

ИНДЕКС 3649



ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Препринт ЕФИ-1145(22)-89

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ  
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
YEREVAN PHYSICS INSTITUTE

---

Э.Д.ГАЗАЗЯН, В.Г.КОЧАРЯН, Г.Г.ОКСУЗЯН

ТОРОИДАЛЬНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ  
И КРУГЛЫМ ПОПЕРЕЧНЫМИ СЕЧЕНИЯМИ

ЦНИИатоминформ  
ЕРЕВАН - 1989

Է.Դ.ԳԱԶԱԶԻԱՆ, Վ.Գ.ՔՈՉԱՐՅԱՆ, Գ.Գ.ՕՔՍՈՒԶԻԱՆ

ՅՈՐՈՒՄԵՆԻ ԻՆՏԵՆՍԻՎՈՒՄԻՆ ԵՎ ԵՐՋԱՆԱԶԵՎ ԼԱԳՆԱԿԱՆ  
ԿՏՐՎԱԾՔՆԵՐՈՎ

Հետևողական մոտավորության եղանակով որոշվել են թորածև ուղղանկյունների սեփական համախոլթյուններն ու Ֆուլկերիաները շրջանածև ուղղանկյուն լայնական կտրվածքներով: Հաշվարկի արդյունքները՝ ըստ ըստացված բանաժների նկարագրված են զատկերանկարների վրա: Ցույց է արված, որ ստացված արդյունքները թույլ են աալիս կառուցել թորածև ուղղանկյուն առաջադրված մոդի սվյալ համախոլթյան վրա, որը բացառում է ալիքների ալլ մոդերի /տիպերի/ ծնունդը:

Երևանի Ֆիզիկայի ինստիտուտ

Երևան 1989

Введение

Ранее известные решения, определяющие собственные электромагнитные колебания в тороидальных резонаторах, имеют либо ограниченную область применения (например, в [1] задача решалась путем искусственного внесения неоднородности), либо не представляются достоверными ([2, 3], см. также [1]), либо относятся к частному случаю однородных тороидальных колебаний [4] (см. также [1]). Между тем, представляет несомненный интерес изучение (хотя бы приближенное) всей картины поля со всеми возможными типами и модами колебаний, возникающих в тороидальном резонаторе при возбуждении его на заданной частоте и типе волны. Знание картины поля в резонаторе в целом позволит отмежеваться от сопутствующих мод (и типов) волн.

В настоящей работе развивается общая методика приближенного расчета электромагнитных полей в тороидальных резонаторах. С целью единого рассмотрения тороидов как с прямоугольным, так и с круглым поперечными сечениями предлагается метод последовательных приближений (МПП) [5], позволяющий с достаточно вы-

сокой точностью определить компоненты электромагнитных полей и собственные частоты этих резонаторов. При этом наличие строгих решений для коаксиальных колебаний в торе с прямоугольным поперечным сечением позволяет контролировать точность и строгость получаемых решений.

В работе особое внимание уделяется проблеме снятия вырождения колебаний в тороидах; исследуется эффект возникновения дуплетных мод, появляющихся из-за снятия вырождения, их расползания по частоте по мере изменения геометрических размеров резонатора.

Расчеты выполнены с помощью ЭВМ РС IBM. Результаты этих расчетов иллюстрированы на графиках, выданных РС IBM. Эти графики позволяют выбрать оптимальные размеры и рабочую область частот, свободную от мешающих "паразитных" мод.

### I. Тороидальный резонатор с прямоугольным поперечным сечением.

#### Коаксиальные колебания

Выражения для полей собственных электромагнитных колебаний в коаксиальном резонаторе могут быть найдены совершенно строго из уравнений Максвелла, записанных в цилиндрической системе координат. При этом E и H-типы колебаний определяются, соответственно, когда  $H_z = 0$  или  $E_z = 0$  (z - ось цилиндра). Их мы назовем коаксиальными колебаниями или z-классификацией колебаний.

Для общности последующего рассмотрения мы будем исходить из уравнений Максвелла, записанных в "квазицилиндрической" системе координат (z, ξ, ψ), связанной с декартовой соотношени-

ями (см.рис.1)

$$z = z, \quad x + iy = h_\psi e^{i\psi}, \quad (1)$$

где  $0 < z \leq 2b$ ,  $-1 < \xi < 1$ ,  $0 < \psi < 2\pi$ ,

$$h_\psi = Rh = R(1 + \rho_0 \xi), \quad \rho_0 = \frac{a}{R}.$$

В этой системе координат из уравнений Максвелла вытекает следующее волновое уравнение

$$\frac{1}{h_\psi} \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial \Phi_z}{\partial \xi} + \frac{\rho_0^2}{h^2} \frac{\partial^2 \Phi_z}{\partial \psi^2} + (\varkappa^2 - \nu^2) \Phi_z = 0, \quad (2)$$

где

$$\Phi_z = \begin{Bmatrix} H_z \\ E_z \end{Bmatrix}, \quad \varkappa = \frac{a}{c} \omega, \quad \nu = \frac{\pi n a}{2b}.$$

В уравнениях Максвелла зависимость по z в  $\Phi_z$  задана комплексной функцией  $e^{i\kappa z}$  ( $\kappa = \frac{\nu}{a}$ ), причем для удовлетворения граничному условию по z для H-типа колебаний необходимо брать реальную часть этой функции ( $\cos \kappa z$ ), а для E-типа колебаний - мнимую ее часть ( $\sin \kappa z$ ). После разделения переменных по ξ и ψ решение уравнения (2) будет, соответственно, для H- и E-типов колебаний

$$\Phi_z = \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} = \left\{ J_m(\varkappa \frac{1+\rho_0 \xi}{1-\rho_0}) N'_m(\varkappa) - N_m(\varkappa \frac{1+\rho_0 \xi}{1-\rho_0}) J'_m(\varkappa) \right\} \cos m\psi \frac{\cos \kappa z}{\sin \kappa z} \quad (3)$$

Зависимость по ψ выбрана в виде  $\cos m\psi$  в силу условий  $\Phi_z \neq 0$  при  $m = 0$ . Значение  $\varkappa$  определяется из гранич-

ного условия на поверхностях  $\xi = \pm 1$  решения (3), что приводит к следующим дисперсионным уравнениям для E - типов колебаний

$$J_m(x_{mp}) N_m(\eta x_{mp}) = J_m(\eta x_{mp}) N_m(x_{mp}), \quad (4a)$$

и для H - типов колебаний

$$J'_m(x'_{mp}) N'_m(\eta x'_{mp}) = J'_m(\eta x'_{mp}) N'_m(x'_{mp}), \quad (4б)$$

где

$$\eta = \frac{1 + \rho_0}{1 - \rho_0}.$$

Решение трансцендентных уравнений (4a, б) связано с математическими трудностями. С другой стороны, в дальнейшем нам придется прибегать к приближенным методам решения при определении полей тороидальных колебаний ( $\psi$  - классификация колебаний). Поэтому имеет смысл искать решения (2) МПП [5], выбрав в качестве параметра малости кривизну  $\rho_0 = a/R$ . Наличие строгого решения позволит затем судить о степени точности получаемых приближенных выражений. Решение уравнения (2) и соответствующее ему решение дисперсионного уравнения для собственных значений  $x$  в этом случае представляются в виде разложений в ряд по степеням параметра малости

$$\Phi_z = f(z) \cos m\psi \sum_l \Phi_l \rho_0^l, \quad (5a)$$

$$x^2 = \sum_l x_l^2 \rho_0^{2l}; \quad x^2 = \frac{x_{mpn}^2}{x_{mpn}'^2} = \frac{x_{mp}^2}{x_{mp}'^2} + \nu^2. \quad (5б)$$

Коэффициенты разложений  $x_l^2$  в (5б) на каждом этапе итераций

получаются почленным удовлетворением граничным условиям разложения (5a) для полей. При этом коэффициенты разложений  $x_l^2$  в (5б) оказываются отличными от нуля для четных значений  $l$ , тогда как при нечетных приближениях в (5a) участвуют также решения однородных уравнений с коэффициентами, определяющимися из граничных условий (см. ниже).

Для E - типа коаксиальных колебаний решение уравнения (2) МПП с граничными условиями  $E_z|_{\xi=\pm 1} = 0$  и  $\frac{\partial E_z}{\partial z}|_{z=0} = 0$  будет

$$E_z = \frac{\sum_l E_l(\xi) \rho_0^l}{\sqrt{1 + \rho_0 \xi}} \cos m\psi \cos \frac{\pi n z}{2B}, \quad (6)$$

где

$$E_0(\xi) = \frac{\sin \frac{\pi p}{2}}{\cos \frac{\pi p}{2}} \xi, \quad \text{когда } \begin{matrix} p & \text{четное} \\ & \text{нечетное} \end{matrix}, \quad (6a)$$

$$E_1(\xi) = E_2(\xi) = 0, \quad (6б)$$

$$E_3(\xi) = \frac{2(m^2 - \frac{1}{4})}{\pi^2 \rho^2} [(\xi^2 - 1)E_0'(\xi) - \xi E_0(\xi)], \quad (6в)$$

$$E_4(\xi) = \frac{2(m^2 - \frac{1}{4})}{\pi^2 \rho^2} \left[ \xi(\xi^2 - 1)E_0'(\xi) - \frac{3}{2} \xi^2 E_0(\xi) \right]. \quad (6г)$$

Здесь и в дальнейшем штрих означает дифференцирование по  $\xi$ .

Разложение (5б) с точностью до  $O(\rho_0^8)$  получается в виде

$$x_{nrm}^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = \frac{\pi}{4} \left(\rho^2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2} \pi^2\right) + (m^2 - \frac{1}{4}) \rho_0^2 + (m^2 - \frac{1}{4}) \left(1 - \frac{6}{\pi^2 \rho^2}\right) \rho_0^4 + (m^2 - \frac{1}{4}) \left\{ 1 - \frac{20}{\pi^2 \rho^2} \left[ \left(1 - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{15}\right) - \frac{6}{\pi^2 \rho^2} \left(1 - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{6}\right) \right] \right\} \rho_0^6 + O(\rho_0^8). \quad (7)$$

Члены разложения в (5б), (7) с нечетными номерами  $\ell$  равны нулю.

