Препринт ЕФИ-1125(2)-89

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
YEREVAN PHYSICS INSTITUTE

Р.Г.ПОГОСЯН

ОПЕРАТОРНАЯ АЛГЕБРА В ДВУХМЕРНОЙ КОНФОРМНОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ, СОДЕРЖАЩЕЙ СОХРАНЯЮЩИЕСЯ «ПАРАФЕРМИОННЫЕ» ТОКИ СО СПИНОМ 4/3

ЦНИИатоминформ
ЕРЕВАН - 1989

Նախնատիպ ԵՖԻ-1125(2)-89

Ռ.Գ.ՊՈՂՈՍՅԱՆ

ՕՊԵՐԱՏՈՐԱՅԻՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎԸ՝ 4/3 ՍՊԻՆՈՎ „ՊԱՐԱՖԵՐՄԻՈՆԱՅԻՆ" ՊԱՀՊԱՆՎՈՂ ՀՈՍԱՆՔՆԵՐ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ԵՐԿՉԱՓ ԿՈՆՖՈՐՄ ՔՎԱՆՏԱՅԻՆ ԴԱՇՏԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Վերջերս Ա.Բ.Զամոլոդչիկովը և Վ.Ա.Ֆատեևը կառուցել են երկչափ կոնֆորմ դաշտի տեսության մոդելների շարք, որոնք պարունակում են ոչ լոկալ /պարաֆերմիոնային/ 4/3 սպինով հոսանքներ: Այս տեսություններում այլասերված դաշտերը օպերատորային վերլուծության նկատմամբ կազմում են փակ հանրահաշիվ: Ներկա աշխատանքում հաշված են այդ օպերատորային հանրահաշվի բոլոր կառուցվածքային գործակիցները:

Երևանի ֆիզիկայի ինստիտուտ

Երևան 1989

I. Введение

В настоящее время известны несколько серий точных решений двухмерной конформной теории поля [I-I0]. В частности, в работе [8] построена серия "минимальных" моделей, симметрии которых генерируются сохраняющимися нелокальными токами со спином 4/3. Алгебра этих токов содержит алгебру Вирасоро как подалгебру. Пространство всех полей является пространством представления алгебры парафермионных токов. В "минимальных" моделях оно содержит конечный набор неприводимых представлений, причем каждое из них вырожденно. Особый интерес представляет "главная серия" минимальных моделей, удовлетворяющих условию унитарности [8]. Эти модели, которые обозначаются здесь S_3M_p (все они допускают дискретную симметрию S_3), нумеруются натуральным числом $P = 3,4,5,\ldots$ и отвечают значениям

$$C_p = 2\left(1 - \frac{12}{p(p+4)}\right) \qquad (1.1)$$

центрального заряда алгебры Вирасоро. Пространство полей модели S_3M_p содержит $[(p+3)(p-1)+1+(-)^p]/2$ "первичных полей" $\Phi_{(n,m)}$, $n = 1,2,\ldots\, p+3$, $m = 1,2,\ldots\, p-1$, причем $\Phi_{(n,m)} = \Phi_{(P+4-n,\, P-m)}$. Спектр аномальных размерностей этих полей дается формулой

$$\Delta_{(n,m)} = \frac{(-nP+m(P+4))^2-16}{16P(P+4)} + \frac{1}{12}\left(1-\cos^4\left(\frac{\pi(n-m)}{4}\right)\right). \qquad (I.2)$$

Пространство $A_P = \bigoplus_{n,m} [\Phi_{(n,m)}]$ полей модели S_3M_P ($[\Phi_{(n,m)}]$ обозначает подпространство, порождаемое первичным полем $\Phi_{(n,m)}$), образует замкнутую алгебру относительно операторных разложений. В частности, произведение двух первичных полей разлагается по формуле

$$\Phi_{(n_1,m_1)}(x)\,\Phi_{(n_2,m_2)}(0) =$$

$$= \sum_{n_3,m_3} C^{(n_3,m_3)}_{(n_1,m_1)(n_2,m_2)} [x^2]^{\Delta_{(n_3,m_3)}-\Delta_{(n_1,m_1)}-\Delta_{(n_2,m_2)}} [\Phi_{(n_3,m_3)}(0)\ldots], \qquad (I.3)$$

где многоточия обозначают вклад всех вторичных полей из соответствующего подпространства (класса), а числовые постоянные $C^{(n_3,m_3)}_{(n_1,m_1)(n_2,m_2)}$ называются структурными константами операторной алгебры. Они являются важнейшими характеристиками теории. Аналогичные величины для "минимальных" конформных и суперконформных моделей вычислены в [II] и [I2] соответственно. Данная работа посвящена вычислению структурных констант в моделях S_3M_P, для чего использован метод работы [I2]. В разделе 3 показано, что четырехточечные корреляционные функции, содержащие вырожденные поля $\Phi_{(1,2)}$ или $\Phi_{(2,1)}$, удовлетворяют некоторым уравнениям, решения которых выражаются через гипергеометрические функции. Исследование этих решений приводит к рекурентным соотношениям, которым должны удовлетворять структурные константы. В разделе 4 приведены структурные константы, найденные с помощью этих рекурентных соотношений.

2. Пространство полей и алгебра парафермионных токов

В этом разделе приведены некоторые результаты из работы[8], с целью фиксации обозначений и некоторой независимости изложения.

Рассмотрим некоторую двухмерную статистическую систему (например, решеточную), инвариантную относительно дискретной группы Z_3 (обозначим её элементы E, Ω и Ω^{-1}, где E - единичный элемент, а $\Omega^3 = E$) в критической точке флюктуации в такой системе описываются локальными конформными полями $\Phi_j(x)$, $x = (x_1, x_2) \in R^2$. Пространство таких взаимно локальных полей $\{\Phi\}$ допускает следующее разложение:

$$\{\Phi\} = \{\Phi^{(-)}\} \oplus \{\Phi^{(0)}\} \oplus \{\Phi^{(-)}\} \qquad (2.1)$$

в соответствии с неприводимым представлениям группы Z_3.

$$\Omega\Phi^{(k)} = \omega^k \Phi^{(k)}, \qquad (2.2)$$

где $\omega = \exp 2\pi i/3$, $k = 0, \pm 1$, а $\Phi^{(k)}$ некоторое поле из подпространства $\{\Phi^{(k)}\}$, k называется Z_3 зарядом. Предположим, рассматриваемая система инварианта относительно зарядового сопряжения C, которое меняет знак Z_3 заряда,

$$C;\ \phi^{(K)} \longleftrightarrow \phi^{(-K)}\ ;\ C^2 = E. \tag{2.3}$$

Совместно с элементами из Z_3, C сопряжение генерирует симметрическую группу S_3, которая содержит 6 элементов $\Omega_K = \Omega^K$, $R_K = C\Omega_K$, $K = 0, \pm 1$, причем $\Omega_K \Omega_\ell = \Omega_{K+\ell}$, $\Omega_K \Omega_\ell = R_\ell \Omega_{-\ell}$ $= R_{\ell - K}$, $R_\ell R_K = \Omega_{K-\ell}$ ($K \pm \ell$ берется по $\mathrm{mod}\ 3$).

Поля беспорядка, соответствующие элементам группы Z_3 (см.[8]), образуют пространство $\{\tilde{\Phi}\}$, дуальное (в смысле Z_3 преобразования Краммерса-Ванье) пространству (2.I)

$$\{\tilde{\Phi}\} = \bigoplus_{\tilde{K}=0,\pm 1} \{\tilde{\Phi}^{(\tilde{K})}\}. \tag{2.4}$$

Отметим, что $\{\phi^{(0)}\} = \{\tilde{\Phi}^{(0)}\}$. Преобразования Ω, $\Omega^{-1} \in Z_3$ действуют на $\{\tilde{\phi}\}$ тривиально, а $C: \tilde{\phi}^{(\tilde{K})} \to \tilde{\phi}^{(-\tilde{K})}$. В то же время в пространстве $\{\tilde{\Phi}\}$ действует "дуальная" группа $\tilde{Z}_3 = (E, \tilde{\Omega}, \tilde{\Omega}^{-1})$

$$\tilde{\Omega}\tilde{\phi}^{(\tilde{K})} = \omega^{\tilde{K}}\tilde{\phi}^{(\tilde{K})},\quad \tilde{\Omega}\phi^{(K)} = \phi^{(K)}. \tag{2.5}$$

Индекс $\tilde{K} = 0, \pm 1$ называется дуальным Z_3 зарядом. Можно ввести пространство полей $\{\Psi\}$, замкнутое относительно операторного разложения и содержащее $\{\Phi\}$ и $\{\tilde{\Phi}\}$. Это пространство имеет следующую структуру

$$\{\Psi\} = \bigoplus_{K,\tilde{K}=0,\pm 1} \{\Phi^{(K,\tilde{K})}\}, \tag{2.6}$$

где каждое подпространство $\{\Phi^{(K,\tilde{K})}\}$ характеризуется значениями K, $\tilde{K}$, Z_3 и $\tilde{Z}_3$ зарядов.

$$\Omega^{\ell}\tilde{\Omega}^{\tilde{\ell}}\phi^{(\kappa,\tilde{\kappa})} = \omega^{\ell\kappa+\tilde{\ell}\tilde{\kappa}}\phi^{(\kappa,\tilde{\kappa})}. \tag{2.7}$$

Очевидно, имеет место следующее отождествление: $\{\phi^{(\kappa)}\} = \{\phi^{(\kappa,0)}\}$ и $\{\tilde{\phi}^{(\tilde{\kappa})}\} = \{\phi^{(0,\tilde{\kappa})}\}$. Свойства взаимной локальности полей $\phi^{(\kappa,\tilde{\kappa})}$ описывается формулой

$$\phi^{(\kappa_1,\tilde{\kappa}_1)} * \phi^{(\kappa_2\tilde{\kappa}_2)} = \omega^{\kappa_1\tilde{\kappa}_2+\kappa_2\tilde{\kappa}_1}\phi^{(\kappa_1,\tilde{\kappa}_1)}\phi^{(\kappa_2,\tilde{\kappa}_2)}, \tag{2.8}$$

где A * B означает результат аналитического продолжения корреляционной функции $\langle\ldots A(x)B(y)\ldots\rangle$ по переменной $x\in R^2$ вдоль замкнутого контура обходящего y по часовой стрелке.

