangle z_1^{1/3} (z_{31} z_{41})^{1/2} + \\
 + \frac{1}{3} \langle A_0 R_{K_1} R_{K_2} \mathcal{D}^{[-1, \bar{q}_1]} \mathcal{D}^{[-1, \bar{q}_2]} \rangle z_1^{4/3} \sqrt{z_{31} z_{41}} \left(7 - \frac{4z_3}{3z_{31}} - \frac{4z_4}{3z_{41}} + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{z_3 z_4}{z_{31} z_{41}}} \right).
 \end{aligned}$$

Переходя к пределу $z \rightarrow 0$ в (3.8) и (3.9), найдем:

$$\begin{aligned}
 &\langle R_{K_1-1} A_0 R_{K_2} \mathcal{D}^{[-1, \bar{q}_1]} \mathcal{D}^{[-1, \bar{q}_2]} \rangle (-z_1)^{4/3} \sqrt{z_3 z_4} \omega = \\
 &= -A/z_1 - C\sqrt{z_{31}/z_3} - D\sqrt{z_{41}/z_4} + E,
 \end{aligned} \tag{3.I2}$$

Подставляя (3.11) в (3.12) и учитывая (2.27), (3.4) и (3.6), можно получить искомые дифференциальные уравнения. Дифференциальные уравнения, соответствующие другим возможным выборам правых зарядов полей типа \mathcal{D} , могут быть получены аналогичным образом, но легче всего их получить из (3.12), используя S_3 инвариантность и свойства монодромии полей S -беспорядка. Так или иначе, подставляя $z_1 \equiv z$, $z_3 \equiv 1$, $z_4 \equiv \infty$ (что ввиду конформной симметрии не ограничивает общности) и введя обозначение

$$G_{k_1, k_2}^{[q_1, \bar{q}_1][q_2, \bar{q}_2]}(z, \bar{z}) \equiv \lim_{(z_4, \bar{z}_4) \rightarrow \infty} (z_4, \bar{z}_4)^{2k_4} \langle R_{k_1}(z, \bar{z}) R_{k_2}(0) \mathcal{D}^{[q_1, \bar{q}_1]}(1) \mathcal{D}^{[q_2, \bar{q}_2]}(z_4, \bar{z}_4) \rangle, \quad (3.13)$$

получаем следующую систему независимых дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \hat{L}_+ G_{0,0}^{[1,1][1,1]} &= \frac{\alpha_2 \bar{\omega}}{\sqrt{1-z}} G_{0,1}^{[-1,-1][1,-1]} - \frac{\alpha_1}{1-z} G_{0,1}^{[1,-1][1,-1]}, \\ \hat{L}_+ G_{0,-1}^{[1,-1][1,-1]} &= \frac{\alpha_2}{\sqrt{1-z}} G_{0,1}^{[1,-1][1,-1]} - \frac{\alpha_1 \bar{\omega}}{1-z} G_{0,1}^{[-1,-1][1,-1]}, \\ \hat{L}_- G_{0,1}^{[-1,-1][1,-1]} &= \frac{\alpha_2}{\sqrt{1-z}} G_{0,0}^{[1,1][1,1]} + \frac{\alpha_1}{1-z} G_{0,-1}^{[1,-1][1,-1]}, \\ \hat{L}_- G_{0,1}^{[1,-1][1,-1]} &= \frac{\alpha_2}{\sqrt{1-z}} G_{0,-1}^{[1,-1][1,-1]} + \frac{\alpha_1}{1-z} G_{0,0}^{[1,1][1,1]}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где дифференциальные операторы \hat{L}_{\pm} имеют вид

$$\hat{L}_{\pm} = (\sqrt{1-z} \mp 1)^{-1/3} (\sqrt{1-z} \pm 1)^{-2/3} \left[\frac{2}{3\Delta} \lambda y z \frac{d}{dz} \mp \frac{\lambda(y_2 - y_1 \theta)}{\sqrt{1-z}} + \frac{\lambda y}{9} \left(\delta - \frac{4}{1-z} \right) \right] \quad (3.15)$$

Структура уравнений (3.14) указывает на то, что удобно ввести следующие линейные комбинации корреляционных функций

$$\begin{aligned} 2A_{\sigma}^{++} &= G_{0,-1}^{[1,-1][1,-1]} + \bar{\sigma} G_{0,0}^{[1,1][1,1]}, \\ 2A_{\sigma}^{+-} &= G_{0,1}^{[1,-1][1,1]} + \omega \bar{\sigma} G_{0,-1}^{[1,-1][1,1]}, \\ 2A_{\sigma}^{-+} &= G_{0,1}^{[1,-1][1,-1]} + \bar{\omega} \bar{\sigma} G_{0,1}^{[1,-1][1,-1]}, \\ 2A_{\sigma}^{--} &= G_{0,0}^{[1,-1][1,1]} + \bar{\sigma} G_{0,0}^{[1,-1][1,1]} \end{aligned} \quad (3.16)$$