Для  $H$  - типов колебаний имеем:

$$H_z = \sum H_\ell(\xi) \rho_0^\ell \cos m\varphi \sin \frac{\pi n}{2\ell} z, \quad (8)$$

где

$$H_0(\xi) = \frac{\cos \frac{\pi p}{2} \xi}{\sin \frac{\pi p}{2} \xi}, \quad \text{, когда } \rho \begin{matrix} \text{четное} \\ \text{нечетное} \end{matrix} \quad (8a)$$

$$H_1(\xi) = -\frac{\xi}{2} H_0(\xi) - \frac{2H_0'(\xi)}{\pi^2 \rho^2}, \quad (8б)$$

$$H_2(\xi) = \frac{3}{8} \xi^2 H_0(\xi) + \frac{3\xi}{\pi^2 \rho^2} H_0'(\xi), \quad (8в)$$

$$H_3(\xi) = -\frac{5}{16} \xi^3 H_0(\xi) - \frac{\xi^2}{\pi^2 \rho^2} \left( \frac{9}{4} - 2m^2 \right) H_0'(\xi) + \frac{2\xi}{\pi^2 \rho^2} (\alpha_2^2 - 2m^2) H_0(\xi) - \frac{2}{\pi^2 \rho^2} \left( \alpha_2^2 - \frac{4\alpha_2^2}{\pi^2 \rho^2} + \frac{8m^2}{\pi^2 \rho^2} \right) H_0'(\xi), \quad (8г)$$

$$H_4(\xi) = \frac{35}{128} \xi^4 H_0(\xi) + \frac{\xi^3}{\pi^2 \rho^2} \left( \frac{17}{8} - 3m^2 \right) H_0'(\xi) - \frac{\xi^2}{\pi^2 \rho^2} \left( \frac{9}{4} - 10m^2 \right) H_0(\xi) + \frac{3\xi}{\pi^2 \rho^2} \left( \alpha_2^2 + \frac{10m^2}{\pi^2 \rho^2} \right) H_0'(\xi); \quad \alpha_2^2 = m^2 + 3/4. \quad (8д)$$

Разложение уравнения (5б) с точностью до  $O(\rho_0^6)$  будет

$$\alpha_{\text{ном}}'^2 = \frac{\pi^2}{4} \left( \rho^2 + \frac{\alpha^2 n^2}{\rho^2} \right) + \alpha_2^2 \rho_0^2 + \left[ \alpha_2^2 \left( 1 - \frac{6}{\pi^2 \rho^2} \right) + \frac{16m^2}{\pi^2 \rho^2} \right] \rho_0^4 + \quad (9)$$

$$+ \left[ \alpha_2^2 - \frac{57}{4\pi^2 \rho^2} + \frac{106m^2}{3\pi^2 \rho^2} + \frac{4m^4}{3\pi^2 \rho^2} + \frac{315}{4\pi^4 \rho^4} - \frac{259}{\pi^4 \rho^4} + \frac{28m^4}{\pi^4 \rho^4} \right] \rho_0^6 + O(\rho_0^8).$$

Уравнение (2) с граничными условиями для  $H$  - типов колебаний допускает решение также и при  $\rho = 0$ . В этом случае члены разложения (8) имеют вид

$$H_0(\xi) = \text{const}, \quad H_1 = H_2 = 0, \quad H_3(\xi) = -\frac{m^2 \xi}{3} (\xi^2 - 3) H_0, \quad H_4(\xi) = \frac{m^2 \xi^2}{3} (\xi^2 - 2) H_0, \quad (10)$$

а дисперсионное уравнение с точностью до  $O(\rho_0^8)$  - следую-

щее:

$$\alpha_{\text{ном}}'^2 = \frac{\pi \alpha^2 n^2}{\rho^2} + m^2 \rho_0^2 + \frac{m^2}{3} \rho_0^4 + \frac{(3-8m^2)m^2}{15} \rho_0^6 + O(\rho_0^8). \quad (II)$$

Остальные компоненты полей получаются из уравнений Максвелла для  $E$  - типов колебаний и выражаются через компоненту  $E_z$  следующим образом:

$$H_\xi = \frac{i\alpha\rho}{h(\alpha^2 - \nu^2)} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi}, \quad E_\xi = \frac{\alpha}{\alpha^2 - \nu^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \xi \partial z}, \quad (12)$$

$$H_\varphi = -\frac{i\alpha}{\alpha^2 - \nu^2} \frac{\partial (E_z)}{\partial \xi}, \quad E_\varphi = \frac{\rho_0 \alpha}{h(\alpha^2 - \nu^2)} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi \partial z}.$$

Компоненты полей для  $H$  - типов колебаний получаются из (12) заменами  $\vec{E} \rightarrow \vec{H}$ ,  $\vec{H} \rightarrow -\vec{E}$ ,  $\alpha_{\text{ном}} \rightarrow \alpha_{\text{ном}}'$ .

Сравнение расчетов строгих решений (4а) с решениями по формуле (7) показали, что погрешность определения собственных значений  $\alpha_{\text{ном}}$  не превышает 0,5% вплоть до  $\rho_0 \sim 0,9$  при точности  $O(\rho_0^8)$  и 1,5-3% при точности  $O(\rho_0^6)$ . На рис.2 показано различие между строгим решением (3) и выражением (6) для различных приближений определения полей. На рис.3 проиллюстрированы расчеты, проведенные по формулам (7), (9) и (II) для первых 5 хм мод ( $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ).  $H$  и  $E$  - типов колебаний тороидального резонатора с квадратным поперечным сечением. На рис.4 показано образование дуплета  $E_{12m}$  и  $E_{21m}$ , возникающего в резонаторе с квадратным сечением, а на рис.5 и 6 - расползание этого дуплета при отклонении отношения  $\alpha/\beta$  от единицы ( $\rho_0 = 0,75; 1,25$ ).

Тороидальные колебания

Если в уравнениях Максвелла, записанных в системе координат (I), классификацию электромагнитных полей на E- и H-типы произвести относительно направления азимутального угла  $\varphi$ , т.е. E-типом колебаний назвать те колебания, для которых  $H_\varphi = 0$  ( $E_\varphi \neq 0$ ), а H-типом - те колебания, для которых  $E_\varphi = 0$  ( $H_\varphi \neq 0$ ), то из этих уравнений после разделения переменных получаем следующее волновое уравнение

$$(\alpha^2 h^2 - m^2 \rho_0^2) \left[ \frac{\partial^2 \Phi_\varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\rho_0}{h} \frac{\partial \Phi_\varphi}{\partial \xi} + (\alpha^2 - \nu^2) \Phi_\varphi \right] = \quad (13)$$

$$= \alpha^2 (1+m^2) \rho_0^2 \Phi_\varphi + \frac{2m^2}{h} \rho_0^3 \frac{\partial \Phi_\varphi}{\partial \xi} + \frac{m^2 (1-m^2 \rho_0^2) \rho_0^2}{h^2} \Phi_\varphi$$

где

$$\Phi_\varphi = \begin{Bmatrix} E_\varphi \\ H_\varphi \end{Bmatrix}.$$

Уравнение (13) при  $\nu = 0$  для всех  $m$  сводится к уравнению для первой производной функции Бесселя (Неймана) порядка  $m$ , а при  $m = 0$  для всех  $\nu$  - к уравнению для функции Бесселя (Неймана) первого порядка. Строгое решение уравнения (13) в общем случае отсутствует и решение будем искать МПП, аналогично проделанному выше.

Для E-типа тороидальных колебаний решение уравнения (13) с точностью до  $O(\rho_0^5)$  будет:

$$E_\varphi = \sin \frac{\pi n}{2\theta} z \frac{\sum E_p(\xi) \rho_0^p}{\sqrt{1 + \rho_0 \xi}} \cos m\varphi, \quad (14)$$

где

$$E_0(\xi) = \frac{\sin \frac{\pi p}{2} \xi}{\cos \frac{\pi p}{2} \xi}, \quad \text{когда } p \begin{cases} \text{четное} \\ \text{нечетное} \end{cases}, \quad (14a)$$

$$E_1(\xi) = E_2(\xi) = 0, \quad (14б)$$

$$E_3(\xi) = \frac{2\alpha_2^2 (\xi^2 - 1)}{\pi^2 \rho^2} E_0'(\xi) - \left( \frac{2\alpha_2^2}{\pi^2 \rho^2} - \frac{4m^2}{\pi^2 (\rho^2 + \frac{a^2}{\theta^2} n^2)} \right) \xi E_0(\xi), \quad (14в)$$

$$E_4(\xi) = -\frac{2\alpha_2^2 \xi (\xi^2 - 1)}{\pi^2 \rho^2} E_0'(\xi) + \left( \frac{3\alpha_2^2}{\pi^2 \rho^2} - \frac{6m^2}{\pi^2 (\rho^2 + \frac{a^2}{\theta^2} n^2)} \right) \xi^2 E_0(\xi). \quad (14г)$$

В формулах (14)  $\alpha_2^2 = m^2 + 3/4$ .