Из (2.8) следует, что поле $\phi^{(\kappa,\tilde{\kappa})}$ имеет спин $-\kappa\tilde{\kappa}/3 \bmod (1)$ [6]. Операторное разложение обладает свойством:

$$\phi^{(\kappa_1,\tilde{\kappa}_1)}\cdot\phi^{(\kappa_2,\tilde{\kappa}_2)} \in \{\phi^{(\kappa_1+\kappa_2,\tilde{\kappa}_1+\tilde{\kappa}_2)}\}. \tag{2.9}$$

Если пространство $\{\Psi\}$, рассматриваемое как операторная алгебра допускает автоморфизм $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}^2 = E$

$$\mathcal{D}:\{\phi^{(\kappa,\tilde{\kappa})}\} \longleftrightarrow \{\phi^{(\tilde{\kappa},\kappa)}\}, \tag{2.10}$$

то теория называется Z_3 самодуальной, а $\mathcal{D}$ - преобразованием дуальности.

Перейдем к рассмотрению полей беспорядка, соответствующих "нечетным" элементам $R_\kappa\in S_3$ [7,8]. Они называются полями "С беспорядка" и обозначаются буквой φ :

$$\{\varphi\} = \underset{\kappa=0,\pm1}{\oplus} \{\varphi_\kappa\} , \tag{2.11}$$

где каждое подпространство $\{\varphi_\kappa\}$ соответствует элементу $R_\kappa \in S_3$. Поля $\varphi_j \in \{\varphi\}$ можно рассматривать как триплеты $\varphi_j = (\varphi_{j,-1}, \varphi_{j,0}, \varphi_{j,1})$, где компоненты $\varphi_{j,\kappa} \in \{\varphi_\kappa\}$ имеют одинаковые размерности. Свойства локальности этих полей определяются законом умножения в группе S_3 [8].

$$\varphi_\kappa * \varphi_\ell = \varphi_\ell \varphi_{-\kappa-\ell} ; \quad \Phi^{(\kappa,\tilde{\kappa})} * \varphi_\ell = \omega^{\kappa(\ell+\tilde{\kappa})} \Phi^{(-\kappa,-\tilde{\kappa})} \varphi_{\ell+\tilde{\kappa}} , \tag{2.12}$$

где все индексы берутся по $\mathrm{mod}\ 3$. Отметим также следующие правила операторного разложения:

$$\varphi_\kappa \varphi_\ell \in \underset{q=0,\pm1}{\oplus} \{\Phi^{(q,\ell-\kappa)}\}$$

$$\Phi^{(\kappa,\tilde{\kappa})} \varphi_\ell \in \{\varphi_{\ell-\tilde{\kappa}}\} ; \quad \varphi_\ell \Phi^{(\kappa,\tilde{\kappa})} \in \{\varphi_{\ell+\tilde{\kappa}}\} . \tag{2.13}$$

Полным пространством полей, описывающим S_3 инвариантную теорию поля, является:

$$\{F\} = \{\Psi\} \oplus \{\varphi\} . \tag{2.14}$$

Ниже мы будем рассматривать S_3 инвариантную теорию поля, удовлетворяющую следующим требованиям специального характера:

а) в теории содержатся сохраняющиеся "парафермионные" токи [6-8] со спином 4/3: $\Psi \in \{\Phi^{(1,-1)}\}$; $\Psi^+ \in \{\Phi^{(-1,1)}\}$; $\bar{\Psi} \in \{\Phi^{(1,1)}\}$; $\bar{\Psi}^+ \in \{\Phi^{(-1,-1)}\}$. Токи Ψ и Ψ^+ ($\bar{\Psi}$ и $\bar{\Psi}^+$) имеют конформные размерности (4/3, 0) ((0,4/3)) и удовлетворяют уравнениям

$$\partial_{\bar z}\Psi = \partial_z\Psi^+ = \partial_{\bar z}\bar\Psi = \partial_z\bar\Psi^+ = 0, \tag{2.15}$$

где $z = x_1 + ix_2$, $\bar z = x_1 - ix_2$ являются комплексными координатами R^2 . В соответствии с (2.I5) будем использовать обозначения $\Psi = \Psi(z)$; $\Psi^+ = \Psi^+(z)$; $\bar\Psi = \bar\Psi(\bar z)$ и $\bar\Psi^+ = \bar\Psi^+(\bar z)$;

б) подпространство $\{\Phi^{(0,0)}\}$ не содержит сохраняющиеся токи со спинами I,2 за исключением тензора энергии импульса.

Имея ввиду, что $\bar\Psi$ и $\bar\Psi^+$ имеют аналогичные свойства, мы сконцентрируем наше внимание только на Ψ и Ψ^+ .

Парафермионные токи имеют следующие свойства монодромии:

$$\Psi * \Psi = \omega\Psi\Psi, \quad \Psi^+ * \Psi^+ = \omega\,\Psi^+ * \Psi^+, \quad \Psi * \Psi^+ = \tilde\omega\Psi\Psi^+, \tag{2.16}$$

где $\tilde\omega = \omega^{-1}$. Совместно с б)(2.I6) определяет вид операторного разложения парафермионных токов [6]

$$\Psi(z_1)\Psi(z_2) = \lambda(z_{12})^{-4/3}[\Psi^+(z_2) + \tfrac{1}{2} z_{12}\partial_{z_2}\Psi^+(z_2) + O(z_{12}^2)], \tag{2.17a}$$

$$\Psi^+(z_1)\Psi^+(z_2) = \lambda(z_{12})^{-4/3}[\Psi(z_2) + \tfrac{1}{2} z_{12}\partial_{z_2}\Psi(z_2) + O(z_{12}^2)], \tag{2.17в}$$

$$\Psi(z_1)\Psi^+(z_2) = (z_{12})^{-8/3}[I + 8/3c\,(z_{12})^2 T(z_2) + O(z_{12}^3)], \tag{2.17c}$$

где $T(z)$ - zz компонента тензора энергии импульса, c - центральный заряд алгебры Вирасоро, λ - некоторая действительная константа. Предполагается, что токи Ψ и Ψ^+ нормированы условием $\langle \Psi(z_1)\,\Psi^+(z_2)\rangle = z_{12}^{-8/3}$. Алгебра парафермионных токов, определяемая операторными разложениями (2.17) ассоциативна, если имеет место следующее равенство: $9\lambda^2 c = 4(8-c)$[8]. Удобно использовать параметризацию.

$$C = 2\left(1 - \frac{12}{v(v+4)}\right), \qquad \lambda^2 = \frac{4(v+2)^2}{(v-2)(v+6)}, \qquad (2.18)$$

с действительным параметром $v > 2$.

Алгебра парафермионных токов (2.17) генерирует бесконечномерную симметрию рассматриваемой системы. Пространство (2.14) соответствует некоторому приводимому представлению этой алгебры, следовательно, исследование структуры $\{F\}$ сводится к изучению неприводимых представлений. Сначала рассмотрим представления алгебры (2.17) в пространстве $\{\Psi\}$. Иногда удобнее ввести "левый" и " правый " Z_3 заряды $q = K - \tilde{K}(mod 3)$; $\bar{q} = K + \tilde{K}(mod 3)$ и переобозначить поля из $\{\Psi\}$ следующим образом:

$$\Phi^{[q,\bar{q}]} \equiv \Phi^{(K,\tilde{K})}. \qquad (2.19)$$

Учитывая (2.8), можно написать следующие операторные разложения:

$$\Psi(z)\,\Phi^{[q,\bar{q}]}(0,0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^{n+q/3} A_{-n-q/3-4/3}\,\Phi^{[q,\bar{q}]}(0,0)\,,$$

(2.20)

$$\Psi^+(z)\Phi^{[q,\bar{q}]}(0,0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^{n-q/3} A^+_{-n+q/3-4/3}\,\Phi^{[q,\bar{q}]}(0,0)\,,$$

где $A\Phi^{[q,\bar{q}]} \in \{\Phi^{[q-1,\bar{q}]}\}$, а $A^+\Phi^{[q,\bar{q}]} \in \{\Phi^{[q+1,\bar{q}]}\}$.

Коммутационные соотношения для операторов A и A^+ имеют форму [8].

