ИНДЕКС 3649

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Препринт ЕФИ-1156(33)-89

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
YEREVAN PHYSICS INSTITUTE

Э.М.МАДУНЦ

ИНДЕКС ЗАДАЧИ ПУАНКАРЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ГЛАВНОЙ ЧАСТЬЮ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

ЦНИИатоминформ
ЕРЕВАН - 1989

Նախատիպ ԵՖԻ-1156(33)-89

Է.Մ.ՄԱԴՈՒՆՑ

ՊՈՒԱՆԿԱՐԵԻ ԽՆԴՐԻ ԻՆԴԵԿՍԸ ԷԼԻՊՍԱԿԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՀԱՄԱՐ՝ ԼԱՊԼԱՍԻ ՕՊԵՐԱՏՈՐԻ ԳԼԽԱՎՈՐ ՄԱՍՈՎ

Հայտնի է, որ դիֆերենցիալ հավասարումների էլիպսական համակարգերի համար եզրային խնդիրը միշտ չէ, որ նորմալ լուծելի է։ Լրացուցիչ պայմանները /ուժեղ էլիպսականություն [1], Լոպատինսկու պայմանը [2,3], թույլ կապվածություն [4] և այլն/- պայմաններ են եզրային խնդրի բարձր ածանցյալների գործակիցների վրա։ Աշխատանքում քննարկվում է եզրային խնդիրը՝ նորմալ լուծելիության պայմանների խախտման դեպքում։ Ընդ որում հաստատված է ցածր ածանցյալների գործակիցների որոշիչ նշանակությունը, ստացված է ինդեքսի հաշվման բանաձևը։ Նշենք, որ ըզգալի դերը տվյալ հետազոտությունում կատարում է Ի.Ն.Վեկուայի ստացած [5] ընդհանուր լուծման ներկայացումը։

Երևանի Ֆիզիկայի ինստիտուտ

Երևան 1989

I. Пусть $\mathcal{D}$ - плоская односвязная область. Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\Delta U + a(x,y)U_x + b(x,y)U_y + c(x,y)U = 0, \qquad (1)$$

где $a(x,y)$, $b(x,y)$ и $c(x,y)$ - вещественно-значные матрицы-функции порядка $n \times n$. Требуется найти решение системы (1), удовлетворяющее краевому условию

$$p(x,y)U_x + q(x,y)U_y + s(x,y)U\Big|_{\Gamma} = f(t), \qquad (2)$$

где Γ - граница области $\mathcal{D}$, а $p(x,y)$, $q(x,y)$ и $s(x,y)$ как и выше матрицы.

Как показано в [5], общее решение системы (1) представляется в виде

$$U(x,y) = \mathrm{Re}\left\{ H_0(z)\Phi(z) + \int_0^z H(z,t)\Phi(t)\,dt \right\}, \qquad (3)$$

где $H_0(z) = G(z, 0, z, \bar{z})$ а $H(z,t) = (-\partial/\partial_t) G(t, 0, z, \bar{z})$, причем $G(z,t,\xi,\tau)$ - функция Римана.

Введем следующие обозначения

$$A(z,t) = \frac{1}{4}\left(\alpha\left(\frac{z+t}{2}, \frac{z-t}{2i}\right) + i\beta\left(\frac{z+t}{2}, \frac{z-t}{2i}\right)\right),$$

$$B(z,t) = \frac{1}{4}(\alpha - i\beta)\left(\frac{z+t}{2}, \frac{z-t}{2i}\right),$$

$$C(z,t) = \frac{1}{4}\dot{c}\left(\frac{z+t}{2}, \frac{z-t}{2i}\right), \tag{4}$$

$$\mathcal{D}_1(z,t) = C(z,t) - A(z,t)B(z,t) - \frac{\partial}{\partial t}C(z,t),$$

$$F(z,t) = G(z,t,z,\bar{z}).$$

Лемма I. Справедливо следующее равенство

$$\frac{\partial}{\partial \xi} G(z,t,\xi,\tau)\Big|_{\substack{t=0\\ \xi=z\\ \tau=\bar{z}}} = \left\{E + \int_{\bar{z}}^{0} (F\mathcal{D}_1 F^{-1})(z,\tau)\,d\tau\right\} H_0(z), \tag{5}$$

где H_0 и F выражаются через функцию Римана, $\mathcal{D}_1$ - определена в (4).

Смысл формулы (5) в том, что устанавливается связь между первой производной от функции Римана с коэффициентами системы (1) и самой функцией Римана.

Для функций, определенных на границе Γ, являющихся граничными значениями от аналитических внутри области $\mathcal{D}$ функций, имеет место интегральное представление И.Н.Векуа (см. 5)

$$\Phi(z) = \int_\Gamma \mu(t)\,\ln\left(1 - \frac{z}{t}\right)ds + \int_\Gamma \mu(t)\,ds + id, \tag{6}$$

где $\mu(t)$ - вещественно-значная вектор-функция, d - постоянный вещественный вектор.