Разложение (5б) с точностью до  $O(\rho_0^6)$  будет

$$\alpha_{\text{прт}}^2 = \frac{\pi^2}{4} \left( \rho^2 + \frac{a^2}{\theta^2} n^2 \right) + \alpha_2^2 \rho_0^2 + \left[ \alpha_2^2 \left( 1 - \frac{6}{\pi^2 \rho^2} \right) + \frac{16m^2}{\pi^2 \left( \rho^2 + \frac{a^2}{\theta^2} n^2 \right)} \right] \rho_0^4. \quad (15)$$

Так как в системе координат (I) граничное условие для H-типов колебаний на поверхностях  $\xi = \pm 1$  тороида имеет вид

$\frac{\partial(h_\varphi H_\varphi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi = \pm 1} = 0$ , то в уравнении (13) целесообразно провести замену переменной  $H_\varphi h_\varphi \rightarrow H$ . В этом случае уравнение (13) приобретает вид

$$(\alpha^2 h^2 - m^2 \rho_0^2) \left[ \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + (\alpha^2 - \nu^2) H \right] = \frac{\alpha^2 h^2 + m^2 \rho_0^2}{h} \rho_0 \frac{\partial H}{\partial \xi} + \frac{m^2 (\alpha^2 h^2 - m^2 \rho_0^2)}{h^2} \rho_0^2 H. \quad (15a)$$

Решение уравнения (13a) с граничными условиями для H-типа колебаний с точностью до  $O(\rho_0^5)$  будет

$$H = H_\varphi h_\varphi = \cos \frac{\pi n}{2\delta} \approx \sum_l H_l(\xi) \cos m\varphi, \quad (16)$$

где

$$H_0(\xi) = \frac{\sin \frac{\pi p}{2}}{\cos \frac{\pi p}{2}} \xi, \quad \text{когда } p \begin{cases} \text{нечетное} \\ \text{четное} \end{cases}, \quad (16a)$$

$$H_1(\xi) = \frac{\xi}{2} H_0(\xi) - \frac{2H_0'(\xi)}{\pi^2 p^2}, \quad (16б)$$

$$H_2(\xi) = -\frac{\xi^2}{8} H_0(\xi) - \frac{\xi H_0'(\xi)}{\pi^2 p^2}, \quad (16в)$$

$$H_3(\xi) = \frac{\xi^3}{16} H_0(\xi) + (2m^2 + \frac{1}{4}) \frac{\xi^2}{\pi^2 p^2} H_0'(\xi) - \left( \frac{1}{2\pi^2 p^2} + \frac{2m^2}{\pi^2 p^2} - \frac{4m^2}{\alpha_0^2} \right) \xi H_0(\xi) + \frac{1}{\pi^2 p^2} \left( \frac{1}{2} - 2m^2 - \frac{2}{\pi^2 p^2} - \frac{8m^2}{\pi^2 p^2} + \frac{16m^2}{\alpha_0^2} \right) H_0'(\xi), \quad (16г)$$

$$H_4(\xi) = -\frac{5\xi^4}{128} H_0(\xi) - \frac{15\alpha_0^2 \xi^3}{12} H_0'(\xi) + \left( \frac{2m^2}{\pi^2 p^2} - \frac{7}{8\pi^2 p^2} - \frac{m^2}{\alpha_0^2} \right) \xi^2 H_0(\xi) + \left( \frac{5\alpha_0^2}{12} + \frac{15}{32} - \frac{7}{4\pi^2 p^2} - \frac{2m^2}{\alpha_0^2} + \frac{4m^2}{\pi^2 p^2} \right) \xi H_0'(\xi). \quad (16д)$$

В формулы (16) входят члены разложения (5б), имеющие вид

$$\alpha_0^2 = \frac{\pi^2}{4} (p^2 + \frac{\alpha^2}{8} n^2); \quad \alpha_2^2 = m^2 - 1/4, \quad (17)$$

$$\alpha_4^2 = \frac{\alpha_2^2}{3} + \frac{15}{16} - \frac{7}{4\pi^2 p^2} - \frac{2m^2}{\alpha_0^2} + \frac{4m^2}{\pi^2 p^2}.$$

Члены (17), входящие в разложение (5б), обеспечивают точность  $O(\rho_0^6)$  в дисперсионном уравнении.

Разложение (16) имеет смысл и при  $p = 0$ . В этом случае члены разложения равны

$$H_0 = \text{const}, \quad H_1 = H_2 = 0, \quad H_3(\xi) = \frac{m^2 \xi}{3} (\xi^2 - 3) H_0, \quad H_4 = \frac{m^2 \xi^2}{6} (\xi^2 - 2) H_0, \quad (18)$$

а разложение (5б) для этого случая будет иметь следующий вид (с точностью до  $O(\rho_0^8)$ )

$$\alpha_{\text{мон}}^{12} = \frac{\pi^2 \alpha^2}{4\delta^2} n^2 + m^2 \rho_0^2 + \frac{5m^2}{3} \rho_0^4 + \frac{(101 - 24m^2)m^2}{45} \rho_0^6. \quad (19)$$

Остальные компоненты полей получаются из уравнений Максвелла и выражаются через  $E_\varphi$  соотношениями

$$H_\xi = -\frac{i\alpha h a}{\alpha^2 h^2 - m^2 \rho_0^2} \frac{\partial (hE_\varphi)}{\partial z}, \quad E_\xi = \frac{\rho_0}{\alpha^2 h^2 - m^2 \rho_0^2} \frac{\partial^2 (hE_\varphi)}{\partial \xi \partial \varphi},$$

$$H_z = \frac{i\alpha h}{\alpha^2 h^2 - m^2 \rho_0^2} \frac{\partial (hE_\varphi)}{\partial \xi}, \quad E_z = \frac{\rho_0 a}{\alpha^2 h^2 - m^2 \rho_0^2} \frac{\partial^2 (hE_\varphi)}{\partial z \partial \varphi}.$$

Для  $H$ - типа колебаний соответствующие соотношения получаются заменами  $\vec{H} \rightarrow -\vec{E}$ ,  $\vec{E} \rightarrow \vec{H}$ ,  $\alpha'_{\text{прт}} \rightarrow \alpha_{\text{прт}}$ .

Так как методика и степень строгости расчета не отличаются от методики и степени строгости определения коаксиальных колебаний, то можно утверждать, что полученные выражения обладают такой же, т.е. достаточно высокой точностью.

В отличие от коаксиальных колебаний в тороидальном резонаторе с прямоугольным поперечным сечением, образованном в результате закорачивания в плоскостях  $z_1 = 0$  и  $z_2 = 2\delta$  коаксиального волновода, тороидальные колебания соответствуют изогнутому прямоугольному волноводу, замкнутому на себя, и в пределе при  $\rho_0 = 0$  переходят в колебания в прямоугольном волноводе. Как видно из рис.7, где приведены результаты расчетов по формулам (15), (17) и (19), для тороидального резонатора с квад-

ратным поперечным сечением моды с индексами  $mpr$  и  $mpr$  образуют дуплеты, которые расходятся с ростом  $\rho_0$ , а при  $\rho_0 = 0$  соответствуют вырожденным модам прямолинейного волновода с квадратным сечением (вырождение  $pr - rp$ ). Возникновение дуплетов говорит об эффекте снятия вырождения кривизной гора. Наблюдается также снятие  $E-H$  вырождения мод  $H_{11m}$  и  $E_{11m}$  [6]. Снятие вырождения имеет место и для мод резонатора с прямоугольным поперечным сечением с таким отношением длин сторон, когда  $a/b$  - рациональное число. В частности, на рис.8 проиллюстрировано упомянутое в [6] вырождение мод  $H_{01}$  и  $H_{20}$  прямоугольного волновода и снятие этого вырождения при наличии кривизны ( $a/b = 1/2$ ).

#### Тороидальный резонатор с круглым поперечным сечением

Если рассматривать круглый тороидальный резонатор как тело, получаемое при изгибе цилиндрического волновода и замыкания на себя, то целесообразно записать уравнения Максвелла в "квазиторoidalной" системе координат (рис.9 [1-3]) с метрическими коэффициентами  $h_z = 1$ ,  $h_\theta = r$  и  $h_\varphi = Rh = R(1 - \rho_0 \xi \cos \theta)$ . Связь "квазиторoidalной" системы координат с декартовой дается следующими соотношениями

$$x + iy = Rhe^{i\varphi}; \quad z = R\rho \sin \theta, \quad (21)$$

где  $\rho_0 = \frac{a}{R}$ ,  $-1 < \xi = \frac{z}{a} < 1$ , ( $0 \leq z \leq a$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $0 < \varphi \leq 2\pi$ )  
После разделения уравнений Максвелла на ( $H_\varphi = 0$ ) и ( $E_\varphi = 0$ ) типы колебаний приходим к следующему волновому уравнению

$$\begin{aligned} \varkappa^2 \hat{L} F &= [2\varkappa^2 \xi \cos \theta \hat{L} F + \varkappa^2 \hat{C} F] \rho_0 + \\ &+ [m^2 \hat{L} F + \varkappa^2 (1+m^2) F - \varkappa^2 \xi \cos \theta \hat{C} F - \varkappa^2 \xi^2 \cos^2 \theta \hat{L} F] \rho_0^2 - \\ &- \left[ \frac{3m^2}{h} \hat{C} F \right] \rho_0^3 + \left[ \frac{m^2(1-m^2)}{h^2} F \right] \rho_0^4, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} F &= \begin{Bmatrix} H_\varphi \\ E_\varphi \end{Bmatrix}; \quad \hat{L} = \left[ \xi^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \xi^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \varkappa^2 \right]; \\ \varkappa &= \frac{\alpha \omega}{c}; \quad \hat{C} = \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \cos \theta - \xi^{-1} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right]. \end{aligned}$$

Решение уравнения (22) МПП аналогично выражениям (5a,б)(п.1). Легко заметить, что в решении уравнения (22) на первых этапах итераций зависимость от угла  $\theta$  будет входить в общем виде как  $\cos(n\theta + \theta_0)$ , где  $\theta_0$  - произвольная константа. Однако для удовлетворения граничному условию, начиная со второго приближения для  $H$ -типов и с четвертого приближения для  $E$ -типов колебаний, оказывается необходимым конкретизировать значение  $\theta_0$ . При этом единственно возможными оказываются значения  $\theta_0 = 0$ , либо  $\theta_0 = \pi/2$ . Тогда зависимость от угла  $\theta$  представится в виде  $\frac{\cos n\theta}{\sin n\theta}$ , что, как будет показано ниже, обуславливает снятие вырождения колебаний по  $\theta$  и приводит к расщеплению мод с индексами  $n > 0$  на симметричные ( $H^-, E^-$ ) и несимметричные ( $H^+, E^+$ ) подмоды.