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} C_{(-1/3)}^{(\ell)} \left[A_{n+(1-q)/3-\ell} A^+_{m-(1-q)/3+\ell} + A^+_{m-(2-q)/3-\ell} A_{n+(2-q)/3+\ell} \right] = \tag{2.21a}$$

$$= \frac{1}{2}(n-q/3)(n+1-q/3)\delta_{n+m,0} + \frac{8}{3c} L_{n+m} \ ,$$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} C_{(2/3)}^{(\ell)} \left[A_{n-q/3-\ell} A_{m+(2-q)/3+\ell} - A_{m-q/3-\ell} A_{n+(2-q)/3+\ell} \right] = \tag{2.21в}$$

$$= \frac{\lambda}{2}(n-m) A^+_{(2-2q)/3+n+m} \ ,$$

где $C_{(\alpha)}^{(\ell)} = \dfrac{\Gamma(\ell-\alpha)}{\ell!\,\Gamma(-\alpha)}$,а L_n - генераторы алгебры Вирасоро. Так как значения аномальных размерностей ограничены снизу, должны существовать инвариантные (первичные) поля, удовлетворяющие условию

$$A_\nu \Phi^{[q,\bar q]} = A^+_\mu \Phi^{[q,\bar q]} = L_n \Phi^{[q,\bar q]} = 0 \ ; \ \nu, \mu, n > 0. \tag{2.22}$$

Поля вида $A_{-\nu_1} \dots A_{-\nu_N} \ A^+_{-\mu_1} \dots A^+_{-\mu_M} \Phi^{[q,\bar q]}$ с неотрицательными ν_i, μ_j (они должны быть согласованы с (2.20)) задают представление алгебры (2.17) $[\Phi^{[q,\bar q]}]_A \in \{\Psi\}$, которое неприводимо, за исключением специальных случаев "вырождения" (см.раздел 3). Ниже инвариантные поля обозначаются через S (D), если $q,\bar q = 0$ ($q, \bar q = \pm 1$).

Перейдем к рассмотрению представлений в пространстве полей с беспорядка $\{\varphi\}$. (2.12) позволяет написать следующее разложение [8]

$$\psi(z)\varphi_k(0,0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{\frac{n}{2}-\frac{4}{3}} A_{-\frac{n}{2}}\varphi_k(0,0),$$

$$\psi^{+}(z)\varphi_k(0,0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{\frac{n}{2}-\frac{4}{3}}(-)^n U_{k,k'}A_{-n/2}\varphi_{k'}, \tag{2.23}$$

где $U_{k,k'}=\omega^{1-k}\delta_{k+1,k'}$, и $A_{-\frac{n}{2}}\varphi_k\in\{\varphi\}$. Коммутационные соотношения имеют вид [8]

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\mathcal{D}^{(\ell)}_{(1/3,-1/3)}\left[A_{\frac{n-\ell}{2}}A_{\frac{m+\ell}{2}}+A_{\frac{m-\ell}{2}}A_{\frac{n+\ell}{2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[2^{-2/3}\lambda(-)^{n+m}A_{\frac{n+m}{2}}U+2^{2/3}\cos^2\frac{\pi(n+m)}{2}(-)^n\left(\frac{8}{3C}L_{\frac{n+m}{2}}+\varkappa(n)\delta_{n+m,0}\right)U^{-1}\right] \tag{2.24}$$

Здесь $\mathcal{D}^{(\ell)}_{(\alpha,\beta)}$ коэффициенты разложения

$$(1-x)^{\alpha}(1-x)^{\beta}=\sum_{\ell=0}^{\infty}\mathcal{D}^{(\ell)}_{(\alpha,\beta)}x^{\ell}, \tag{2.25}$$

а $\varkappa(n)=n^2/3-5/48$. Существуют триплеты инвариантных полей $R_k\in\{\varphi_k\}$, $k=0,\pm1$ удовлетворяющих уравнениям

$$A_{\frac{n}{2}}R_k=L_nR_k=0,\quad n>0 \tag{2.26}$$

Оператор A_0 действует как матрица 3x3

$$A_0R_k=A_{k,k'}R_{k'};\quad A_{k,k'}=2^{-2/3}\lambda y^{(\pm)}U_{k,k'}, \tag{2.27}$$

где $y^{(\pm)}$ являются корнями уравнения

$$4\left(\frac{8\Delta}{3c}-\frac{5}{48}\right)\lambda^{-2}=4y^2-y, \tag{2.28}$$

а Δ - размерность поля R_κ. Линейная оболочка полей вида $A_{-\frac{n_1}{2}}\dots A_{-\frac{n_m}{2}}R_\kappa$, с произвольными $n_i>0$ реализует представление алгебры (2.17) в пространстве $\{\varphi\}$. Эти представления обозначим через $R^{(+)}$ или $R^{(-)}$ в зависимости от выбора корней $y^{(\pm)}$ уравнения (2.28).

3. Вырожденные поля и четырехточечные корреляционные функции

Представление, генерируемое инвариантным полем (типа S, $\mathcal{D}$, или R) приводимо, если пространство $[\Phi]_A$ содержит нуль вектор, т.е. поле $\chi\in[\Phi]_A$, удовлетворяющее уравнениям:

$$\begin{gathered}A_\nu\chi=A^+_\mu\chi=0;\quad \nu>0,\ \mu>0\\ L_0\chi=(\Delta+\ell)\chi,\end{gathered} \tag{3.1}$$

где Δ - размерность поля Φ, а ℓ (принимающее значения n, $n+1/3$; $n, n+2/3, n, n\pm 1/2$, $n\in N$ для представлений типа S, $\mathcal{D}$, R соответственно) называется уровнем вырождения. Неприводимое представление получается с помощью факторизации $[\Phi]_A$ по подпространству $[\chi]_A$, т.е. мы должны положить $[\chi]_A=0$. Все вырожденные представления образуют замкнутую алгебру относительно операторного разложения [8] . Размерности первичных вырожденных полей даются формулами

$$\Delta^{(s)}_{(n,m)} = -\frac{1}{16}\alpha_0^2 + \frac{1}{16}(n\alpha_- + m\alpha_+)^2; \quad n-m = 0 \,(\mathrm{mod}\, 4) \tag{3.2а}$$

$$\Delta^{(\mathcal{D})}_{(n,m)} = -\frac{1}{16}\alpha_0^2 + \frac{1}{16}(n\alpha_- + m\alpha_+)^2 + \frac{1}{12}; \quad n-m = 2 \,(\mathrm{mod}\, 4) \tag{3.2б}$$

$$\Delta^{(R^{(\pm)})}_{(n,m)} = -\frac{1}{16}\alpha_0^2 + \frac{1}{16}(n\alpha_- + m\alpha_+)^2 + \frac{1}{16}; \quad n-m = \mp 1 \,(\mathrm{mod}\, 4), \tag{3.2в}$$

где $\alpha_+ = -1/\alpha_- = \sqrt{\frac{v+4}{v}}$, $\alpha_0 = \alpha_+ + \alpha_-$, а верхние индексы Δ-(s) $(\mathcal{D})$ и $(R^{(\pm)})$ показывают тип представления.

Для дальнейшего особый интерес представляют поля $R^{(+)}_{(1,2)\kappa}$ и $R^{(-)}_{(2,1)\kappa}$ (ниже, когда не будет необходимости конкретизировать, мы обозначим оба триплета этих полей через R_κ). В этом случае существует нуль вектора на уровне $\ell = 1/2$

$$\chi_\kappa = A_{-\frac{1}{2}} R_\kappa \equiv 0. \tag{3.3}$$

Из (2.24) и (3.3) следует

$$A_{-1} R_\kappa(z,\bar{z}) = \gamma\, U_{\kappa,\kappa'}\, \partial_z R_{\kappa'}(z,\bar{z}'), \tag{3.4}$$

где $\gamma = 2/(3\Delta)\, 2^{-2/3} \lambda y$ (напомним, что $L_{-1} \equiv \partial_z$).Прежде чем перейти к выводу дифференциальных уравнений для четырехточечников напишем правила перестановок полей в корреляционных функциях [8] :

$$\phi^{(K_1,\tilde{K}_1)}(z_1,\bar{z}_1)\,\phi^{(K_2,\tilde{K}_2)}(z_2,\bar{z}_2)=\omega^{\tilde{K}_1 K_2}\,\phi^{(K_2,\tilde{K}_2)}(z_2,\bar{z}_2)\,\phi^{(K_1,\tilde{K}_1)}(z_1,\bar{z}_1),$$

$$\phi^{(K,\tilde{K})}(z_1,\bar{z}_1)\,\varphi_\ell(z_2,\bar{z}_2)=\varphi_{\ell+\tilde{K}}(z_2,\bar{z}_2)\,\phi^{(K,\tilde{K})}(z_1,\bar{z}_1),\tag{3.5}$$

$$\varphi_\ell(z_1,\bar{z}_1)\,\phi^{(K,\tilde{K})}(z_2,\bar{z}_2)=\omega^{\ell K}\,\phi^{+(K,\tilde{K})}(z_2,\bar{z}_2)\,\varphi_\ell(z_1,\bar{z}_1).$$

В (3.5) предполагается, что $\operatorname{Re} z_1 > \operatorname{Re} z_2$. Нам понадобятся также следующие соотношения:

$$A_0\,\phi^{[-1,\bar{q}]}=\bar{\omega}^{\bar{q}}\,\varkappa\,\phi^{[1,\bar{q}]},$$

$$A_0^+\,\phi^{[1,\bar{q}]}=\omega^{\bar{q}}\,\varkappa\,\phi^{[-1,\bar{q}]},\qquad \varkappa=\left(\frac{8\Delta}{3c}-\frac{1}{9}\right)^{1/2}.\tag{3.6}$$