Подставим (3) в (2), т.е. требуем выполнения граничных условий, далее используя результат леммы (5) и преобразование (6), получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений

$$\operatorname{Re}\alpha(z)\mu(z) + \frac{\operatorname{Im}\alpha(z)}{\pi}\int_\Gamma \frac{\mu(t)}{t-z}dt + \tag{7}$$

$$+ \frac{\beta(z)}{2}\int_\Gamma \mu(t)\,\ln\left(1 - \frac{z}{t}\right)dt +$$

$$+ \frac{\bar{\beta}(z)}{2}\int_\Gamma \mu(t)\,\ln\left(1 - \frac{t}{\bar{z}}\right)dt + K(\mu) = f(t),$$

где $K(\mu)$ - интегральный оператор, ядро которого вместе с первой производной имеет особенность не выше логарифмического порядка, далее

$$\alpha(z) = -(p(z) + iq(z))H_0(z)\pi i \bar{z}',$$

$$\beta(z) = \Big\{ \big(p(z) + iq(z)\big) C\tau(z) -$$

$$- \big(p(z) - iq(z)\big) A(z, \bar{z}) + S(z) \Big\} H_0(z), \tag{8}$$

где z' – обозначает производную вдоль длины дуги на Γ, черта над символом, как обычно взятие комплексного сопряжения, а

$$\mathfrak{C}(z) = E + \int_{\bar{z}}^{0} (F \mathcal{D}_1 F^{-1})(z, t)\, dt. \tag{9}$$

Для функции Римана имеет место равенство [5],

$$\det H_0(z) = \exp \int_{\bar{z}}^{0} Sp\, A(z, t)\, dt, \tag{10}$$

$Sp\, A(z,t)$ – обозначает след матрицы $A(z,t)$, определенной в (4).

Теперь из (8) видно, что система сингулярных интегральных уравнений (7) является системой нормального типа (см. [5]), если $\det \alpha(z) \neq 0$, а это ввиду (10) означает $\det(p(z) + iq(z)) \neq 0$.

Таким образом, если

$$\det\big(p(z) + iq(z)\big) \neq 0, \tag{11}$$

то исходная задача (1), (2) нормально разрешима и ее индекс $\varkappa$ вычисляется по формуле

$$\varkappa = \frac{1}{\pi} \big[\ln \det \alpha(z) \big]_{\Gamma}, \tag{12}$$

правая часть (12) есть приращение аргумента функции, стоящей в квадратных скобках, при обходе контура Γ один раз против часовой стрелки. Формула (12) простое следствие из теории сингулярных интегральных уравнений [5].

Пусть нарушено условие (11). Степень нарушения характеризуется рангом матрицы $p(z) + iq(z)$. В этом случае система (7) вырождается. В работе [6] рассматривалась система типа (7) при вырождении. Вспомним, что мы пришли к системе (7), исходя из краевой задачи, именно это обстоятельство позволяет полнее исследовать систему (7).

Рассмотрим разложение по параметру λ следующего определителя

$$\det\Big(\big(p(z) + iq(z)\big)\lambda - \frac{1}{\pi i} Q(z) \Big) =$$

$$= \varepsilon_{\tau}(z)\lambda^{\tau} + \varepsilon_{\tau-1}(z)\lambda^{\tau-1} + \dots + \varepsilon_0(z), \tag{13}$$

где матрица $Q(z)$ определяется по формуле

$$Q(z) = \big(p(z) + iq(z)\big)\mathfrak{C}(z) - \big(p(z) - iq(z)\big) A(z, \bar{z}) + S(z), \tag{14}$$

а матрица $\mathfrak{C}(z)$ определена формулой (9).

Теорма I. Пусть коэффициент $\mathcal{E}_2(z)$ разложения (I3) отличен от нуля. Тогда задача (I), (2) нетёрова и для индекса $æ$ имеет место формула

$$æ = 2n - æ_1 - æ_2 , \tag{I5}$$

где

$$æ_1 = \frac{1}{\pi}\left[\ln \det H_0(z)\right]_\Gamma ,$$
$$æ_2 = \frac{1}{\pi}\left[\ln \mathcal{E}_2(z)\right]_\Gamma . \tag{I6}$$

Коэффициент $\mathcal{E}_2(z)$, как видно из (I3), отвечает за вклад матрицы $Q(z)$, а из (I4) следует, что матрица $S(z)$, входящая в (2), начинает играть важную роль, для нормальной разрешимости.

2. Пусть по-прежнему нам задана система (I), где коэффициенты могут быть комплекснозначными.

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$\frac{\partial}{\partial \bar z} u + \beta(x,y) u \Big|_\Gamma = f(t) , \tag{I7}$$

заметим, что заведомо гарантируется нарушение условия нормальной разрешимости.