Для удовлетворения граничному условию  $H$ -типов колебаний

$\left(\frac{\partial(h_\psi H_\psi)}{\partial \xi} = 0\right)$  на поверхности  $\xi = 1$  целесообразно в уравнении (22) провести замену  $H = H_\psi h_\psi$ . Тогда решение уравнения (22) для  $H$  - типов колебаний с точностью до  $O(\rho_0^3)$  приобретает вид

$$\begin{aligned} H_\psi^\pm h_\psi \cos^{-1} m\psi &= J_n(x_0 \xi) \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} \left(1 - \frac{\xi \cos \theta}{2} \rho_0 - \frac{\xi^2 \cos^2 \theta}{8} \rho_0^2\right) + \\ &+ A_1 J_{n+1}(x_0 \xi) \left(\frac{\cos(n+1)\theta}{\sin(n+1)\theta} \rho_0 - \frac{\xi \cos(n+2)\theta}{4 \sin(n+2)\theta} \rho_0^2\right) + \\ &+ B_1 J_{n-1}(x_0 \xi) \left(\frac{\cos(n-1)\theta}{\sin(n-1)\theta} \rho_0 - \frac{\xi \cos(n-2)\theta}{4 \sin(n-2)\theta} \rho_0^2\right) + \\ &+ \left[\frac{n(n-1)}{2x_0^2} J_n(x_0 \xi) + \frac{x_0^2 \pm \delta_{n1}(x_0^2 - \frac{1}{2})}{\rho x_0(x_0^2 - n^2)} \xi J_{n+1}(x_0 \xi)\right] \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} \rho_0^2 + \\ &+ A_2 J_{n+2}(x_0 \xi) \frac{\cos(n+2)\theta}{\sin(n+2)\theta} \rho_0^2 + B_2 J_{n-2}(x_0 \xi) \frac{\cos(n-2)\theta}{\sin(n-2)\theta} \rho_0^2, \end{aligned} \quad (23)$$

где  $J_n(x_0 \xi)$  - функция Бесселя  $n$ -го порядка,  $x_0 = x'_{np}$  -  $p$ -ый корень первой производной от функции Бесселя  $n$ -го порядка

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{x_0}{4(x_0^2 - n^2 - n)}, & A_2 &= \frac{x_0^2 [2(x_0^2 - n^2) - n]}{32(n+1)(x_0^2 - n^2 - 2n)(x_0^2 - n^2 - n)} \\ B_1 &= -\frac{x_0}{4(x_0^2 - n^2 + n)}, & B_2 &= \frac{x_0^2 [2(x_0^2 - n^2) - n](1 - \delta_{n1})}{32(n+1)(x_0^2 - n^2 + 2n)(x_0^2 - n^2 + n)}. \end{aligned}$$

В написанных выражениях для общности записи использован символ Кронекера  $\delta_{nn'}$ , причем

$$\frac{1 - \delta_{nn'}}{n - n'} = \begin{cases} \frac{1}{n - n'} & \text{при } n \neq n' \\ 0 & \text{при } n = n'. \end{cases}$$

Коэффициенты  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  и  $B_2$ , получаемые при каждой итерации, обеспечивают выполнение граничных условий на поверхности  $\xi = 1$ .

В выражении (23) приближения  $H_3$  и  $H_4$  не просуммированы в силу малости их вклада для небольших значений  $m$  и  $\rho_0 < 0,3$  и их несущественности для инженерных расчетов, а также из-за громоздкости получаемых для этих приближений выражений, хотя именно в них начинает сказываться зависимость полей от индекса  $m$ .

Дисперсионное уравнение для  $H$  - типов колебаний с точностью до  $O(\rho_0^6)$  имеет вид

$$\begin{aligned} x_{npm,\pm}^2 &= x_0^2 + \left[m^2 + \frac{x_0^6 - 5n^2 x_0^4 + (7n^2 - 2)n^4 x_0^2 - 3n^4(n-1)}{4(x_0^2 - n^2)[(x_0^2 - n^2)^2 - n^2]} \mp \frac{\delta_{n1}(2x_0^2 - 1)}{8(x_0^2 - 1)}\right] \rho_0^2 + \\ &+ \left[m^2 \frac{x_0^6 - n^2 x_0^6 - (3n^2 + 5)n^2 x_0^4 + (5n^4 + 7n^2 - 2)n^2 x_0^2 - 2n^4(n^2 - 1)(n^2 + 2)}{2x_0^2(x_0^2 - n^2)[(x_0^2 - n^2)^2 - n^2]} + \right. \\ &+ \frac{10x_0^{10} - 78n^2 x_0^8 + (220n^2 + 109)n^4 x_0^6 - (292n^2 + 327)n^4 x_0^4 + (183n^4 + 306n^2 + 128)n^4 x_0^2 - 2n^6(n^2 - 1)(23n^2 + 67)}{64x_0^2(x_0^2 - n^2)[(x_0^2 - n^2)^2 - n^2]} + \\ &+ \left. \frac{3x_0^{12} - 22n^2 x_0^{10} + (63n^2 - 3)n^2 x_0^8 - (92n^2 - 6)n^4 x_0^6 + (73n^2 + 1)n^6 x_0^4 - (30n^4 + 8n^2 - 4)n^6 x_0^2 + n^8(5n^4 - 4n^2 - 3)}{32(x_0^2 - n^2)^3 [(x_0^2 - n^2)^2 - n^2]}\right] \rho_0^4 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\frac{x_0^{12} - 9n^2 x_0^{10} + (32n^2 - 3)n^2 x_0^8 - (58n^2 - 16)n^4 x_0^6 + (53n^4 - 29n^2 + 2)n^4 x_0^4 - (29n^4 - 22n^2 + 3)n^6 x_0^2 + 6n^{10}(n^2 - 1)}{32(x_0^2 - n^2)[(x_0^2 - n^2)^2 - n^2]}$$

$$- \frac{(\theta_2 - \mu_2)n[3x_0^4 - (6n^2 + 1)x_0^2 + 3n^2(n^2 - 1)]}{8[(x_0^2 - n^2)^2 - n^2]} + \frac{(\mu_2 + \theta_2)[x_0^6 - 5n^2 x_0^4 + n^2 x_0^2(7n^2 - 2) - 3n^4(n^2 - 1)]}{8(x_0^2 - n^2)(x_0^2 - 2n^2)}$$

$$- \frac{3n^3[x_0^4 - 2n^2 x_0^2 - n^2(n - 1)]}{32(x_0^2 - n^2)^2(x_0^2 - 2n^2)} - \delta_{n1} \frac{6x_0^4 - 5x_0^2 + 5}{256x_0^2(x_0^2 - 1)^2} \mp \delta_{n1} \left( m^2 \frac{3x_0^2 - 2}{4x_0^2(x_0^2 - 1)} - \right.$$

$$\left. - \frac{x_0^{12} + 16x_0^{10} - 50x_0^8 - 46x_0^6 + 249x_0^4 - 242x_0^2 - 44}{256x_0^2(x_0^2 - 1)^3(x_0^2 - 2)^2} \right) \mp$$

$$\mp \delta_{n2} \frac{5x_0^6 - 34x_0^4 + 69x_0^2 - 38}{64(x_0^2 - 2)^2(x_0^2 - 4)} \Big] \rho_0^4$$

Остальные компоненты поля выражаются через  $H_\psi$  соотношениями

$$E_z = - \frac{i\alpha h_\psi}{(\alpha^2 h^2 - m^2 \rho_0^2) \xi} \frac{\partial(H_\psi h)}{\partial \theta}; \quad H_z = \frac{\rho_0}{(\alpha^2 h^2 - m^2 \rho_0^2)} \frac{\partial^2(H_\psi h)}{\partial \xi \partial \psi}, \quad (25)$$

$$\bar{E}_\theta = \frac{i\alpha h_\psi}{\alpha^2 h^2 - m^2 \rho_0^2} \frac{\partial(H_\psi h)}{\partial \xi}; \quad H_\theta = \frac{\rho_0}{(\alpha^2 h^2 - m^2 \rho_0^2)} \frac{\partial^2(H_\psi h)}{\partial \theta \partial \psi}.$$

Для E-типов колебаний процесс итераций существенно упрощается при замене  $E_\psi \sqrt{h_\psi} \cong E$ . Разложение по степеням  $\rho_0$  собственных функций с точностью до  $O(\rho_0^6)$  будет

$$E_\psi \sqrt{h} \cos m\psi = J_n(x_0 \xi) \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} \left( 1 + \frac{m^2(h^2 - 1)\rho_0^2}{2h^2(x_0^2 + 3/4\rho_0^2)} \right) + \quad (26)$$

$$+ \frac{x_0^2}{4x_0} \left[ (\xi^2 J_{n+1}(x_0 \xi) + J_{n-1}(x_0 \xi)) \frac{\cos(n-1)\theta}{\sin(n-1)\theta} - (\xi^2 J_{n-1}(x_0 \xi) + J_{n+1}(x_0 \xi)) \frac{\cos(n+1)\theta}{\sin(n+1)\theta} \right] \rho_0^3 +$$

$$+ \left\{ \left[ (\xi^2 - 1 \mp \frac{\delta_{n1}}{2}) \xi J_{n+1}(x_0 \xi) - \frac{(n-1)\xi}{x_0} J_n(x_0 \xi) \right] \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left[ \xi^3 J_{n+1}(x_0 \xi) + \frac{(1 - \delta_{n1})x_0}{2(n-1)} J_{n-2}(x_0 \xi) \right] \frac{\cos(n-2)\theta}{\sin(n-2)\theta} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \left[ \xi^3 J_{n-1}(x_0 \xi) + \frac{x_0}{2(n+1)} J_{n+2}(x_0 \xi) \right] \frac{\cos(n+2)\theta}{\sin(n+2)\theta} \right\} \rho_0^4,$$