Они следуют из (2.2Iа), если предположить нормировку двухточечных корреляционных функций полей $\phi^{[q,\bar{q}]}$:

$$\langle \phi^{[q_1,\bar{q}_1]}(z_1,\bar{z}_1)\,\phi^{[q_2,\bar{q}_2]}(z_2,\bar{z}_2)\rangle=\delta_{q_1,q_2}\,\delta_{\bar{q}_1,\bar{q}_2}(z_{12}\bar{z}_{12})^{-2\Delta}.\tag{3.7}$$

Рассмотрим корреляционную функцию

$$\langle \Psi(z)R_{K_1}(z_1,\bar{z}_1)\,R_{K_2}(0)\,\mathcal{D}^{[-1,\bar{q}_1]}(z_3,\bar{z}_3)\,\mathcal{D}^{[-1,\bar{q}_2]}(z_4,\bar{z}_4)\rangle(z-z_1)^{1/3}z^{4/3}\times$$

$$\times\left(\sqrt{z z_{31}}-\sqrt{(z-z_1)z_3}\right)^{1/3}\left(\sqrt{z z_{31}}+\sqrt{(z-z_1)z_3}\right)^{2/3}\left(\sqrt{z z_{41}}-\sqrt{(z-z_1)z_4}\right)^{1/3}\times$$

$$\times\left(\sqrt{z z_{41}}+\sqrt{(z-z_1)z_4}\right)^{2/3}, \quad \mathrm{Re}\, z_1<0<\mathrm{Re}\, z_2<\mathrm{Re}\, z_3<\mathrm{Re}\, z_4, \tag{3.8}$$

где $R_{k_1}(z_1,\bar{z}_1)$ - это $R_{(1,2)k_1}$ или $R_{(2,1)k_1}$,а поля R_{k_2} , $\mathcal{D}^{[-1,\bar{q}_1]}$, $\mathcal{D}^{[-1,\bar{q}_2]}$ характеризуются параметрами y_2 , $\varkappa_1$, и $\varkappa_2$ соответственно (см.(2.28) и (3.6)). Нетрудно проверить, что (3.8) рассматриваемая как функция от z однозначна на двулистной римановой поверхности с точками ветвления z_1 и 0, и имеет полюса на первом листе при $z=z_3$ и $z=z_4$. Разложение около точки z_1 начинается с члена $\sim(z-z_1)^{-1}$, а в бесконечности (3.8) ведет себя как $\mathrm{const}+O(1/z)$ (напомним, что $\Psi(z)\xrightarrow{z\to\infty} z^{-8/3}$, так как размерность Ψ равна 4/3). Любую функцию $F(z)$ с такими аналитическими свойствами можно представить в виде:

$$F(z)=\frac{A+Б\sqrt{z(z-z_1)}}{z-z_1}+C\,\frac{\sqrt{z_3 z_{31}}+\sqrt{z(z-z_1)}}{z-z_3}+$$
$$+\mathcal{D}\,\frac{\sqrt{z_4 z_{41}}+\sqrt{z(z-z_1)}}{z-z_4}+E, \tag{3.9}$$

где A, B, C, Д и E не зависят от z . В этом можно убедиться, используя следующее интегральное представление:

$$F(z)=\frac{i z_1}{4\pi\sqrt{z(z-z_1)}}\oint\frac{F(\zeta)}{\sqrt{(z-z_1)/z}\,\zeta-\sqrt{\zeta(\zeta-z_1)}}\,d\zeta, \tag{3.10}$$

где интегрирование производится по положительно ориентированному замкнутому (возможно непростому) контуру, охватывающему точку z, но обходящему все другие особенности.

Используя операторные разложения (2.20) и (2.23) (с учетом условий (2.22) и (2.26), получаем следующие выражения для А, В, С, Д и Е.

$$A = \langle A_0 R_{K_1} R_{K_2} \mathcal{D}^{[-1,\bar{q}_1]} \mathcal{D}^{[-1,\bar{q}_2]} \rangle z_1^{4/3} (z_{31} z_{41})^{1/2},$$

$$B = \frac{1}{3} \langle A_0 R_{K_1} R_{K_2} \mathcal{D}^{[-1,\bar{q}_1]} \mathcal{D}^{[-1,\bar{q}_2]} \rangle z_1^{4/3} \left(\sqrt{z_{41} z_3} + \sqrt{z_{31} z_4}\right),$$

$$C = \langle R_{K_1-1} R_{K_2-1} A_0 \mathcal{D}^{[-1,\bar{q}_1]} \mathcal{D}^{[-1,\bar{q}_2]} \rangle z_{31}^{1/3} z_3^{4/3} (-z_1)^{1/3} \left(2\sqrt{z_3 z_{31}}\right)^{-2/3} \times$$

$$\times \left(\sqrt{z_3 z_{41}} - \sqrt{z_{31} z_4}\right)^{1/3} \left(\sqrt{z_3 z_{41}} + \sqrt{z_{31} z_4}\right)^{2/3}.$$

(3.II)

$$\mathcal{D} = \omega^{\bar{q}_1 - 1} \langle R_{K_1-1} R_{K_2-1} \mathcal{D}^{[-1,\bar{q}_1]} A_0 \mathcal{D}^{[-1,\bar{q}_2]} \rangle z_{41}^{1/3} z_4^{4/3} (-z_1)^{1/3} \times$$

$$\times \left(2\sqrt{z_4 z_{41}}\right)^{-2/3} \left(\sqrt{z_4 z_{31}} - \sqrt{z_{41} z_3}\right)^{1/3} \left(\sqrt{z_4 z_{31}} + \sqrt{z_{41} z_3}\right)^{2/3},$$

$$E - \mathcal{D}\sqrt{z_4/z_{41}} - C\sqrt{z_3/z_{31}} = \langle A_{-1} R_{K_1} R_{K_2} \mathcal{D}^{[-1,\bar{q}_1]} \mathcal{D}^{[-1,\bar{q}_2]} \rangle z_1^{7/3} (z_{31} z_{41})^{1/2} +$$

$$+ 1/3 \langle A_0 R_{K_1} R_{K_2} \mathcal{D}^{[-1,\bar{q}_1]} \mathcal{D}^{[-1,\bar{q}_2]} \rangle z_1^{4/3} \sqrt{z_{31} z_{41}} \left(7 - \frac{4 z_3}{3 z_{31}} - \frac{4 z_4}{3 z_{41}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{z_3 z_4}{z_{31} z_{41}}}\right).$$

Переходя к пределу $z \to 0$ в (3.8) и (3.9), найдем:

$$\langle R_{K_1-1} A_0 R_{K_2} \mathcal{D}^{[-1,\bar{q}_1]} \mathcal{D}^{[-1,\bar{q}_2]} \rangle (-z_1)^{4/3} \sqrt{z_3 z_4}\, \omega =$$

(3.I2)

$$= -A/z_1 - C\sqrt{z_{31}/z_3} - \mathcal{D}\sqrt{z_{41}/z_4} + E,$$

Подставляя (3.II) в (3.I2) и учитывая (2.27), (3.4) и (3.6), можно получить искомые дифференциальные уравнения. Дифференциальные уравнения, соответствующие другим возможным выборам правых зарядов полей типа $\mathcal{D}$, могут быть получены аналогичным образом, но легче всего их получить из (3.I2), используя S_3 инвариантность и свойства монодромии полей C -беспорядка. Так или иначе, подставляя $z_1 = z$, $z_3 = 1$, $z_4 = \infty$ (что ввиду конформной симметрии не ограничивает общности) и введя обозначение

$$G^{[q_1\bar{q}_1][q_2\bar{q}_2]}_{K_1,K_2}(z,\bar{z}) \equiv \lim_{(z_4\bar{z}_4)\to\infty} (z_4\bar{z}_4)^{2\Delta_4} \langle R_{K_1}(z,\bar{z}) R_{K_2}(0) \mathcal{D}^{[q_1\bar{q}_1]}(1) \mathcal{D}^{[q_2\bar{q}_2]}(z_4\bar{z}_4) \rangle, \qquad (3.I3)$$

получаем следующую систему независимых дифференциальных уравнений:

$$\hat{L}_+ G^{[1,1][1,1]}_{0,0} = \frac{\varkappa_2\bar{\omega}}{\sqrt{1-z}} G^{[-1,-1][1,-1]}_{0,1} - \frac{\varkappa_1}{1-z} G^{[1,-1][-1,-1]}_{0,1},$$

$$\hat{L}_+ G^{[1,-1][1,-1]}_{0,-1} = \frac{\varkappa_2}{\sqrt{1-z}} G^{[1,-1][-1,-1]}_{0,1} - \frac{\varkappa_1\bar{\omega}}{1-z} G^{[-1,-1][1,-1]}_{0,1},$$

$$\hat{L}_- G^{[-1,-1][1,-1]}_{0,1} = \frac{\varkappa_2}{\sqrt{1-z}} G^{[1,1][1,1]}_{0,0} + \frac{\varkappa_1}{1-z} G^{[1,-1][1,-1]}_{0,-1}, \qquad (3.I4)$$

$$\hat{L}_- G^{[1,-1][-1,-1]}_{0,1} = \frac{\varkappa_2}{\sqrt{1-z}} G^{[1,-1][1,-1]}_{0,-1} + \frac{\varkappa_1}{1-z} G^{[1,1][1,1]}_{0,0},$$

где дифференциальные операторы $\hat{L}_\pm$ имеют вид

$$\hat{L}_\pm = \left(\sqrt{1-z} \mp 1\right)^{-1/3}\left(\sqrt{1-z} \pm 1\right)^{-2/3}\left[\frac{2}{3\Delta}\lambda y z \frac{d}{dz} \mp \frac{\lambda(y_2 - y/9)}{\sqrt{1-z}} + \frac{\lambda y}{9}\left(8 - \frac{4}{1-z}\right)\right], \quad (3.15)$$