Согласно [5] для общего решения (I) имеет место представление

$$u(x,y) = H_0(z)\phi(z) + \int_0^z H(z,t)\phi(t)\,dt + \tag{I8}$$
$$+ Q_0(\bar z)\Psi(\bar z) + \int_0^{\bar z} Q(z,\tau)\Psi(\tau)\,d\tau ,$$

где

$$Q_0(\bar z) = G(0, \bar z, z, \bar z) ,$$

$$Q(z,t) = (-\partial/\partial\tau)\, G(0,\tau, z, \bar z), \tag{I9}$$

а H_0 и H определены выше.

Заметим следующее: если через $\bar{\mathcal{D}}$ обозначим область, получающуюся из области $\mathcal{D}$, то возникает естественное соответствие между аналитическими функциями в этих областях, а именно

$$\Psi(\bar z) = \bar\theta(z).$$

Задача (I), (I7) сводится к следующей системе сингулярных интегральных уравнений

$$R(z)\omega(z) + \frac{T(z)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\omega(t)}{t-z}\,dt + K_1(\omega) = F(t), \tag{20}$$

где $R(z)$ и $T(z)$ - матрицы порядка 2x2, $\omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t))$ - вещественно-значная вектор-функция, $K_1(\omega)$ - интегральный оператор, ядро которого имеет особенность при $t = z$ ниже первого порядка.

В теории сингулярных интегральных уравнений [5] основную роль играют следующие матрицы

$$S(z) = R(z) + T(z) \quad \text{и} \quad \mathcal{D}(z) = R(z) - T(z).$$

Вычисления показывают, что

$$S(z) = \begin{pmatrix} A_1(z), & \bar{B}_1(z) \\ -iA_1(z), & iB_1(z) \end{pmatrix},$$

а $\mathcal{D}(z) = \bar{S}(z)$, где

$$A_1(z) = \pi i\, \bar{z}'\left(\beta(z) - A(z,\bar{z})\right)H_0(z),$$

$$B_1(z) = \pi i\, \bar{z}'\, Q_0(\bar{z}). \tag{21}$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. Пусть коэффициенты задачи (I), (I7) удовлетворяют следующему условию

$$\beta(x,y) \neq \frac{1}{4}\left(a(x,y) + ib(x,y)\right). \tag{22}$$

Тогда рассматриваемая задача нормально разрешима и ее индекс $\mathfrak{X}$ вычисляется по формуле

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_2, \tag{23}$$

где

$$\mathfrak{X}_1 = \frac{1}{\pi}\left[\ln\left(\beta(z) - A(z,\bar{z})\right)\right]_\Gamma,$$

$$\mathfrak{X}_2 = \frac{1}{\pi}\left[\ln\left(H_0(z)\, Q_0(\bar{z})\right)\right]_\Gamma. \tag{24}$$

Заметим, что $\mathfrak{X}_1$ явно зависит от коэффициентов задачи (I), (I7), а $\mathfrak{X}_2$ от функции Римана, причем

$$H_0(z) = \exp\int_{\bar{z}}^{0} A(z,t)\,dt,$$

$$Q_0(\bar{z}) = \exp\int_{z}^{0} B(\eta,\bar{z})\,d\eta,$$

где функции $A(z,t)$ и $B(\eta,\bar{z})$ определяются явно через коэффициенты задачи по формулам (4).

Замечание. Нами исследован также случай, когда граничное условие имеет вид

$$\left.\frac{\partial}{\partial\bar{z}}U + \beta(z)U + \gamma(z)\bar{U}\right|_\Gamma = f(t). \tag{25}$$

Оказалось, что коэффициент $\gamma(z)$ роли не играет, т.е. теорема 2 полностью в силе. Анализ этого обстоятельства показывает, что неучастие коэффициента $\gamma(z)$ краевого условия (25) кроется в структуре общего решения (I6).

В заключение автор выражает благодарность участникам семинара по теоретической физике за полезное обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вишик М.И. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений. Матем.сб., 1951, т.29, с.615-676.
2. Лопатинский Я.Б. Об одном способе приведения граничных задач для систем уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям. Укр.математ.журн., 1953, т.5, с.123-151.
3. Вольперт А.И. Об индексе и нормальной разрешимости граничных задач на плоскости. Труды матем.об-ва, 1961, т.10, с.41-87.
4. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966.
5. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
6. Товмасян Н.Е. К теории сингулярных интегральных уравнений. Дифф. уравнения, 1967, т.III, № 1, с.69-80.

Рукопись поступила 24 мая 1989 г.

Э.М.МАДУНЦ

ИНДЕКС ЗАДАЧИ ПУАНКАРЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ГЛАВНОЙ ЧАСТЬЮ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

Редактор Л.П.Мукаян

Технический редактор А.С.Абрамян

Подписано в печать 3/VII-89 ВФ-02204 Формат 60х84/16
Офсетная печать.Уч.изд.л. 0,8 Тираж 299 экз.Ц.12 к.
Зак.тип.№ 1040 Индекс 3649

Отпечатано в Ереванском физическом институте
Ереван 36, ул.Братьев Алиханян 2