где  $x_0^2 = m^2 + 3/4$ ,  $x_0 \equiv x_{np}$  -  $r$ -ый корень функции Бесселя  $n$ -го порядка. Дисперсионное уравнение для E-типов колебаний с точностью до  $O(\rho_0^6)$  имеет вид

$$x_{npm, \pm}^2 = x_{np}^2 + x_2^2 \rho_0^2 + \left[ \frac{x_2^2}{2} \left( 1 \pm \frac{\delta_{m1}}{2} \right) + \frac{x_2^2(n^2 - 1)}{x_{np}^2} + \frac{4m^2}{x_{np}^2} \right] \rho_0^4 +$$

$$+ \left[ \frac{3x_2^2}{8} \left( 1 \pm \frac{2}{3} \delta_{m1} \pm \frac{\delta_{n2}}{6} \right) - \frac{x_2^2}{8x_{np}^2} \left( 1 \mp \frac{11}{2} \delta_{m1} \right) + \frac{n^2 - 4}{2x_{np}^2} (1 \pm \delta_m) + \frac{7m^2}{x_{np}^2} \left( 1 \pm \frac{4}{7} \delta_m \right) \right] \rho_0^6 \quad (27)$$

$$- \frac{11m^2}{24x_{np}^2} \left( 1 \pm \frac{7}{11} \delta_m \right) - \frac{m^4}{6x_{np}^2} \left( 1 \mp \frac{9}{2} \delta_m \right) + \frac{(n^2 - 4)(n^2 - 1)x_2^2}{x_{np}^4} + \frac{(n^2 - 1)x_2^2}{2x_{np}^2} +$$

$$+ \frac{21m^2(n^2 - 1)}{2x_{np}^4} + \frac{10m^2(n^2 - 1)}{3x_{np}^4} - \frac{3m^2(n+1)}{2x_{np}^4} + \frac{3m^4}{x_{np}^4} \left( 1 \pm \frac{\delta_m}{12} \right) + \frac{2m^4(n^2 - 1)}{3x_{np}^4} \Big] \rho_0^6.$$

Остальные компоненты поля получаются из (25) заменами  $\bar{E} \rightarrow \bar{H}$  и  $\bar{H} \rightarrow -\bar{E}$ ,  $x'_{npm} \rightarrow x_{npm}$ .

Разложения (23) и (26) для собственных функций E- и H-типов колебаний тороидального резонатора аналогичны выражениям для собственных функций тороидального резонатора с прямоугольным сечением (см. выражения (4), (8), (14) и (16)). В частности, из этих выражений следует, что в результате искривления как круглого, так и прямоугольного волноводов максимумы напряженностей полей смещаются к центру кривизны. Для коаксиальной моды  $E_{0,10}$  этот эффект просматривается на рис.2. На рис.10 он проиллюстрирован для тороида с круглым поперечным сечением, где эффект смещения дан для различных значений кривизны  $\rho_0$  (0,1; 0,3; 0,7). На рис.11 указанный эффект проиллюстрирован для подмоды  $E_{110}^+$  тороидального резонатора с круглым сечением. Сразу отметим то обстоятельство, что эффект смещения для малых значений  $\rho_0 \ll 0,3$  достаточно слаб, а для симметричных подмод ( $E^-, H^-$ ) им вообще можно пренебречь.

Как следует из формул (23) и (26), распределение поля тороидального резонатора с круглым поперечным сечением для любой моды с индексами  $n > 0$ ,  $p, m$ , соответствующими индексам цилиндрического резонатора длиной  $2\pi R$  (нулевое приближение по  $\rho_0$ ) и в равной мере прямому цилиндрическому волноводу с индексами  $n, p$  ( $\rho_0 = 0$ ), имеет две разные конфигурации, названные выше симметричными ( $E_{nrm}^-, H_{nrm}^-$ ) и несимметричными ( $H_{nrm}^+, E_{nrm}^+$ ) со своими собственными частотами, определяемыми по формулам (24) и (26). В возникновении двух подмод с теми же самыми индексами  $n > 0$ ,  $p, m$ , но с разными собственными частотами, выражен эффект снятия вырождения (производа в выборе постоянной  $\theta_0$  при осевой симметрии) кривизной тора.

На рис.12 приведены результаты расчетов собственных частот  $\omega'_{nrm;\pm}$  и  $\omega_{nrm;\pm}$ , выполненных по формулам (24) и (26) с точностью до  $O(\rho_0^6)$  как для симметричных (-), так и не-симметричных (+) мод.

#### Заключение

Воспользуемся полученными результатами для выбора параметров тороидального резонатора с квадратным поперечным сечением, в котором должна быть возбуждена тороидальная мода  $E_{110}$  или, что то же самое, коаксиальная мода  $H_{110}$ . Для проектирования такого резонатора будем исходить из того, что рабочая (резонансная) частота возбуждения на этой моде равна 2,79 ГГц. Параметры резонатора и возбудителя должны быть подобраны таким образом, чтобы по возможности отмежеваться по частоте от других мод и типов колебаний, т.е. с достоверностью исключить возможность их появления.

Из выражений (7) и (9), а также из рис.3 следует, что частота интересующей моды ( $H_{110}^z$ ) совпадает для всех значений  $\rho_0$  с частотой  $E_{111}^z$ . Во избежание возбуждения коаксиальной моды  $E_{111}^z$  достаточно обеспечить правильный выбор поляризации возбудителя, в качестве которого предпочтение следует отдавать щели, длинная сторона которой параллельна оси  $z$  (волноводное возбуждение).

Для сепаратного существования моды  $E_{110}^y$  ( $H_{110}^z$ ) наиболее благоприятной является область  $0,7 \leq \rho_0 \leq 0,8$  (см. рис.3 и 7), так как ближайшие паразитные моды  $H_{203}^z$ ,  $H_{204}^z$  и  $H_{104}^y$ ,  $H_{204}^y$  оказываются достаточно разнесенными по частоте. Для

случае резонатора с квадратным поперечным сечением и с  $\rho_0 = 0,75$  внешний диаметр резонатора ( $\mathcal{D}$ ) оказывается равным 17,5 см, а диаметр внутреннего стержня -  $d = 2,5$  см. Как показано на рис. 13 и 14, выбранная область оказывается защищенной от "те-разитных" мод, для значений отношения длин сторон  $0,95 < a/b < 1,05$ , что оставляет свободу на погрешность изготовления и настройку резонатора.

Заметим, что полученные в работе приближенные выражения для собственных функций и резонансных частот оказываются справедливыми и для секторидальных торонидальных резонаторов и с круглыми и приугольными поперечными сечениями, т.е. когда  $0 < \varphi < \varphi_0$ , где  $\varphi_0 < 2\pi$ . В этом случае достаточно заменить  $m \rightarrow \frac{2\pi m'}{\varphi}$ , где  $m'$  - целое число и определить соответствующим образом функцию как  $\cos \frac{2\pi m'}{\varphi} \varphi$  или  $\sin \frac{2\pi m'}{\varphi} \varphi$ , исходя из граничных условий на торцах  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \varphi_0$  секторидального торонидального резонатора.

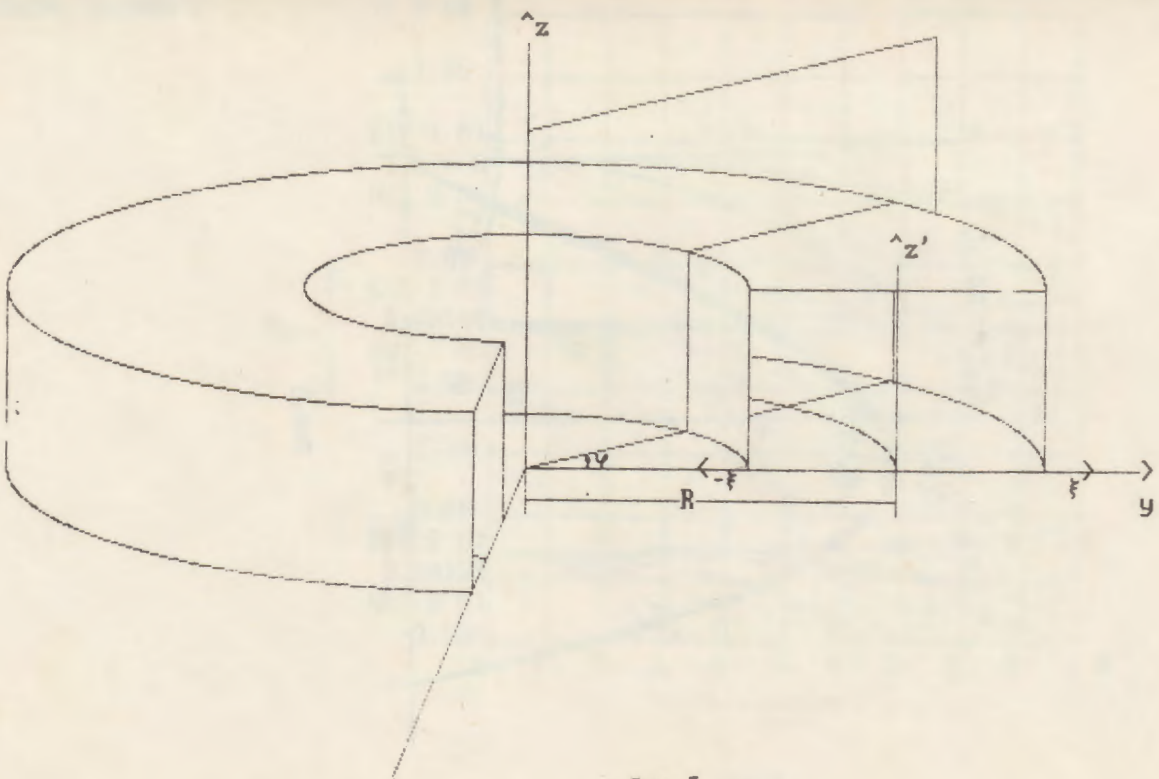
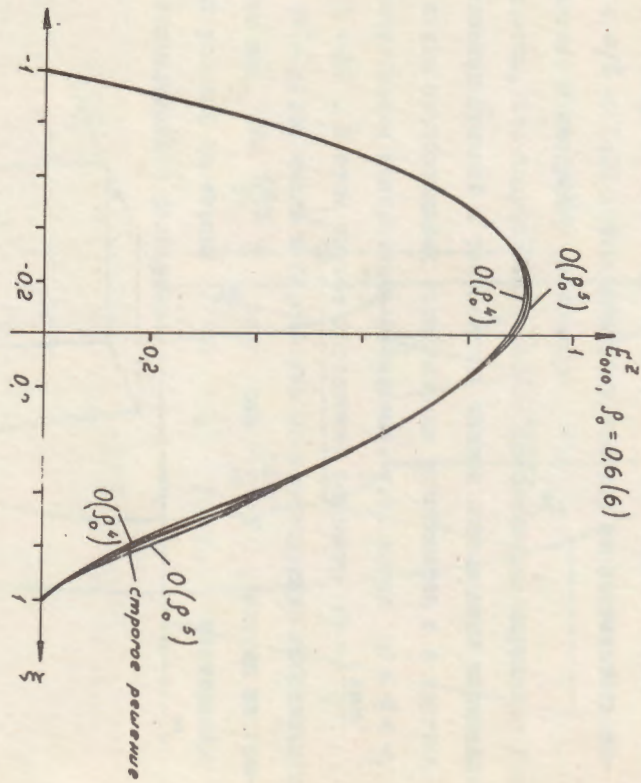