где $\bar{\sigma}$ принимает значение "+" или "-". Прямой проверкой нетрудно убедиться, что комбинации $(\sqrt{1-z} - 1)^{-1/3} A_{\sigma}^{+,p} \pm (\sqrt{1-z} + 1)^{-1/3} A_{\sigma}^{-,p}$ по переменной z удовлетворяют дифференциальному уравнению Римана и следовательно выражаются через гипергеометрические функции. Конечно, существуют аналогичные дифференциальные уравнения и по переменной \bar{z} . Они легко получаются комплексным сопряжением уравнений (3.14), если заметить, что любая комплексно сопряженная корреляционная функция получается заменой $\phi^{[q,\bar{q}]} \rightarrow \phi^{[\bar{q},q]}$ и $R_k \rightarrow R_{-k}$. Отсюда следует, что функ-

при $(\sqrt{1-\bar{z}}-1)^{-1/3} A^{\alpha,+} \pm (\sqrt{1-\bar{z}}+1)^{-1/3} A^{\alpha,-}$ удовлетворяют тем же вышеупомянутым дифференциальным уравнениям Римана, но только по переменной \bar{z} . Если учесть свойства локальности поля $R_0(z, \bar{z})$, то коэффициенты перед линейно независимыми решениями уравнения Римана определяются с точностью до общего множителя и для $A_0^{\alpha,\beta}$ получится

$$A_0^{\alpha,\beta} = N_0 (K_0 I_0^\alpha \bar{I}_0^\beta + \tilde{K}_0 \tilde{I}_0^\alpha \tilde{\bar{I}}_0^\beta) [(\sqrt{1-z}-\alpha)(\sqrt{1-\bar{z}}-\beta)]^{1/3} \times \\ \times (z\bar{z})^\xi [(1-z)(1-\bar{z})]^\eta, \quad (3.17)$$

где

$$I_0^\alpha = F(a_0, b_0, c, z) + \alpha \sqrt{1-z} F(1+a_0, b_0, c, z),$$

$$\tilde{I}_0^\alpha = z^{1-c} (F(\tilde{a}_0, \tilde{b}_0, \tilde{c}, z) + \alpha \tilde{a}_0 / a_0 \sqrt{1-z} F(1+\tilde{a}_0, \tilde{b}_0, \tilde{c}, z)),$$

$$a_0 = 3\Delta / (2\lambda y) (6x_1 - x_2) - \Delta/6 + 3\Delta y_2 / (2y) - 1/6,$$

$$b_0 = 2/3 + 3\Delta y_2 / (2y) - \Delta/6 + 3\Delta y_2 / (2y) + 1/3,$$

$$c = 2/3 + 3\Delta y_2 / y - \Delta/3, \quad (3.18)$$

$$\tilde{a}_0 = 1-c+a_0; \quad \tilde{b}_0 = 1-c+b_0; \quad \tilde{c} = 2-c$$

$$K_0 = \gamma(a_0)\gamma(b_0)/\gamma(c); \quad \tilde{K}_0 = \gamma(\tilde{a}_0)\gamma(\tilde{b}_0)/\gamma(\tilde{c}),$$

$$\xi = -5\Delta/6 - 1/3 + 3\Delta y_2 / (2y); \quad \eta = -2\Delta/3 + (3\Delta\lambda 2\lambda y) b x_1,$$

αN_0 - константы, подлежащие определению (в (3.18) и ниже $\chi(x) = \Gamma(x)/\Gamma(1-x)$).

Для вычисления структурных констант нам понадобятся также корреляционные функции $\langle R_{K_1} R_{K_2} S \mathcal{D}^{[q, \bar{q}]} \rangle$ и $\langle R_{K_1} R_{K_2} S S \rangle$. Вывод дифференциальных уравнений для них приведен в приложении. Здесь мы опишем их решения. Введем обозначения.

$$G_{K_1, K_2}^{[q, \bar{q}]}(z, \bar{z}) = \lim_{|z_4, \bar{z}_4| \rightarrow \infty} \langle R_{K_1}(z, \bar{z}) R_{K_2}(0) S(1) \mathcal{D}^{[q, \bar{q}]}(z_4, \bar{z}_4) \rangle (z_4 \bar{z}_4)^{2\Delta_4}, \quad (3.19)$$

$$2a_\sigma = G_{0, -1}^{[-1, 1]} + \sigma G_{0, 0}^{[-1, -1]}; \quad \sigma = \pm 1.$$

Для a_σ получается следующее выражение (см. приложение)

$$a = \mu_\sigma [K_\sigma |F(a_\sigma, b_\sigma, c, z)|^2 + (z\bar{z})^{1-c} \tilde{K}_\sigma |F(\tilde{a}_\sigma, \tilde{b}_\sigma, \tilde{c}, z)|^2 \times \\ \times (z\bar{z})^\xi [(1-z)(1-\bar{z})]^\eta, \quad (3.20)$$

где

$$\begin{aligned} a_\sigma &= 1/12 - \Delta/6 + 3\Delta\chi_2/(2\chi) + 3\Delta/(2\lambda\chi)(\varkappa_1 - \sigma\varkappa_2), \\ b_\sigma &= 7/12 - \Delta/6 + 3\Delta\chi_2/(2\chi) + 3\Delta/(2\lambda\chi)(\varkappa_1 + \sigma\varkappa_2), \\ c &= 2/3 + 3\Delta\chi_2/\chi - \Delta/3, \\ \xi &= -5\Delta/6 + 3\Delta\chi_2/(2\chi), \\ \eta &= -2\Delta/3 + 3\Delta/(2\lambda\chi)\varkappa_1 + 1/12 \end{aligned} \quad (3.21)$$