Структура уравнений (3.14) указывает на то, что удобно ввести следующие линейные комбинации корреляционных функций

$$2A_\sigma^{++} = G_{0,-1}^{[1,-1][1,-1]} + \sigma G_{0,0}^{[1,1][1,1]},$$

$$2A_\sigma^{+-} = G_{0,1}^{[1,-1][1,1]} + \omega\sigma G_{0,-1}^{[-1,-1][-1,1]},$$

$$2A_\sigma^{-+} = G_{0,1}^{[1,-1][-1,-1]} + \bar{\omega}\sigma G_{0,1}^{[-1,-1][1,-1]}, \quad (3.16)$$

$$2A_\sigma^{--} = G_{0,0}^{[1,-1][-1,1]} + \sigma G_{0,0}^{[-1,-1][1,1]},$$

где σ принимает значение "+" или "-". Прямой проверкой нетрудно убедиться, что комбинации $\left(\sqrt{1-z} - 1\right)^{-1/3} A_\sigma^{+,\beta} \pm \left(\sqrt{1-z} + 1\right)^{-1/3} A_\sigma^{-,\beta}$ по переменной z удовлетворяют дифференциальному уравнению Римана и следовательно выражаются через гипергеометрические функции. Конечно, существуют аналогичные дифференциальные уравнения и по переменной $\bar{z}$. Они легко получаются комплексным сопряжением уравнений (3.14), если заметить, что любая комплексно сопряженная корреляционная функция получается заменой $\phi^{[q,\bar{q}]} \to \phi^{[\bar{q},q]}$ и $R_k \to R_{-k}$. Отсюда следует, что функции $(\sqrt{1-\bar z}-1)^{-1/3} A^{\alpha,+} \pm (\sqrt{1-\bar z}+1)^{-1/3} A_\sigma^{\alpha,-}$ удовлетворяют тем же вышеупомянутым дифференциальным уравнениям Римана, но только по переменной $\bar z$. Если учесть свойства локальности поля $R_0(z,\bar z)$, то коэффициенты перед линейно независимыми решениями уравнения Римана определяются с точностью до общего множителя и для $A_\sigma^{\alpha,\beta}$ получится

$$A_\sigma^{\alpha,\beta} = N_\sigma (K_\sigma I_\sigma^\alpha \bar I_\sigma^\beta + \tilde K_\sigma \tilde I_\sigma^\alpha \tilde{\bar I}_\sigma^\beta)[(\sqrt{1-z}-\alpha)(\sqrt{1-\bar z}-\beta)]^{1/3} \times$$

$$\times (z\bar z)^\xi [(1-z)(1-\bar z)]^{\eta_\sigma}, \qquad (3.17)$$

где

$$I_\alpha^\sigma = F(a_\sigma, b_\sigma, c, z) + \alpha\sqrt{1-z}\, F(1+a_\sigma, b_\sigma, c, z),$$

$$\tilde I_\alpha^\sigma = z^{1-c}(F(\tilde a_\sigma, \tilde b_\sigma, \tilde c, z) + \alpha \tilde a_\sigma / a_\sigma \sqrt{1-z}\, F(1+\tilde a_\sigma, \tilde b_\sigma, \tilde c, z)),$$

$$a_\sigma = 3\Delta/(2\lambda y)(6\varkappa_1 - \varkappa_2) - \Delta/6 + 3\Delta y_2/(2y) - 1/6,$$

$$b_\sigma = 3\Delta/(2\lambda y)(6\varkappa_1 + \varkappa_2) - \Delta/6 + 3\Delta y_2/(2y) + 1/3,$$

$$c = 2/3 + 3\Delta y_2/y - \Delta/3, \qquad (3.18)$$

$$\tilde a_\sigma = 1-c+a_\sigma; \quad \tilde b_\sigma = 1-c+b_\sigma; \quad \tilde c = 2-c$$

$$K_\sigma = \gamma(a_\sigma)\gamma(b_\sigma)/\gamma(c); \quad \tilde K_\sigma = \gamma(\tilde a_\sigma)\gamma(\tilde b_\sigma)/\gamma(\tilde c),$$

$$\xi = -5\Delta/6 - 1/3 + 3\Delta y_2/(2y); \qquad \eta_\sigma = -2\Delta/3 + (3\Delta\lambda 2\lambda y))6\varkappa_1,$$

α N_σ - константы, подлежащие определению (в(3.18) и ниже $\gamma(x) = \Gamma(x)/\Gamma(1-x)$).

Для вычисления структурных констант нам понадобятся также корреляционные функции $\langle R_{K_1} R_{K_2} S \mathcal{D}^{[q,\bar q]} \rangle$ и $\langle R_{K_1} R_{K_2} S S \rangle$. Вывод дифференциальных уравнений для них приведен в приложении. Здесь мы опишем их решения. Введем обозначения.

$$G^{[q,\bar q]}_{K_1,K_2}(z,\bar z) = \lim_{|z_4 \bar z_4| \to \infty} \langle R_{K_1}(z,\bar z) R_{K_2}(0) S(1) \mathcal{D}^{[q,\bar q]}(z_4,\bar z_4) \rangle (z_4 \bar z_4)^{2\Delta_4}, \tag{3.19}$$

$$2a_\sigma = G^{[-1,1]}_{0,-1} + \sigma G^{[-1,-1]}_{0,0}\,; \quad \sigma = \pm 1 .$$

Для a_σ получается следующее выражение (см.приложение)

$$a = \mathcal{M}_\sigma \left[K_\sigma |F(a_\sigma, b_\sigma, c, z)|^2 + (z\bar z)^{1-c} \tilde K_\sigma |F(\tilde a_\sigma, \tilde b_\sigma, \tilde c, z)|^2 \times \right. \tag{3.20}$$

$$\times (z\bar z)^{\xi} [(1-z)(1-\bar z)]^{\eta} ,$$

где

$$
\begin{aligned}
a_\sigma &= 1/12 - \Delta/6 + 3\Delta y_2/(2y) + 3\Delta/(2\lambda y)(æ_1 - \sigma æ_2), \\
b_\sigma &= 7/12 - \Delta/6 + 3\Delta y_2/(2y) + 3\Delta/(2\lambda y)(æ_1 + \sigma æ_2), \\
c &= 2/3 + 3\Delta y_2/y - \Delta/3, \qquad\qquad (3.21) \\
\xi &= -5\Delta/6 + 3\Delta y_2/(2y), \\
\eta &= -2\Delta/3 + 3\Delta/(2\lambda y) æ_1 + 1/12
\end{aligned}
$$

K_σ и $\tilde K_\sigma$ определяются через параметры a_σ, b_σ, c как в (3.18), а параметр $æ_1$ для поля типа S определяется соотношением $æ_s^2 = \frac{8}{3C}(\Delta_s + \frac{1}{12}) - \frac{1}{9}$. Корреляционная функция

$$G(z,\bar{z}) = \lim_{|z_4 \bar{z}_4| \to \infty} \langle R_0(z,\bar{z}) R_0(0) S(1) S(z_4,\bar{z}_4) \rangle (z_4 \bar{z}_4)^{2\Delta_4} \quad (3.22)$$

тоже удовлетворяет гипергеометрическому дифференциальному уравнению по обеим переменным z и $\bar{z}$ (см.приложение), поэтому аналогично предыдущему случаю ее можно представить в виде:

$$G(z,\bar{z}) = N(K|F(a,b,c,z)|^2 + (z\bar{z})^{1-c} \tilde{K} |F(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c},z)|^2) \times$$

$$\times (z\bar{z})^{\xi} [(1-z)(1-\bar{z})]^{\eta} \quad (3.23)$$

с параметрами

$$\begin{aligned} a &= 5/6 - \Delta/6 + 3\Delta y_2/(2y) + 3\Delta/(2\lambda y)(æ_1 - æ_2), \\ b &= 5/6 - \Delta/6 + 3\Delta y_2/(2y) + 3\Delta/(2\lambda y)(æ_1 + æ_2), \\ c &= 5/3 + 3\Delta y_2/y - \Delta/3, \\ \xi &= -5\Delta/6 + 3\Delta y_2/(2y) + 2/3, \\ \eta &= -2\Delta/3 + 3\Delta æ_1/(2\lambda y) + 1/12, \\ K &= \gamma(a)\gamma(b)/\gamma(c); \quad \tilde{K} = \gamma(\tilde{a})\gamma(\tilde{b})/\gamma(\tilde{c}). \end{aligned} \quad (3.24)$$

4. Операторная алгебра вырожденных полей

Поля из вырожденных представлений парафермионных токов образуют замкнутую операторную алгебру [8] . При произвольных иррациональных значениях параметра

$$\rho = -\alpha_+/\alpha_- = \alpha_+^2 \quad (4.1)$$

эта алгебра содержит все классы $[\Phi_{(n,m)}]_R$ с $n = 1,2,\ldots; m =$

$= 1,2,\ldots;$ " Минимальным " моделям отвечают рациональные значения параметра ρ (для "главной серии" $\rho=(p+4)/p$), при этом образуется подалгебра из конечного набора парафермионных классов. В этом разделе мы вычислим структурные константы операторной алгебры вырожденных полей в "иррациональном" случае. Структурные константы минимальных моделей можно получить подходящим предельным переходом.