Рис. I

Рис.2



$a/b = 1$   
 $E_z(NPM); H_z(NPM)$ .

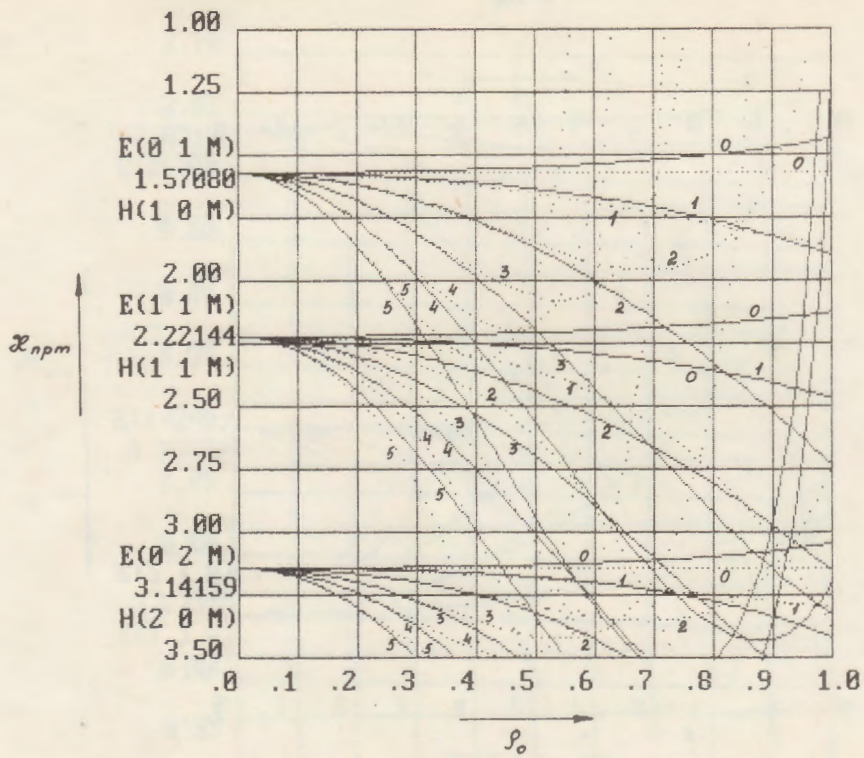


Рис.3

$a/b = 1$   
 $E_z(NPM)$ .

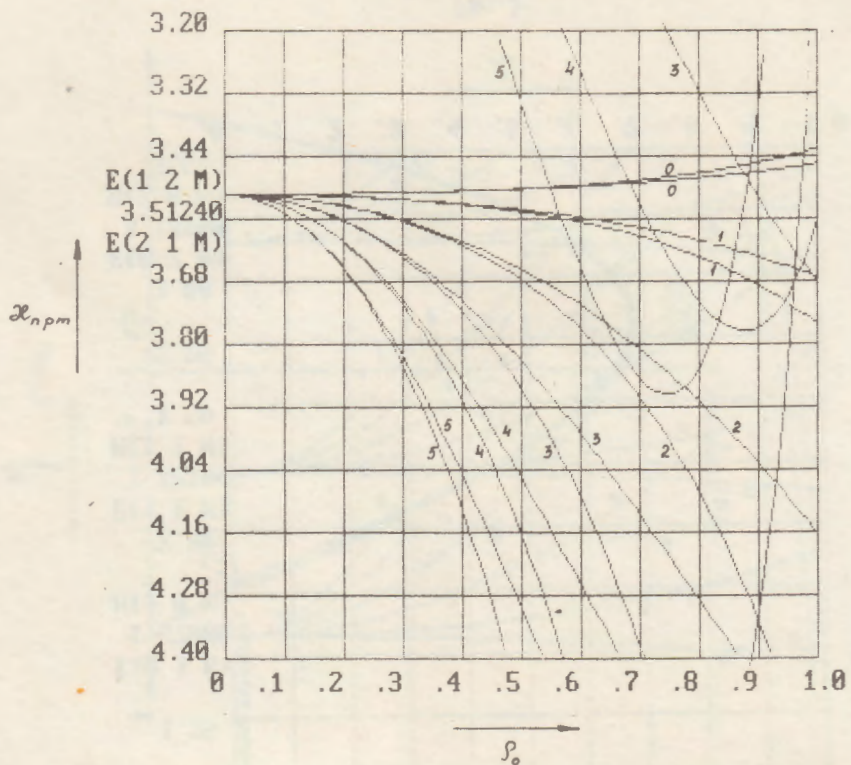


Рис. 4

$a/b = 0.75$   
 $E_z(NPM)$ .

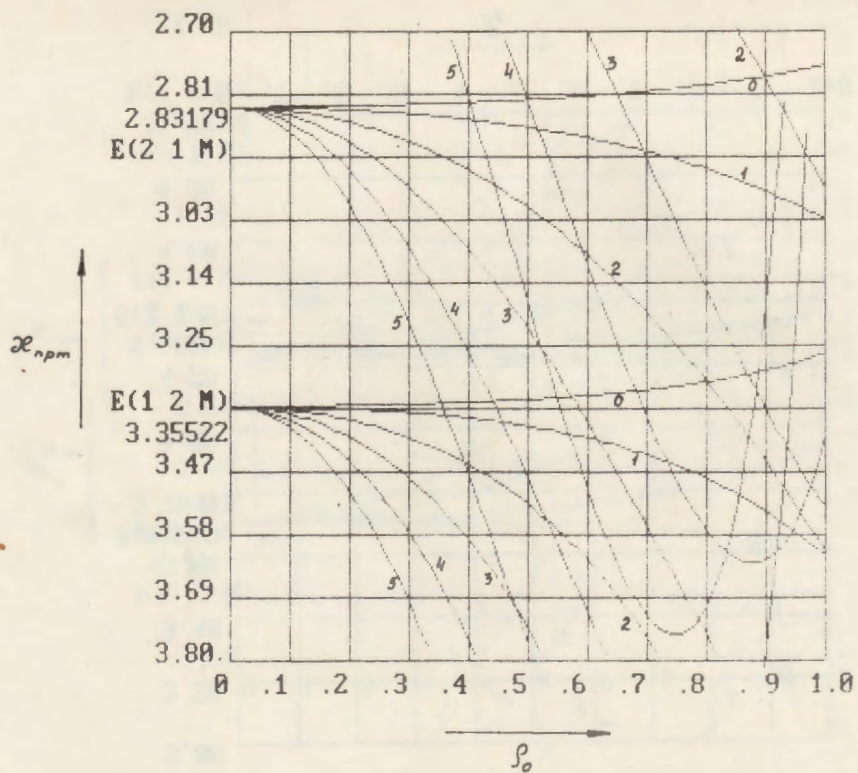


Рис. 5

$a/b = 1.25$   
 $E_z$  (NPM).

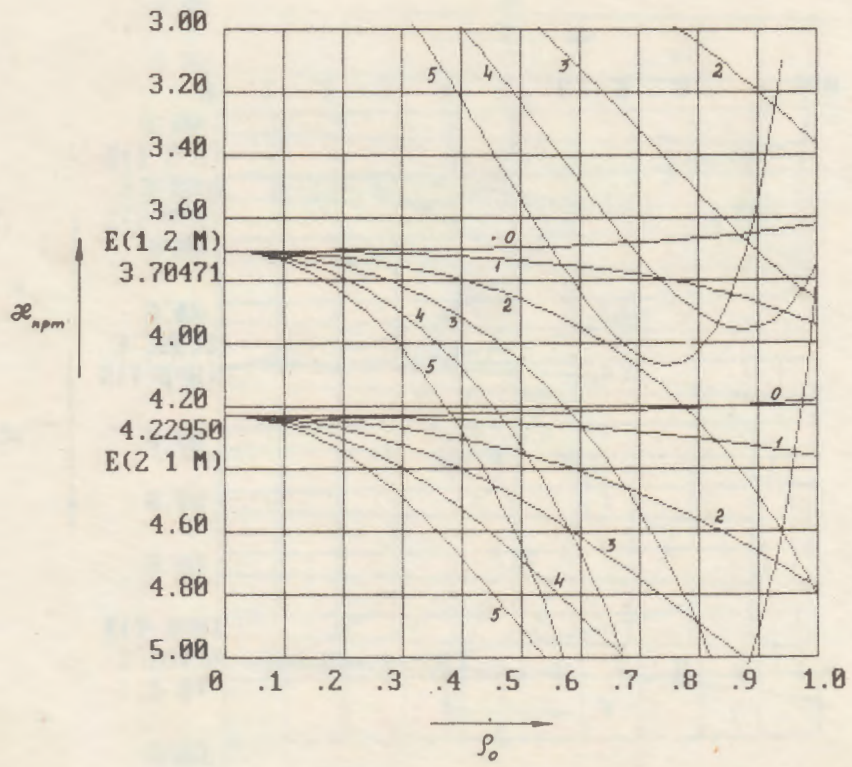


Рис.6

$a/b = 1$   
 $E$  (NPM);  $H$  (NPM).