K_σ и \tilde{K}_σ определяются через параметры a_σ , b_σ , c как в (3.18), а параметр \varkappa_1 для поля типа S определяется соотно-

пением $\alpha_s^2 = \frac{8}{3c} (\Delta_s + \frac{1}{12}) - \frac{1}{9}$. Корреляционная функция

$$G(z, \bar{z}) = \lim_{|z_4, \bar{z}_4| \rightarrow \infty} \langle R_o(z, \bar{z}) R_o(0) S(1) S(z_4, \bar{z}_4) \rangle (z_4 \bar{z}_4)^{2\Delta_4} \quad (3.22)$$

тоже удовлетворяет гипергеометрическому дифференциальному уравнению по обеим переменным z и \bar{z} (см. приложение), поэтому аналогично предыдущему случаю ее можно представить в виде:

$$G(z, \bar{z}) = N (K |F(\alpha, \beta, c, z)|^2 + (z\bar{z})^{1-c} \tilde{K} |F(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{c}, z)|^2) \times \\ \times (z\bar{z})^\xi [(1-z)(1-\bar{z})]^\eta \quad (3.23)$$

с параметрами

$$\begin{aligned} \alpha &= 5/6 - \Delta/6 + 3\Delta y_2/(2y) + 3\Delta/(2\lambda y)(\alpha_1 - \alpha_2), \\ \beta &= 5/6 - \Delta/6 + 3\Delta y_2/(2y) + 3\Delta/(2\lambda y)(\alpha_1 + \alpha_2), \\ c &= 5/3 + 3\Delta y_2/y - \Delta/3, \\ \xi &= -5\Delta/6 + 3\Delta y_2/(2y) + 2/3, \\ \eta &= -2\Delta/3 + 3\Delta\alpha_1/(2\lambda y) + 1/12, \\ K &= \gamma(\alpha)\gamma(\beta)/\gamma(c); \quad \tilde{K} = \gamma(\tilde{\alpha})\gamma(\tilde{\beta})/\gamma(\tilde{c}). \end{aligned} \quad (3.24)$$

4. Операторная алгебра вырожденных полей

Поля из вырожденных представлений парафермионных токов образуют замкнутую операторную алгебру [8]. При произвольных иррациональных значениях параметра

$$\rho = -\alpha_+/\alpha_- = \alpha_+^2 \quad (4.1)$$

эта алгебра содержит все классы $[\Phi_{(n,m)}]_R$ с $n = 1, 2, \dots; m =$

$= 1, 2, \dots$; "Минимальным" моделям отвечают рациональные значения параметра ρ (для "главной серии" $\rho = (p+4)/p$), при этом образуется подалгебра из конечного набора парафермионных классов. В этом разделе мы вычислим структурные константы операторной алгебры вырожденных полей в "иррациональном" случае. Структурные константы минимальных моделей можно получить подходящим предельным переходом.

Рассмотрим четырехточечную функцию (3.13) с $R_{K_1}(z, \bar{z}) \equiv R_{K_1(1,2)}^{(+)}(z, \bar{z})$; $R_{K_2} = R_{K_2(n_2, m_2)}^{(\varepsilon_2)}$;

$$D^{[\varphi_1, \bar{\varphi}_1]} = D_{(n_3, m_3)}^{[\varphi_1, \bar{\varphi}_1]}, \quad D^{[\varphi_1, \bar{\varphi}_2]} = D_{(n_4, m_4)}^{[\varphi_1, \bar{\varphi}_2]},$$

где n_i, m_i - некоторые натуральные числа, удовлетворяющие условиям $n_2 - m_2 + \varepsilon_2 \in 4\mathbb{Z}$; $n_3 - m_3 - 2 \in 4\mathbb{Z}$; $n_4 - m_4 - 2 \in 4\mathbb{Z}$.

В этом случае параметры, входящие в (3.17) и (3.18) равны:

$$\begin{aligned} a_\sigma &= \frac{-\varepsilon_2 n_2 - 6n_3 + n_4 - 1}{8} + \frac{\varepsilon_2 m_2 + 6m_3 - m_4}{8} \rho, \\ b_\sigma &= \frac{-\varepsilon_2 n_2 - 6n_3 - n_4 + 3}{8} + \frac{\varepsilon_2 m_2 + 6m_3 + m_4}{8} \rho, \\ c &= \frac{3 - \varepsilon_2 n_2}{4} + \frac{\varepsilon_2 m_2}{4} \rho, \quad \eta = -\frac{2 + \varepsilon_2 n_2}{8} + \frac{\varepsilon_2 m_2 - 1}{8} \rho, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\eta_\sigma = 1/24 + 6 \left(-\frac{n_3}{8} + \frac{m_3 - 1}{8} \rho \right).$$