Рассмотрим четырехточечную функцию (3.13) с $R_{K_1}(z,\bar z) \equiv$ $\equiv R^{(+)}_{K_1(1,2)}(z,\bar z)$; $R_{K_2} = R^{(\varepsilon_2)}_{K_2(n_2,m_2)}$;

$$\mathcal{D}^{[q_1,\bar q_1]} = \mathcal{D}^{[q_1,\bar q_1]}_{(n_3,m_3)}\ ; \qquad \mathcal{D}^{[q_2,\bar q_2]} = \mathcal{D}^{[q_2,\bar q_2]}_{(n_4,m_4)}\ ,$$

где n_i, m_i – некоторые натуральные числа, удовлетворяющие условиям $n_2-m_2+\varepsilon_2\in 4Z$; $n_3-m_3-2\in 4Z$; $n_4-m_4-2\in 4Z$.

В этом случае параметры, входящие в (3.17) и (3.18) равны:

$$a_\sigma = \frac{-\varepsilon_2 n_2-6n_3+n_4-1}{8} + \frac{\varepsilon_2 m_2+6m_3-m_4}{8}\rho\,,$$

$$b_\sigma = \frac{-\varepsilon_2 n_2-6n_3-n_4+3}{8} + \frac{\varepsilon_2 m_2+6m_3+m_4}{8}\rho\,,$$

$$c = \frac{3-\varepsilon_2 n_2}{4} + \frac{\varepsilon_2 m_2}{4}\rho\,, \qquad \xi = -\frac{2+\varepsilon_2 n_2}{8} + \frac{\varepsilon_2 m_2-1}{8}\rho\,, \tag{4.2}$$

$$\eta_\sigma = 1/24 + 6\left(-\frac{n_3}{8} + \frac{m_3-1}{8}\rho\right).$$

Сравнивая асимптотики (3.17) с операторным разложением (1.3), получаем соотношения

$$2^{4/3}\sum_{\sigma=\pm 1}\sigma^{(\lambda+1)/2}K_\sigma N_\sigma = C^{(\lambda)}_{(1,2)(n_2,m_2)[n_2,m_2+\varepsilon_2]}C_{[n_2,m_2+\varepsilon_2][n_3,m_3][n_4,m_4]} \tag{4,3а}$$

$$2^{4/3}\sum_{\sigma=\pm 1}\sigma^{(\lambda+1)/2}\tilde{K}_\sigma\left(1-\frac{\tilde{a}_\sigma}{a_\sigma}\right)^2 N_\sigma = C_{(1,2)(n_2,m_2)\{n_2 m_2-\varepsilon_2\}}C^{(\lambda)}_{\{n_2,m_2-\varepsilon_2\}[n_3,m_3][n_4,m_4]} \tag{4.3б}$$

$$\sum_{\sigma=\pm 1}\sigma^{(\lambda+1)/2}f^{\delta}_{\sigma}N_\sigma = C^{(\lambda)}_{(1,2)(n_3,m_3+\delta)[n_3,m_3]}C^{(\lambda)}_{(n_2,m_2)(n_3,m_3+\delta)[n_4,m_4]} \tag{4.3в}$$

где

$$f^{\delta}_{+} = \frac{\gamma(c-a_\delta-b_\delta)\gamma(a_\delta)\gamma(b_\delta)}{\gamma(c-a_\delta)\gamma(c-b_\delta)},$$

$$f^{\delta}_{-} = -(a_{-\delta})^{-2}\gamma(1+a_{-\delta}+b_{-\delta}-c), \quad \delta=\pm. \tag{4.4}$$

Нижние индексы при структурных константах в (4.3) (и ниже) взяты в скобки вида (), [ ] и { } в зависимости от типа соответствующих полей R, $\mathcal{D}$, или S соответственно. Верхний индекс λ = + (–) указывает на то, что один из трех нижних индексов соответствует полю типа $\mathcal{D}^{[q,q]}$ $(\mathcal{D}^{[q,-q]})$.

Предполагается, что (опущенные) зарядовые индексы структурных констант принимают значения, обеспечивающие Z_3 и $\tilde{Z}_3$ инвариантность. Если вдобавок к этому потребовать, чтобы зарядовый индекс первого поля типа R (если они фигурируют в структурной константе) равнялся нулю, то значения зарядовых индексов определяются с точностью до C сопряжения.

Аналогичные соотношения получаются исследованием четырехточечников (3.19) и (3.22). В первом случае имеем

$$\sum_{\sigma=\pm 1} \sigma^{(\lambda+1)/2} K_\sigma \mathcal{M}_\sigma = C^{(\lambda)}_{(1,2)(n_2,m_2)[n_2 m_2+\varepsilon_2]}\, C^{(\lambda)}_{[n_2,m_2+\varepsilon_2]\{n_3 m_3\}[n_4,m_4]}\,, \tag{4.5а}$$

$$\sum_{\sigma=\pm 1} \sigma^{(\lambda+1)/2} g_\sigma^{\delta} \mathcal{M}_\sigma = C^{(\lambda)}_{(1,2)(n_3,m_3+\delta)\{n_3,m_3\}}\, C^{(\lambda)}_{(n_2,m_2)(n_3,m_3+\delta)[n_4,m_4]}\,, \tag{4.5б}$$

$$\sigma^{(\lambda+1)/2} h_\sigma \mathcal{M}_\sigma = C^{(\lambda)}_{(1,2)(n_4,m_4-\sigma)[n_4,m_4]}\, C_{(n_2,m_2)\{n_3,m_3\}(n_4,m_4-\sigma)}\,, \tag{4.5в}$$

где

$$g_\sigma^{+} = \frac{\gamma(c-a_\sigma-b_\sigma)\,\gamma(a_\sigma)\,\gamma(b_\sigma)}{\gamma(c-a_\sigma)\,\gamma(c-b_\sigma)}\,, \tag{4.6а}$$

$$g_\sigma^{-} = \gamma(a_\sigma + b_\sigma - c)\,, \tag{4.6б}$$

$$h_+ = \frac{\gamma(a_+)\,\gamma(b_+-a_+)}{\gamma(c-a_+)}\,, \tag{4.6в}$$

$$h_- = \gamma(b_-)\,\gamma(a_- - b_-)/\gamma(c-a_-)\,, \tag{4.6г}$$

а параметры (3.21) можно переписать в виде

$$a_\sigma = \frac{1+\sigma n_4 - n_3 - \varepsilon_2 n_2}{8} + \frac{m_3 - \sigma m_4 + \varepsilon_2 m_2}{8}\rho\,,$$

$$\mathfrak{b}_{б} = \frac{5-6n_4-n_3-\varepsilon_2 n_2}{8} + \frac{m_3+6m_4+\varepsilon_2 m_2}{8}\rho ,$$

$$c = \frac{3-\varepsilon_2 n_2}{4} + \frac{\varepsilon_2 m_2}{4}\rho . \qquad (4.7)$$

Таким же образом, рассматривая (3.22), получаем

$$N\,\gamma(1-c+a)\,\gamma(1-c+\mathfrak{b})/\gamma(2-c) =$$

$$= C_{(1,2)(n_2 m_2)\{n_2,m_2-\varepsilon_2\}}\, C_{\{n_2,m_2-\varepsilon_2\}\{n_3,m_3\}\{n_4,m_4\}} ; \qquad (4.8а)$$

$$N g^{б} = C_{(1,2)(n_3,m_3+б)\{n_3,m_3\}}\, C_{(n_3,m_3+б)(n_2,m_2)\{n_4,m_4\}} , \qquad (4.8б)$$

где

$$g^{+} = \gamma(c-a-\mathfrak{b})\,\gamma(a)\,\gamma(\mathfrak{b})/(\gamma(c-a)\,\gamma(c-\mathfrak{b})) ,$$

$$g^{-} = \gamma(a+\mathfrak{b}-c) ,$$

$$a = \frac{7+n_4-\varepsilon_2 n_2-n_3}{8} + \frac{m_3+\varepsilon_2 m_2-m_4}{8}\rho , \qquad (4.9)$$

$$\mathfrak{b} = \frac{7-n_4-\varepsilon_2 n_2-n_3}{8} + \frac{m_3 \quad m_2+m_4}{8}\rho .$$

Совместное исследование соотношений (4.3),(4.5) и (4.8) показывает, что в (4.3)

$$N_- = 0\,(N_+ = 0),\ \text{если}\ \frac{m_2+m_3+m_4-n_2-n_3-n_4-\varepsilon_2-4}{4} = 0\,(\mathrm{mod}\,2)\,(=1\,(\mathrm{mod}\,2)), \quad (4.10)$$

$$\mathcal{M}_- = 0\,(\mathcal{M}_+ = 0),\ \text{если}\ \frac{m_2+m_3+m_4-n_2-n_3-n_4-\varepsilon_2-2}{4} = 0\,(\mathrm{mod}\,2)\,(=1\,(\mathrm{mod}\,2)), \quad (4.11)$$

а в (4.8)

$$N = 0,\ \text{если}\ \frac{m_2+m_3+m_4-n_2-n_3-n_4-\varepsilon_2}{4} = 1\,(\mathrm{mod}\,2)\,. \quad (4.12)$$

Условия (4.10) - (4.12) являются отражением свойства самодуальности нашей теории.