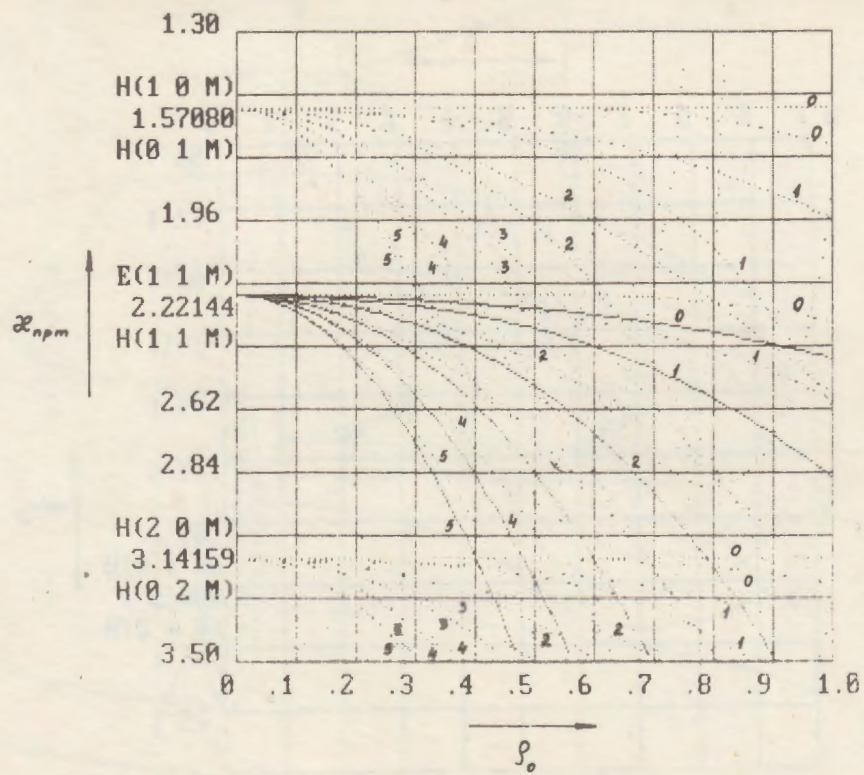


Рис.7

$a/b = 0.5$   
 $H$  (NPM).

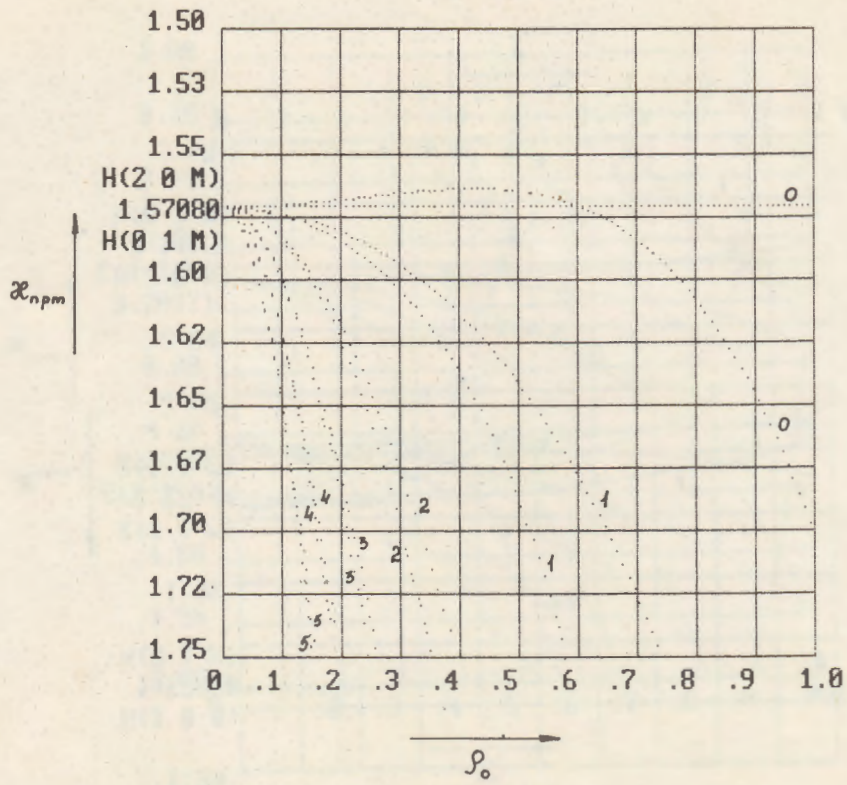


Рис.8

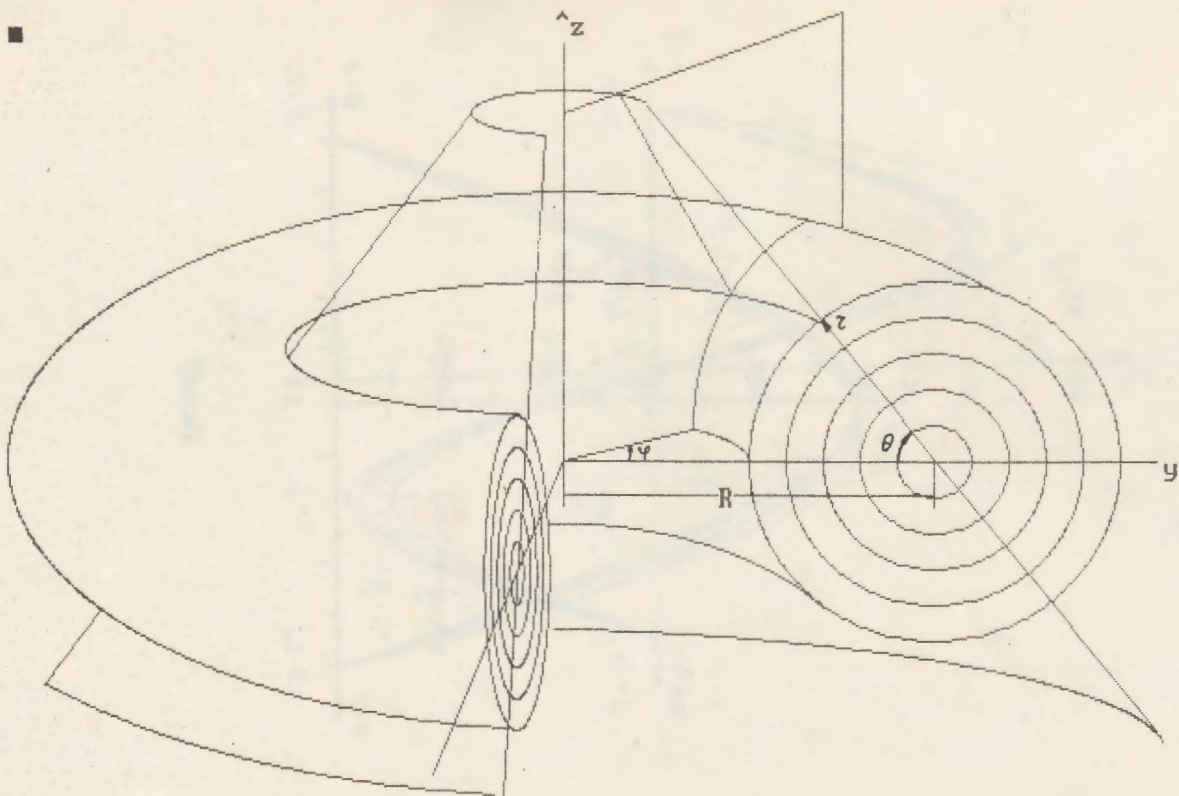
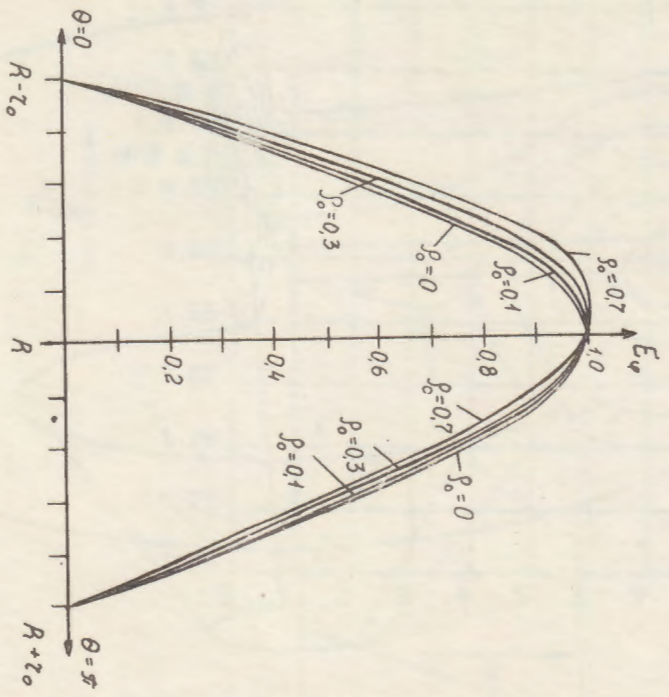
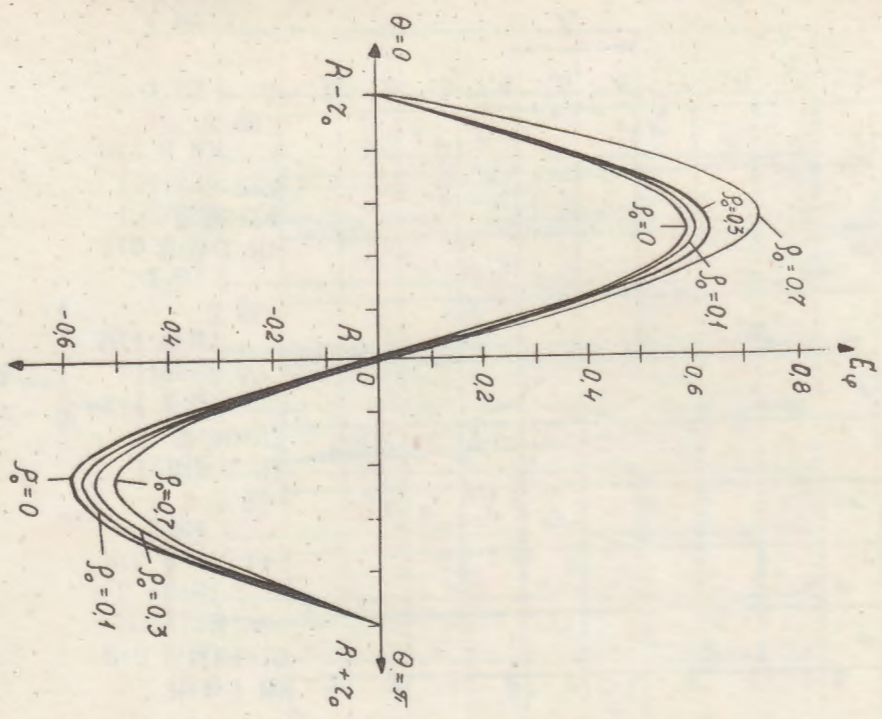