Сравнивая асимптотики (3.17) с операторным разложением (1.3), получаем соотношения

$$2^{4/3} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma^{(\lambda+1)/2} K_{\sigma} N_{\sigma} = C_{(1,2)(n_2, m_2)}^{(\lambda)} [n_2, m_2 + \varepsilon_2] C_{[n_2, m_2 + \delta_2]} [n_3, m_3] [n_4, m_4] \quad (4.3a)$$

$$2^{4/3} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma^{(\lambda+1)/2} \tilde{K}_{\sigma} \left(1 - \frac{\tilde{a}_{\sigma}}{a_{\sigma}}\right)^2 N_{\sigma} = C_{(1,2)(n_2, m_2)}^{(\lambda)} \{n_2, m_2 - \varepsilon_2\} C_{\{n_2, m_2 - \varepsilon_2\}} [n_3, m_3] [n_4, m_4] \quad (4.3b)$$

$$\sum_{\sigma=\pm 1} \sigma^{(\lambda+1)/2} \frac{\rho_{\sigma}}{f_{\sigma}} N_{\sigma} = C_{(1,2)(n_3, m_3 + \delta)}^{(\lambda)} [n_3, m_3] C_{(n_2, m_2)(n_3, m_3 + \delta)}^{(\lambda)} [n_4, m_4] \quad (4.3в)$$

где

$$f_{+}^{\delta} = \frac{\gamma(c - a_{\delta} - b_{\delta}) \gamma(a_{\delta}) \gamma(b_{\delta})}{\gamma(c - a_{\delta}) \gamma(c - b_{\delta})},$$

$$f_{-}^{\delta} = -(a_{-\delta})^{-2} \gamma(1 + a_{-\delta} + b_{-\delta} - c), \quad \delta = \pm \quad (4.4)$$

Нижние индексы при структурных константах в (4.3) (и ниже) взяты в скобки вида $(), []$ и $\{ \}$ в зависимости от типа соответствующих полей R , \mathcal{D} , или S соответственно. Верхний индекс $\lambda = + (-)$ указывает на то, что один из трех нижних индексов соответствует полю типа $\mathcal{D}^{[q, q]}$ ($\mathcal{D}^{[q, -q]}$).

Предполагается, что (опущенные) зарядовые индексы структурных констант принимают значения, обеспечивающие \tilde{z}_3 и $\tilde{\tilde{z}}_3$ инвариантность. Если вдобавок к этому потребовать, чтобы зарядовый индекс первого поля типа R (если они фигурируют в структурной константе) равнялся нулю, то значения зарядовых индексов определяются с точностью до C сопряжения.

Аналогичные соотношения получаются исследованием четырехточечников (3.19) и (3.22). В первом случае имеем

$$\sum_{\sigma=\pm 1} \delta^{(\lambda+1)/2} K_{\sigma} \mu_{\sigma} = C_{(1,2)(n_2, m_2)}^{(\lambda)} [n_2, m_2 + \varepsilon_2] C_{[n_2, m_2 + \varepsilon_2] \{n_3, m_3\}}^{(\lambda)} [n_4, m_4], \quad (4.5a)$$

$$\sum_{\sigma=\pm 1} \delta^{(\lambda+1)/2} g_{\sigma}^{\pm} \mu_{\sigma} = C_{(1,2)(n_3, m_3 + \delta) \{n_3, m_3\}}^{(\lambda)} C_{(n_2, m_2) \{n_3, m_3 + \delta\}}^{(\lambda)} [n_4, m_4], \quad (4.5б)$$

$$\delta^{(\lambda+1)/2} h_{\sigma} \mu_{\sigma} = C_{(1,2)(n_4, m_4 - \delta) [n_4, m_4]}^{(\lambda)} C_{(n_2, m_2) \{n_3, m_3\}}^{(\lambda)} (n_4, m_4 - \delta), \quad (4.5в)$$

где

$$g_{\sigma}^{+} = \frac{\gamma(c - a_{\sigma} - b_{\sigma}) \gamma(a_{\sigma}) \gamma(b_{\sigma})}{\gamma(c - a_{\sigma}) \gamma(c - b_{\sigma})}, \quad (4.6a)$$

$$g_{\sigma}^{-} = \gamma(a_{\sigma} + b_{\sigma} - c), \quad (4.6б)$$

$$h_{+} = \frac{\gamma(a_{+}) \gamma(b_{+} - a_{+})}{\gamma(c - a_{+})}, \quad (4.6в)$$

$$h_{-} = \gamma(b_{-}) \gamma(a_{-} - b_{-}) / \gamma(c - a_{-}), \quad (4.6г)$$

а параметры (3.2I) можно переписать в виде

$$a_{\sigma} = \frac{1 + \delta n_4 - n_3 - \varepsilon_2 n_2}{\delta} + \frac{m_3 - \delta m_4 + \varepsilon_2 m_2}{\delta} \rho,$$

$$\beta_\sigma = \frac{5 - 6n_4 - n_3 - \varepsilon_2 n_2}{8} + \frac{m_3 + 6m_4 + \varepsilon_2 m_2}{8} \rho, \quad (4.7)$$

$$c = \frac{3 - \varepsilon_2 n_2}{4} + \frac{\varepsilon_2 m_2}{4} \rho.$$

Таким же образом, рассматривая (3.22), получаем

$$N \gamma(1-c+\alpha) \gamma(1-c+\beta) / \gamma(2-c) = \quad (4.8a)$$

$$= C_{(1,2)(n_2, m_2)} \{n_2, m_2 - \varepsilon_2\} C_{\{n_2, m_2 - \varepsilon_2\} \{n_3, m_3\} \{n_4, m_4\}};$$

$$N g^\delta = C_{(1,2)(n_3, m_3 + \delta)} \{n_3, m_3\} C_{(n_3, m_3 + \delta)(n_2, m_2)} \{n_4, m_4\}, \quad (4.8b)$$