Рассмотрим частный случай (4.3), когда $n_2 = 1$, $m_2 = 2$, $n_3 = n_4 = n$; $m_3 = m_4 = m$. Тогда правые части уравнений (4.3б) будут равняться 1 , так как поле $S_{(1,1)}$ совпадает с единичным оператором (мы предполагаем стандартную единичную нормировку для двухточечных корреляционных функций). Следовательно

$$N_- = 0, \quad N_+ = 2^{-2/3}\left(\tilde{\varkappa}_+\left(1-\tilde{a}_-/a_+\right)^2\right)^{-1}. \quad (4.13)$$

Подставляя их в (4.3в), найдем

$$C^{(\lambda)}_{(1,2)(n,m+\delta)[n,m]} = \lambda^{(1+\delta)/2}\, 2^{-4/3}\left(\frac{\gamma((\rho-1)/4)\,\gamma((1-\delta n)/4+(1+\delta m)/4\rho)}{\gamma((\rho-1)/2)\,\gamma((2-\delta n)/4+\delta m/4\rho)}\right)^{1/2} \quad (4.14)$$

Аналогично из (4.6а,б) получаем

$$C_{(1,2)(n,m+\delta)\{n,m\}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma((\rho-1)/4)\,\gamma(\delta n/4-\delta m/4\rho)}{\gamma((\rho-1)/2)\,\gamma((1+\delta n)/4-(1+\delta m)/4\rho)}\right)^{1/2}. \qquad (4.15)$$

Отметим, что все формулы этого раздела останутся справедливыми, если везде произвести замену

$$\Phi_{(n,m)} \longleftrightarrow \Phi_{(m,n)} \quad ; \quad \rho \longleftrightarrow \rho' = 1/\rho\,. \qquad (4.16)$$

Подставляя (4.14) и (4.15) в (4.3), (4.5) и (4.8), и с учетом (4.10) - (4.13) исключая из них нормировочные константы N_σ, $\mathcal{M}_\sigma$ и N, можно получить рекурентные соотношения, которые совместно с аналогичными соотношениями, получаемыми заменой (4.16), полностью определяют все структурные константы алгебры. Из-за громоздкости соответствующих выражений здесь приведем лишь решение для $C_{\{n_1,m_1\}\{n_2,m_2\}\{n_3m_3\}}$, в случае, когда $n_1+n_3-n_2-1=8S$, $m_1+m_3-m_2-1=8\ell$ $(S,\ell\in N)$.

$$C_{\{n_1,m_1\}\{n_2,m_2\}\{n_3,m_3\}} = \rho^{-16S\ell+2\ell-2S+2}\left(\frac{\gamma(-1/4+\rho/4)\,\gamma(\nu_a-\mu_a\rho)}{\gamma(1/4-\rho/4)\,\gamma(-\mu_a+\nu_a\rho')}\right)^{1/2}\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{S}\prod_{j=1}^{\ell}\left[(j-\sigma+(\sigma-i)\rho')(\mu_a+\sigma-j-(\nu_a+\sigma-i)\rho')\right]^{-2}\times \qquad (4.17)$$

$$\times\prod_{i=1}^{S}\gamma(\sigma+(i-\sigma)\rho')\,\gamma(\mu_a+\sigma-(\nu_a+\sigma-i)\rho')\prod_{j=1}^{\ell}\gamma(\sigma+(j-\sigma)\rho)\,\gamma(\nu_a+\sigma-(\mu_a+\sigma-j)\rho),$$

где $\nu_a=(-)^{a+1}n_a/4$, $\mu_a=(-)^{a+1}m_a/4$,по индексам $б\in\{0,\ 1/4,\ 2/4,\ 3/4\}$ и $a\in\{1,2,3\}$ подразумевается произведение. Отметим, что используя (4.17) с помощью (4.3,) , (4,5) и (4,8) нетрудно получить аналогичные замкнутые выражения и для остальных структурных констант. Например, подставляя (4.17) в (4.8), легко определить структурную константу $C_{(n_1,m_1)(n_2,m_2)\{n_3,m_3\}}$, если $n_1+n_3-n_2-1\in 8N$, $m_1+m_3-m_2-1+\varepsilon_2 \in 8N\pm 1$.

Уравнения (4.3, (4.5) и (4.8) яляются результатом исследования только тех особенностей корреляционных функций, которые соответствуют появлению в промежуточных каналах"первичных" полей. Исследование остальных главных особенностей позволяет найти структурные константы, имеющие по одному индексу, соответствующему полям вида $A_{-1/2}$ $\bar{A}_{-1/2}R$; $A_{-2/3}$ $\bar{A}_{-2/3}\mathcal{D}$ или $A_{-1/3}$ $\bar{A}_{-1/3}S$.

Построенная здесь операторная алгебра, кроме очевидной симметрии $S\to S$, $\mathcal{D}\to\mathcal{D}$; $R\to -R$, обладает инвариантностью относительно еще двух отражений

$$\Phi_{(n,m)}\to(-)^{n+1}\Phi_{(n,m)}\ ; \tag{4.18}$$

$$S_{(n_1,m_1)}\to(-)^{(m_1-n_1)/4}S_{(n_1,m_1)} \tag{4.19а}$$

$$\mathcal{D}^{[q,\bar{q}]}_{(n_2,m_2)}\to(-)^{(m_2-n_2-2)/4}\mathcal{D}^{[-q,\bar{q}]}_{(n_2,m_2)} \tag{4.19б}$$

$$R^{(\varepsilon)}_{(n_3,m_3)}\to(-)^{(m_3-n_3-\varepsilon)/4}\tilde{R}^{(\varepsilon)}_{(n_3,m_3)}, \tag{4.19в}$$

где знак $\sim$ над R означает, что при преобразовании (4.19в) в случае необходимости следует менять зарядовый индекс таким образом, чтобы обеспечить сохранение $\tilde{z}_3$ заряда в операторных разложениях, или в корреляционных функциях. (4.19а-в) являются преобразованиями дуальности.

При переходе к пределу унитарных минимальных моделей ($\rho = (P+4)/P$, $P = 3,4,\dots$) поля $\Phi_{(n,m)}$ и $\Phi_{(P+4-n,\,P-m)}$ следует отождествить. В результате образуется операторная алгебра, содержащая конечное число парафермионных классов $[\Phi_{(n,m)}]$ с $1 \leqslant n \leqslant P+3$, $1 \leqslant m \leqslant P-1$. При отождествлении полей $\Phi_{(n,m)}$ и $\Phi_{(P+4-n,\,P-m)}$ симметрия (4.18) ((4.19)) нарушается, если число P нечетное (четное).

Нарушение (4.19) при четном P связано с тем, что существует поле $\mathcal{D}_{(P/2+2,\,P/2)}$, обладающее свойством $A_0 \mathcal{D}^{[-1,-1]}_{(P/2+2,\,P/2)} = \omega \varkappa \mathcal{D}^{[1,-1]}_{(P/2+2,\,P/2)} = 0$.

Автор выражает благодарность А.Б.Замолодчикову за ценные обсуждения и С.Г.Матиняну за стиммулирующий интерес к работе.

Приложение

Здесь приведем краткий вывод дифференциальных уравнений для $G^{[q,\bar q]}_{K_1,K_2}(z,\bar z)$ и $G(z,\bar z)$ (см.разд.3). Рассуждения, аналогичные приведенным в третьем разделе, показывают, что

$$\langle \Psi(z) R_{K_1}(z_1,\bar z_1) R_{K_2}(0) A_{-1/3} S(z_3,\bar z_3) \mathcal{D}^{[-1,\bar q]}(z_4,\bar z_4)\rangle (z-z_1)^{1/3} z^{4/3} \times$$
$$\times\left(\sqrt{z z_{31}} - \sqrt{(z-z_1) z_3}\right)^{1/3}\left(\sqrt{z z_{31}} + \sqrt{(z-z_1) z_3}\right)^{2/3}\left(\sqrt{z z_{41}} - \sqrt{(z-z_1) z_4}\right)^{1/3}\times$$
$$\times\left(\sqrt{z z_{41}} + \sqrt{(z-z_1) z_4}\right)^{2/3} = \left(A + B\sqrt{z(z-z_1)}\right)/(z-z_1) +$$
$$+ \left(C + \mathcal{D}\sqrt{z(z-z_1)}\right)/(z-z_3) + \qquad (\text{П } 1)$$
$$+ E\left(\sqrt{z_4 z_{41}} + \sqrt{z(z-z_1)}\right)/(z-z_4) + F\,,$$