Рис.9



Pnc.II



Pnc.II

E (NPM); H (NPM)

74

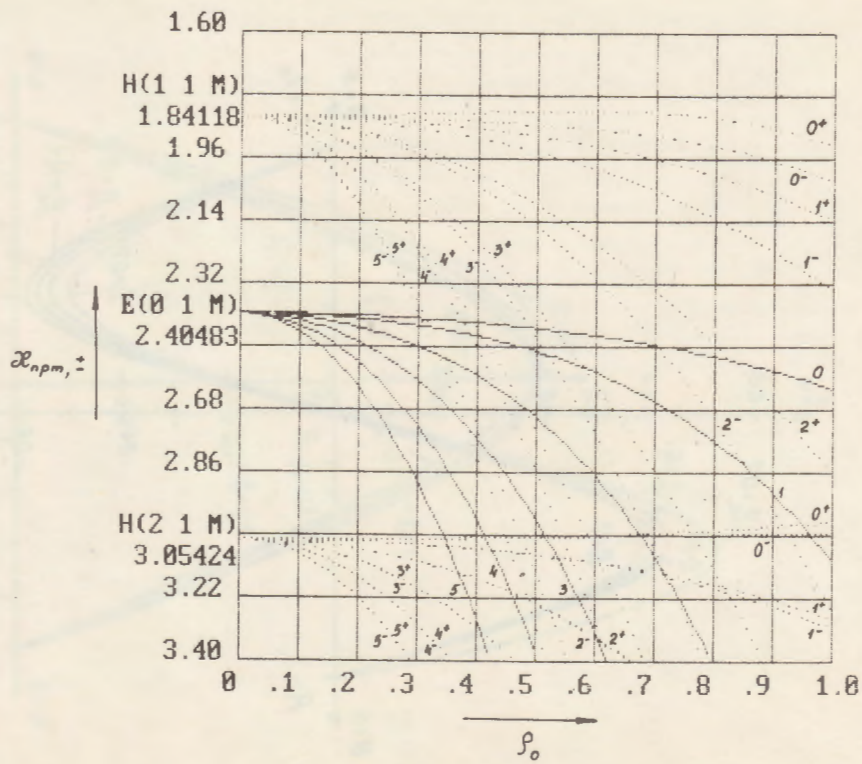


Рис. 12

$a/b = 0.95$   
E<sub>z</sub> (NPM); H<sub>z</sub> (NPM)

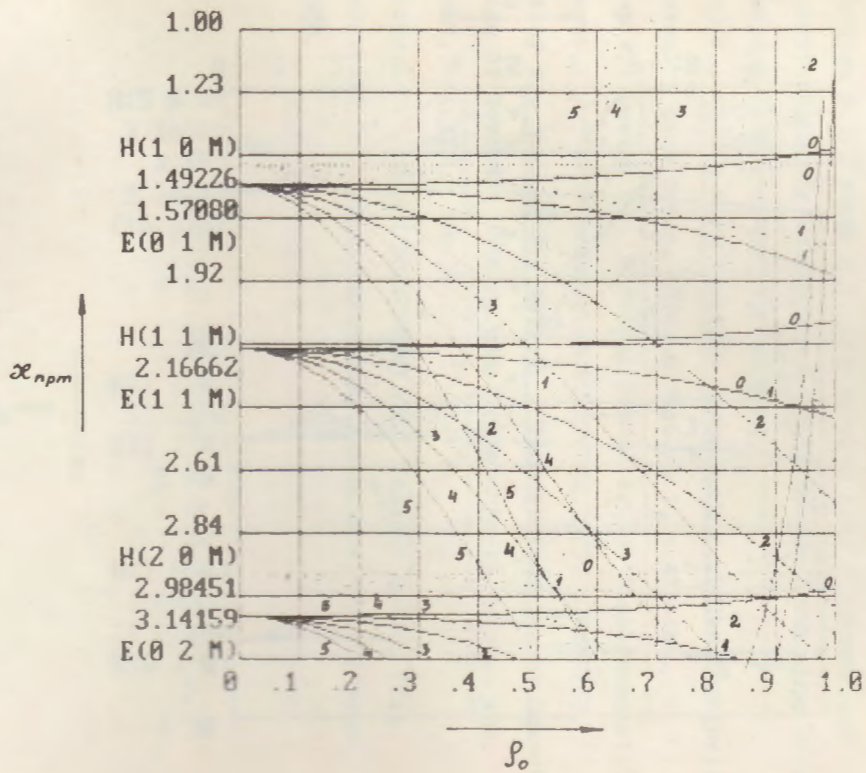


Рис. 13

$a/b = 1.05$   
 $E_z(NPM); H_z(NPM); \dots$

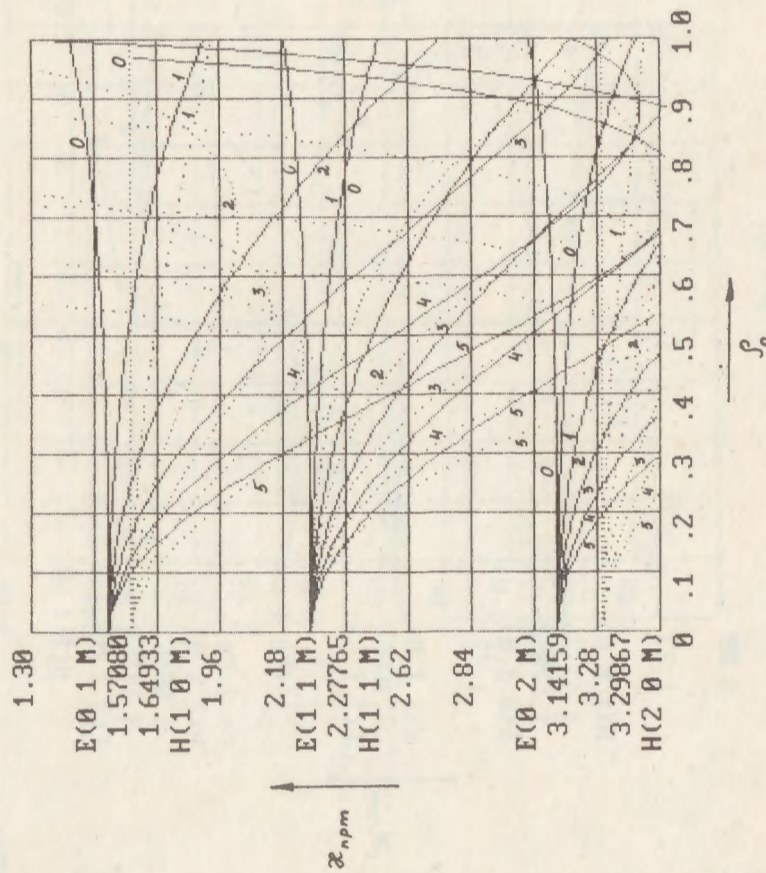


Рис. 14

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Газазян Э.Д., Иванян М.И., Тер-Логосян А.Д. О собственных электромагнитных колебаниях в тороидальном резонаторе. Препринт ЕФИ-887(38)-86, Ереван, 1986.
2. Cap F., Deutch R. Toroidal Resonators for Electromagnetic Waves. IEEE Trans, 1978, MTT-26, N.7, p.478-486.
3. Cap F., Deutch R. Toroidal Resonator for Electromagnetic Waves II. IEEE Trans., 1980, MTT-28, N.7, p.700-703.
4. Liley T., Shnizer B., Keil R. Perturbation Theory Computation of Toroidal Uniform Modes Within Empty Torus.- AEU, 1983, vol.37, p.359-365.
5. Левин Л. Теория волноводов. М.: Радио и связь, 1981.
6. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988.

Рукопись поступила 16 февраля 1989 г.