где

$$g^+ = \gamma(c - \alpha - \beta) \gamma(\alpha) \gamma(\beta) / (\gamma(c - \alpha) \gamma(c - \beta)),$$

$$g^- = \gamma(\alpha + \beta - c), \quad (4.9)$$

$$\alpha = \frac{7 + n_4 - \varepsilon_2 n_2 - n_3}{8} + \frac{m_3 + \varepsilon_2 m_2 - m_4}{8} \rho,$$

$$\beta = \frac{7 - n_4 - \varepsilon_2 n_2 - n_3}{8} + \frac{m_3}{8} \frac{m_2 + m_4}{\rho}.$$

Совместное исследование соотношений (4.3), (4.5) и (4.8) показывает, что в (4.3)

$$N_- = 0 (N_+ = 0), \text{ если } \frac{m_2 + m_3 + m_4 - n_2 - n_3 - n_4 - \varepsilon_2 - 4}{4} = 0 \pmod{2} (= 1 \pmod{2}), \quad (4.10)$$

$$\mu_- = 0 (\mu_+ = 0), \text{ если } \frac{m_2 + m_3 + m_4 - n_2 - n_3 - n_4 - \varepsilon_2 - 2}{4} = 0 \pmod{2} (= 1 \pmod{2}), \quad (4.11)$$

а в (4.8)

$$N = 0, \text{ если } \frac{m_2 + m_3 + m_4 - n_2 - n_3 - n_4 - \varepsilon_2}{4} = 1 \pmod{2}. \quad (4.12)$$

Условия (4.10) - (4.12) являются отражением свойства самодуальности нашей теории.

Рассмотрим частный случай (4.3), когда $n_2 = 1$, $m_2 = 2$, $n_3 = n_4 = n$; $m_3 = m_4 = m$. Тогда правые части уравнений (4.3б) будут различаться 1, так как поле $\mathbb{F}_{(1,1)}$ совпадает с единичным оператором (мы предполагаем стандартную единичную нормировку у двухточечных корреляционных функций). Следовательно

$$N_- = 0, \quad N_+ = 2^{-2/3} (\tilde{\kappa}_+ (1 - \tilde{\alpha}_+ / \alpha_+)^2)^{-1}. \quad (4.13)$$

Подставляя их в (4.3в), найдем

$$C_{(1,2)(n,m+\delta)(n,m)}^{(\lambda)} = \lambda^{(1+\delta)/2} 2^{-4/3} \left(\frac{\gamma((\rho-1)/4) \gamma((1-\delta n)/4 + (1+\delta m)/4 \rho)}{\gamma((\rho-1)/2) \gamma((2-\delta n)/4 + \delta m/4 \rho)} \right)^{1/2} \quad (4.14)$$

Аналогично из (4.6а,б) получаем

$$C_{(1,2)(n,m+\delta)(n,m)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma((\rho-1)/4) \gamma(\delta n/4 - \delta m/4 \rho)}{\gamma((\rho-1)/2) \gamma((1+\delta n)/4 - (1+\delta m)/4 \rho)} \right)^{1/2}. \quad (4.15)$$

Отметим, что все формулы этого раздела останутся справедливыми, если везде произвести замену

$$\Phi_{(n,m)} \longleftrightarrow \Phi_{(m,n)} ; \quad \rho \longleftrightarrow \rho' \equiv 1/\rho. \quad (4.16)$$

Подставляя (4.14) и (4.15) в (4.3), (4.5) и (4.8), и с учетом (4.10) - (4.13) исключая из них нормировочные константы N_σ , M_σ и N , можно получить рекуррентные соотношения, которые совместно с аналогичными соотношениями, получаемыми заменой (4.16), полностью определяют все структурные константы алгебры. Из-за громоздкости соответствующих выражений здесь приведем лишь решение для $C_{\{n_1, m_1\} \{n_2, m_2\} \{n_3, m_3\}}$, в случае, когда $n_1 + n_3 - n_2 - 1 = 8S$, $m_1 + m_3 - m_2 - 1 = 8\ell$ ($S, \ell \in \mathbb{N}$).

$$C_{\{n_1, m_1\} \{n_2, m_2\} \{n_3, m_3\}} = \rho^{-16S\ell + 2\ell - 2S + 2} \left(\frac{\gamma(-1/4 + \rho/4) \gamma(\nu_\alpha - \mu_\alpha \rho)}{\gamma(1/4 - \rho'/4) \gamma(-\mu_\alpha + \nu_\alpha \rho')} \right)^{1/2} \times \quad (4.17)$$

$$\times \prod_{i=1}^S \prod_{j=1}^{\ell} [(j - \sigma + (\sigma - i) \rho') (\mu_\alpha + \sigma - j - (\nu_\alpha + \sigma - i) \rho')]^{-2} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^S \gamma(\sigma + (i - \sigma) \rho') \gamma(\mu_\alpha + \sigma - (\nu_\alpha + \sigma - i) \rho') \prod_{j=1}^{\ell} \gamma(\sigma + (j - \sigma) \rho) \gamma(\nu_\alpha + \sigma - (\mu_\alpha + \sigma - j) \rho),$$

где $\nu_a = (-)^{a+1} n_a/4$, $\mu_a = (-)^{a+1} m_a/4$, по индексам $b \in \{0, 1/4, 2/4, 3/4\}$ и $a \in \{1, 2, 3\}$ подразумевается произведение. Отметим, что используя (4.17) с помощью (4.3), (4.5) и (4.8) нетрудно получить аналогичные замкнутые выражения и для остальных структурных констант. Например, подставляя (4.17) в (4.8), легко определить структурную константу $C_{(n_1, m_1)(n_2, m_2)\{n_3, m_3\}}$, если $n_1 + n_3 - n_2 - 1 \in 8\mathbb{N}$, $m_1 + m_3 - m_2 - 1 + \epsilon_2 \in 8\mathbb{N} \pm 1$.