где

$$A = \langle A_0 R_{K_1} R_{K_2} A_{-1/3} S \mathcal{D}^{[-1,\bar q]}\rangle z_1^{7/3}\sqrt{z_{31} z_{41}}\,,$$

$$B = \langle A_0 R_{K_1} R_{K_2} A_{-1/3} S \mathcal{D}^{[-1,\bar q]}\rangle \frac{1}{3} z_1^{4/3}\left(\sqrt{z_3 z_{41}} + \sqrt{z_4 z_{31}}\right),$$

$$C + \mathcal{D}\sqrt{z_3 z_{31}} = \langle R_{K_1-1} R_{K_2-1} A_0 A_{-1/3} S \mathcal{D}^{[-1,\bar q]}\rangle 2^{1/3} z_{31}^{1/2} z_3^{3/2} \times$$
$$\times(-z_1)^{1/3}\left(\sqrt{z_3 z_{41}} - \sqrt{z_{31} z_4}\right)^{1/3}\left(\sqrt{z_3 z_{41}} + \sqrt{z_{31} z_4}\right)^{2/3},$$

$$C - \mathcal{D}\sqrt{z_3 z_{31}} = \omega^{K_1+1}\langle R_{K_1} R_{K_2+1} A^{+}_{1/3} A_{-1/3} S \mathcal{D}^{[-1,\bar q]}\rangle z_{31}^{1/6} z_3^{7/6}(-z_1)^{2/3}\times$$
$$\times 2^{-1/3}\left(\sqrt{z_3 z_{41}} + \sqrt{z_{31} z_4}\right)^{1/3}\left(\sqrt{z_3 z_{41}} - \sqrt{z_{31} z_4}\right)^{2/3},$$

$$2E = \bar{\omega} \langle R_{K_1-1} R_{K_2-1} A_{-1/3} S A_0 \mathcal{D}^{[-1,\bar{q}]} \rangle 2^{1/3} z_4 (-z_1)^{1/3} \times$$

$$\times \left(\sqrt{z_4 z_{31}} - \sqrt{z_{41} z_3}\right)^{1/3} \left(\sqrt{z_4 z_{31}} + \sqrt{z_{41} z_3}\right)^{2/3},$$

$$-C/z_{31} - E\sqrt{z_4/z_{41}} + F = \langle A_{-1} R_{K_1} R_{K_2} A_{-1/3} S \mathcal{D}^{[-1,\bar{q}]} \rangle z_1^{7/3} \sqrt{z_{31} z_{41}} + \qquad (\text{П } 2)$$

$$+ \langle A_0 R_{K_1} R_{K_2} A_{-1/3} S \mathcal{D}^{[-1,\bar{q}]} \rangle z_1^{4/3} \sqrt{z_{31} z_{41}} \; \frac{1}{9}\left(21 - \frac{4 z_3}{z_{31}} - \frac{4 z_4}{z_{41}} + \sqrt{\frac{z_3 z_4}{z_{31} z_{41}}}\right)$$

В (П1) произведем предельный переход $z \to 0$

$$-\frac{A}{z_1} - \frac{C}{z_3} - E\sqrt{\frac{z_{41}}{z_4}} + F = \langle R_{K_1-1} A_0 R_{K_2} A_{-1/3} S \mathcal{D}^{[-1,\bar{q}]} \rangle \bar{\omega} z_1^{4/3} \sqrt{z_3 z_4}. \qquad (\text{П } 3)$$

(П 3) и (П 2) (совместно с уравнениями, которые получаются из них аналитическим продолжением по переменной z_1 , вдоль обходящего точку z_3 контура) после подстановки $z_1 \to z$, $z_3 \to 1$, $z_4 \to \infty$ приводят к следующей системе дифференциальных уравнений.

$$\hat{L}_\sigma A_\sigma^\delta (z, \bar{z}) = \left(\frac{1}{2y(1-z)} - \frac{\delta \varkappa_2}{\lambda y \sqrt{1-z}}\right) A_\sigma^{-\delta} -$$

$$(\text{П } 4)$$

$$- \frac{2^{7/3} \Delta_3}{3 c \lambda y} (1-z)^{-4/3} \left(1 - \delta\sqrt{1-z}\right)^{2/3} Q_\sigma (z, \bar{z}); \; \delta, \sigma = \pm 1,$$

где

$$\hat{L}_\delta=(1-\delta\sqrt{1-z})^{-1/3}(1+\delta\sqrt{1-z})^{-2/3}\left(\frac{2}{3\Delta}\,z\,\frac{d}{dz}+\frac{8}{9}-\frac{4}{9(1-z)}+\left(\frac{1}{9}-\frac{y_2}{y}\right)\frac{\delta}{\sqrt{1-z}}\right),$$

$$2A_\sigma^+=\lim_{|z_4\bar z_4|\to\infty}(z_4\bar z_4)^{2\Delta_4}(\langle R_0(z,\bar z)R_0(0)A_{-1/3}S(1)\mathcal{D}^{[-1,1]}(z_4,\bar z_4)\rangle+$$

$$+\sigma\omega\langle R_0(z,\bar z)R_1(0)A_{-1/3}S(1)\mathcal{D}^{[-1,-1]}(z_4,\bar z_4)\rangle),$$

$$2A_\sigma^-=\lim_{|z_4\bar z_4|\to\infty}(z_4\bar z_4)^{2\Delta_4}(\langle R_0(z,\bar z)R_{-1}(0)A_{-1/3}S(1)\mathcal{D}^{[1,-1]}(z_4,\bar z_4)\rangle+ \tag{П 5}$$

$$+\sigma\bar\omega\langle R_0(z,\bar z)R_1(0)A_{-1/3}S(1)\mathcal{D}^{[1,1]}(z_4,\bar z_4)\rangle),$$

а определение Q_σ дано в (3.19). Нам понадобится также следующее тождество Уорда, которое получается исследованием корреляционной функции $\langle\Psi(z)R_{K_1}(z_1,\bar z_1)R_{K_2}(0)S(z_3,\bar z_3)\mathcal{D}^{[q,\bar q]}(z_4,\bar z_4)\rangle$.

$$0=\left(\frac{y_2}{y}+\frac{1}{3}-\frac{\sigma\varkappa_2}{\lambda y}\right)Q_\sigma+\frac{2^{-1/3}}{\lambda y}(1-z)^{-1/6}(z)^{1/3}\sum_{\delta=\pm1}\delta(1-\delta\sqrt{1-z})^{1/3}A_\sigma^\delta \tag{П 6}$$

Из (П 6) и (П 4) найдем, что функция $z^\xi(1-z)^\eta Q_\sigma(z,\bar z)$ удовлетворяет гипергеометрическому дифференциальному уравнению с параметрами, приведенными в (3.21).

Аналогичное исследование корреляционных функций $\langle\Psi(z)R_{K_1}(z_1,\bar z_1)\times R_{K_2}(0)A_{-1/3}S(z_3,\bar z_3)S(z_4,\bar z_4)\rangle$ и $\langle\Psi(z)R_{K_1}(z_1,\bar z_1)S(z_3,\bar z_3)S(z_4,\bar z_4)\rangle$ приводит к гипергеометрическому дифференциальному уравнению для $z^\xi(1-z)^\eta G(z,\bar z)$, решение и параметры которого приведены в (3.23) и (3.24) соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Belavin A.A., Polyakov A.M., Zamolodchikov A.B. Infinite Conformal Symmetry in Two Dimensional Quantum Field Theory Nucl.Phys., 1984, vol.B241, p.333.

2. Friedan D., Qiu Z., Shenker S. Conformal Invariance, Unitarity, and Critical Exponents in Two Dimensions.- Phys. Rev. Lett. 1984, 52, p.1575

3. Bershadsky M., Knizhnik V., Teitelman M. Superconformal Symmetry in Two Dimensions.- Phys.Lett., 1985. vol.B151, p.31

4. Eichenherr H. Minimal Operator Algebras in Superconformal Quantum Field Theory.- Phys.Lett., 1985, vol.B151, p.21

5. Frieden D., Qiu Z., Shenker S. Superconformal Invariance In Two Dimensions and the Tricritical Ising Model.-Phys. Lett., 1985, vol.151B, p.37.

6. Замолодчиков А.Б., Фатеев В.А. Нелокальные (парафермионные) токи в двухмерной конформной квантовой теории поля и самодуальные критические точки в Z_N - симметричных статических системах - ЖЭТФ, 1985, т.89, с.380.

7. Замолодчиков А.Б., Фатеев В.А. Поля беспорядка в двухмерной конформной квантовой теории поля и N = 2 расширенная суперсимметрия. ЖЭТФ, 1986, т.90, с.1553.

8. Замолодчиков А.Б., Фатеев В.А. Представления алгебры "парафермионных токов" спина 4/3 в двухмерной конформной теории поля. Минимальные модели и трикритическая Z_3 модель Поотса. ТМФ, 1987, т.16.

9. Замолодчиков А.Б. Двухмерная конформная симметрия и критические четырехспиновые корре..ляционные функции в модели Ашкина-Теллера. ЖЭТФ, 1986, т.90, с.1808.

10. Fateev V.A., Zamolodchikov A.B. Conformal Field Theory Models in Two Dimensions Having Z_3 Symmetry.- Nucl.Phys. 1987, vol.B280 FS 18 N.4, p.644.

11. Dotsenko Vl.S., Fateev V.A. Four- Point Correlation Functions and the Operator Algebra in The 2D Conformal Invariant Theories with the Central Carge C 1.- Nucl.Phys. 1985 vol.B251, FS 13 p.691.

12. Замолодчиков А.Б., Погосян Р.Г. Операторная алгебра в двухмерной суперконформной теории поля. ЯФ, 1987, т.47.

Рукопись поступила 15 ноября 1986 г.

Р.Г.ПОГОСЯН

ОПЕРАТОРНАЯ АЛГЕБРА В ДВУХМЕРНОЙ КОНФОРМНОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ, СОДЕРЖАЩЕЙ СОХРАНЯЮЩИЕСЯ "ПАРАФЕРМИОННЫЕ" ТОКИ СО СПИНОМ 4/3

Редактор Л.П.Мукаян

Технический редактор А.С.Абрамян

Подписано в печать 7/III-89г. ВФ-01943 Формат 60x84/16
Офсетная печать.Уч.изд.л. 1,5 Тираж 299 экз.Ц.22 к.
Зак.тип.№ 004 Индекс 3649

Отпечатано в Ереванском физическом институте
Ереван 36, ул.Братьев Алиханян 2

The address for requests:
Information Department
Yerevan Physics Institute
Markaryan St., 2
Yerevan, 375036
Armenia, USSR

ИНДЕКС 3649

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