Уравнения (4.3), (4.5) и (4.8) являются результатом исследования только тех особенностей корреляционных функций, которые соответствуют появлению в промежуточных каналах "первичных" полей. Исследование остальных главных особенностей позволяет найти структурные константы, имеющие по одному индексу, соответствующему полям вида $A_{-1/2}$, $\bar{A}_{-1/2} R$; $A_{-2/3}$, $\bar{A}_{-2/3} \mathcal{D}$ или $A_{-1/3}$, $\bar{A}_{-1/3} S$.

Построенная здесь операторная алгебра, кроме очевидной симметрии $S \rightarrow S$, $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$; $R \rightarrow -R$, обладает инвариантностью относительно еще двух отражений

$$\Phi_{(n, m)} \rightarrow (-)^{n+1} \Phi_{(n, m)} ; \quad (4.18)$$

$$S_{(n_1, m_1)} \rightarrow (-)^{(m_1 - n_1)/4} S_{(n_1, m_1)} \quad (4.19a)$$

$$\mathcal{D}_{(n_2, m_2)}^{[q, \bar{q}]} \rightarrow (-)^{(m_2 - n_2 - 2)/4} \mathcal{D}_{(n_2, m_2)}^{[-q, \bar{q}]} \quad (4.19b)$$

$$R_{(n_3, m_3)}^{(\epsilon)} \rightarrow (-)^{(m_3 - n_3 - \epsilon)/4} \tilde{R}_{(n_3, m_3)}^{(\epsilon)} , \quad (4.19b')$$

где знак \sim над R означает, что при преобразовании (4.19в) в случае необходимости следует менять зарядовый индекс таким образом, чтобы обеспечить сохранение \tilde{z}_3 заряда в операторных разложениях, или в корреляционных функциях. (4.19а-в) являются преобразованиями дуальности.

При переходе к пределу унитарных минимальных моделей ($\rho = (P+4)/P$, $P = 3, 4, \dots$) поля $\Phi_{(n,m)}$ и $\Phi_{(P+4-n, P-m)}$ следует отождествить. В результате образуется операторная алгебра, содержащая конечное число парафермионных классов $[\Phi_{(n,m)}]$ с $1 \leq n \leq P+3$, $1 \leq m \leq P-1$. При отождествлении полей $\Phi_{(n,m)}$ и $\Phi_{(P+4-n, P-m)}$ симметрия (4.18) ((4.19)) нарушается, если число P нечетное (четное).

Нарушение (4.19) при четном P связано с тем, что существует поле $\mathcal{D}_{(P/2+2, P/2)}$, обладающее свойством $\mathcal{A}_0 \mathcal{D}_{(P/2+2, P/2)}^{[-1, -1]} = \omega \mathcal{D}_{(P/2+2, P/2)}^{[1, -1]} = 0$.

Автор выражает благодарность А.Б.Замолотчикову за ценные обсуждения и С.Г.Матиняну за стимулирующий интерес к работе.

Приложение

Здесь приведем краткий вывод дифференциальных уравнений для $G_{K_1, K_2}^{[q, \bar{q}]}(z, \bar{z})$ и $G(z, \bar{z})$ (см. разд. 3). Рассуждения, аналогичные приведенным в третьем разделе, показывают, что

$$\begin{aligned}
 & \langle \Psi(z) R_{K_1}(z_1, \bar{z}_1) R_{K_2}(0) A_{-1/3} S(z_3, \bar{z}_3) \mathcal{D}^{[-1, \bar{q}]}(z_4, \bar{z}_4) \rangle (z-z_1)^{1/3} z^{4/3} \times \\
 & \times (\sqrt{z z_{31}} - \sqrt{(z-z_1) z_3})^{1/3} (\sqrt{z z_{31}} + \sqrt{(z-z_1) z_3})^{2/3} (\sqrt{z z_{41}} - \sqrt{(z-z_1) z_4})^{1/3} \times \\
 & \times (\sqrt{z z_{41}} + \sqrt{(z-z_1) z_4})^{2/3} = (A + B \sqrt{z(z-z_1)}) / (z-z_1) + \\
 & + (C + \mathcal{D} \sqrt{z(z-z_1)}) / (z-z_3) + \\
 & + E (\sqrt{z_4 z_{41}} + \sqrt{z(z-z_1)}) / (z-z_4) + F,
 \end{aligned} \tag{II 1}$$

где

$$\begin{aligned}
 A &= \langle A_0 R_{K_1} R_{K_2} A_{-1/3} S \mathcal{D}^{[-1, \bar{q}]} \rangle z_1^{7/3} \sqrt{z_{31} z_{41}}, \\
 B &= \langle A_0 R_{K_1} R_{K_2} A_{-1/3} S \mathcal{D}^{[-1, \bar{q}]} \rangle \frac{1}{3} z_1^{4/3} (\sqrt{z_3 z_{41}} + \sqrt{z_4 z_{31}}), \\
 C + \mathcal{D} \sqrt{z_3 z_{31}} &= \langle R_{K_1-1} R_{K_2-1} A_0 A_{-1/3} S \mathcal{D}^{[-1, \bar{q}]} \rangle 2^{1/3} z_{31}^{1/2} z_3^{3/2} \times \\
 & \times (-z_1)^{1/3} (\sqrt{z_3 z_{41}} - \sqrt{z_{31} z_4})^{1/3} (\sqrt{z_3 z_{41}} + \sqrt{z_{31} z_4})^{2/3}, \\
 C - \mathcal{D} \sqrt{z_3 z_{31}} &= \omega^{K_1+1} \langle R_{K_1} R_{K_2+1} A_{1/3} A_{-1/3} S \mathcal{D}^{[-1, \bar{q}]} \rangle z_{31}^{1/6} z_3^{7/6} (-z_1)^{2/3} \times \\
 & \times 2^{-1/3} (\sqrt{z_3 z_{41}} + \sqrt{z_{31} z_4})^{1/3} (\sqrt{z_3 z_{41}} - \sqrt{z_{31} z_4})^{2/3},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2E &= \bar{\omega} \langle R_{\kappa_1-1} R_{\kappa_2-1} A_{-1/3} S A_0 \mathcal{D}^{[-1, \bar{q}]} \rangle 2^{1/3} z_4 (-z_1)^{1/3} \times \\
&\times (\sqrt{z_4 z_{31}} - \sqrt{z_{41} z_3})^{1/3} (\sqrt{z_4 z_{31}} + \sqrt{z_{41} z_3})^{2/3}, \\
-C/z_{31} - E \sqrt{z_4/z_{41}} + F &= \langle A_{-1} R_{\kappa_1} R_{\kappa_2} A_{-1/3} S \mathcal{D}^{[-1, \bar{q}]} \rangle z_1^{7/3} \sqrt{z_{31} z_{41}} + \quad (\text{II } 2) \\
+ \langle A_0 R_{\kappa_1} R_{\kappa_2} A_{-1/3} S \mathcal{D}^{[-1, \bar{q}]} \rangle & z_1^{4/3} \sqrt{z_{31} z_{41}} \frac{1}{9} \left(21 - \frac{4z_3}{z_{31}} - \frac{4z_4}{z_{41}} + \sqrt{\frac{z_3 z_4}{z_{31} z_{41}}} \right)
\end{aligned}$$

В (III) произведем предельный переход $z \rightarrow 0$

$$-\frac{A}{z_1} - \frac{C}{z_3} - E \sqrt{\frac{z_{41}}{z_4}} + F = \langle R_{\kappa_1-1} A_0 R_{\kappa_2} A_{-1/3} S \mathcal{D}^{[-1, \bar{q}]} \rangle \bar{\omega} z_1^{4/3} \sqrt{z_3 z_4}. \quad (\text{II } 3)$$

(II 3) и (II 2) (совместно с уравнениями, которые получаются из них аналитическим продолжением по переменной z_1 , вдоль обходящего точку z_3 контура) после подстановки $z_1 \rightarrow z$, $z_3 \rightarrow 1$, $z_4 \rightarrow \infty$ приводят к следующей системе дифференциальных уравнений.

$$\hat{L}_\delta A_\delta^\delta(z, \bar{z}) = \left(\frac{1}{2y(1-z)} - \frac{\delta x_2}{\lambda y \sqrt{1-\bar{z}}} \right) A_\delta^\delta -$$

(II 4)

$$-\frac{2^{7/3} \Delta_3}{3\lambda y} (1-z)^{-4/3} (1-\delta\sqrt{1-\bar{z}})^{2/3} Q_\delta(z, \bar{z}); \quad \delta, \bar{\delta} = \pm 1,$$

где

$$\hat{L}_6 = (1 - \delta\sqrt{1-z})^{-1/3} (1 + \delta\sqrt{1-z})^{-2/3} \left(\frac{2}{3\Delta} z \frac{d}{dz} + \frac{8}{9} - \frac{4}{9(1-z)} + \left(\frac{1}{9} - \frac{y_2}{y} \right) \frac{\delta}{\sqrt{1-z}} \right),$$

$$2A_6^+ = \lim_{|z_4 \bar{z}_4| \rightarrow \infty} (z_4 \bar{z}_4)^{2\Delta_4} \left(\langle R_0(z, \bar{z}) R_0(0) A_{-1/3} S(1) \mathcal{D}^{[-1,1]}(z_4, \bar{z}_4) \rangle + \right. \\ \left. + 6\omega \langle R_0(z, \bar{z}) R_1(0) A_{-1/3} S(1) \mathcal{D}^{[-1,-1]}(z_4, \bar{z}_4) \rangle \right),$$

$$2A_6^- = \lim_{|z_4 \bar{z}_4| \rightarrow \infty} (z_4 \bar{z}_4)^{2\Delta_4} \left(\langle R_0(z, \bar{z}) R_{-1}(0) A_{-1/3} S(1) \mathcal{D}^{[1,-1]}(z_4, \bar{z}_4) \rangle + \right. \\ \left. + 6\bar{\omega} \langle R_0(z, \bar{z}) R_1(0) A_{-1/3} S(1) \mathcal{D}^{[1,1]}(z_4, \bar{z}_4) \rangle \right), \quad (\text{П } 5)$$

а определение Q_6 дано в (3.19). Нам понадобится также следующее тождество Уорда, которое получается исследованием корреляционной функции $\langle \Psi(z) R_{k_1}(z_1, \bar{z}_1) R_{k_2}(0) S(z_3, \bar{z}_3) \mathcal{D}^{[q, \bar{q}]}(z_4, \bar{z}_4) \rangle$.

$$0 = \left(\frac{y_2}{y} + \frac{1}{3} - \frac{6\alpha_2}{\lambda y} \right) Q_6 + \frac{2^{-1/3}}{\lambda y} (1-z)^{-1/6} (z)^{1/3} \sum_{\delta=\pm 1} \delta (1 - \delta\sqrt{1-z})^{1/3} A_6^\delta \quad (\text{П } 6)$$

Из (П 6) и (П 4) найдем, что функция $z^{1/2} (1-z)^{1/2} Q_6(z, \bar{z})$ удовлетворяет гипергеометрическому дифференциальному уравнению с параметрами, приведенными в (3.21).

Аналогичное исследование корреляционных функций $\langle \Psi(z) R_{k_1}(z_1, \bar{z}_1) \times R_{k_2}(0) A_{-1/3} S(z_3, \bar{z}_3) S(z_4, \bar{z}_4) \rangle$ и $\langle \Psi(z) R_{k_1}(z_1, \bar{z}_1) S(z_3, \bar{z}_3) S(z_4, \bar{z}_4) \rangle$ приводит к гипергеометрическому дифференциальному уравнению для $z^{1/2} (1-z)^{1/2} G(z, \bar{z})$, решение и параметры которого приведены в (3.23) и (3.24) соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Belavin A.A., Polyakov A.M., Zamolodchikov A.B. Infinite Conformal Symmetry in Two Dimensional Quantum Field Theory Nucl.Phys., 1984, vol.B241, p.333.
2. Friedan D., Qiu Z., Shenker S. Conformal Invariance, Unitarity, and Critical Exponents in Two Dimensions.- Phys. Rev. Lett. 1984, 52, p.1575
3. Bershadsky M., Knizhnik V., Teitelman M. Superconformal Symmetry in Two Dimensions.- Phys.Lett., 1985. ol.B151, p.31
4. Eichenherr H. Minimal Operator Algebras in Superconformal Quantum Field Theory.- Phys.Lett., 1985, vol.B151, p.21
5. Frieden D., Qiu Z., Shenker S. Superconformal Invariance In Two Dimensions and the Tricritical Ising Model.-Phys. Lett., 1985, vol.151B, p.37.
6. Замолодчиков А.Б., Фатеев В.А. Нелокальные (парафермионные) токи в двумерной конформной квантовой теории поля и самодуальные критические точки в Z_N - симметричных статических системах - ЖЭТФ, 1985, т.89, с.380.
7. Замолодчиков А.Б., Фатеев В.А. Поля беспорядка в двумерной конформной квантовой теории поля и $N = 2$ расширенная суперсимметрия. ЖЭТФ, 1986, т.90. с.1553.
8. Замолодчиков А.Б., Фатеев В.А. Представления алгебры "парафермионных токов" спина $4/3$ в двумерной конформной теории поля. Минимальные модели и трикритическая Z_3 модель Поотса. ТМФ, 1987, т.16.

9. Zamolodchikov A.B. Двухмерная конформная симметрия и критические четырехспиновые корреляционные функции в модели Ашкина-Теллера. ЖЭТФ, 1986, т.90, с.1806.
10. Fateev V.A., Zamolodchikov A.B. Conformal Field Theory Models in Two Dimensions Having Z_3 Symmetry.- Nucl.Phys. 1987, vol.B280 FS 18 N.4, p.644.
11. Dotsenko V.I.S., Fateev V.A. Four- Point Correlation Functions and the Operator Algebra in The 2D Conformal Invariant Theories with the Central Charge $C = 1$.- Nucl.Phys. 1985 vol.B251, FS 13 p.691.
12. Zamolodchikov A.B., Pohosyan P.G. Операторная алгебра в двумерной суперконформной теории поля. ЯФ, 1987, т.47.

Рукопись поступила 15 ноября 1986 г.

Р.Г. ПОГОСЯН

**ОПЕРАТОРНАЯ АЛГЕБРА В ДВУХМЕРНОЙ КОНФОРМНОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ
ПОЛЯ, СОДЕРЖАЩЕЙ СОХРАНЯЮЩИЕСЯ "ПАРАФЕРМИОННЫЕ" ТОКИ СО
СПИНОМ $4/3$**

Редактор Л.П. Мукаян

Технический редактор А.С. Абрамян

Подписано в печать 7/II-89г.

ВФ-01943

Формат 60x84/16

Офсетная печать. Уч. изд. л. 1,5

Тираж 299 экз. Ц. 22 к.

Зак. тип. № 004

Индекс 3649

Отпечатано в Ереванском физическом институте
Ереван 36, ул. Братьев Аликянян 2

The address for requests:
Information Department
Yerevan Physics Institute
Markaryan St., 2
Yerevan, 375036
Armenia, USSR

ИНДЕКС 3649



ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