Preprint YERPHI-1262(48)-90

(EFI-1262-48-90)

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
YEREVAN PHYSICS INSTITUTE

D.B. SAHAKIAN

SOLUTION OF THE ISING MODEL ON A RANDOM LATTICE WITH A TORUS TOPOLOGY

ЦНИИатоминформ
ЕРЕВАН-1990

Նախնատիպ ԵրՖԻ-1262(48)-90

Դ.Բ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

ԻԶԻՆԳԻ ՄՈԴԵԼԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ԹՈՐԻ ՏՈՊՈԼՈԳԻԱՅՈՎ ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՑԱՆՑԵՐԻ ՎՐԱ

Հաշվված է երկմատրիցային ինտեգրալի գլխավոր անդամից հետո հաջորդ անդամի (ըստ $1/N^2$-ու աստիճանների) սինգուլյար մասը, որը ծնիչ ֆունկցիա է թորի տոպոլոգիայով պատահական ցանցի վրա կառուցված Իզինգի մոդելի վիճակագրական գումարի համար: Հետազոտվել է վիճակագրական գումարի վարքը ֆազային անցման կետերով անցնելիս:

Երևանի ֆիզիկայի ինստիտուտ
Երևան 1990

Препринт ЕФИ-1262(48)-90

Д.Б. СААКЯН

РЕШЕНИЕ МОДЕЛИ ИЗИНГА НА СЛУЧАЙНОЙ РЕШЕТКЕ С ТОПОЛОГИЕЙ ТОРА

Вычислен основной сингулярный член при разложении значения двухматричного интеграла по степеням $1/N^2$ в следующем после основного порядка, являющегося производящей функцией для статсуммы модели Изинга на случайной решетке с топологией тора. Исследовано поведение статсуммы при прохождении через точку фазового перехода.

Ереванский физический институт
Ереван 1990

Preprint YERPHI-1262(48)-90

D.V. SAHAKIAN

SOLUTION OF THE ISING MODEL ON A RANDOM LATTICE WITH A TORUS TOPOLOGY

The main singular term is calculated when expanding the two-matrix integral in $1/N^2$ powers in the order next to the main one, which is the generating function for the statistical sum of the Ising model on a random lattice with a torus topology. The statistical sum behaviour is investigated at crossing the phase transition point.

Yerevan Physics Institute

Yerevan 1990

In Ref.[1] the task of calculating the statistical sum of the Ising model on a random dynamic lattice was reduced to a two-matrix integral with an anharmonic potential in the exponent. This integral has been calculated in Ref.[2] in the main approximation over N (the matrix order). This made it possible to calculate exactly the statistical sum of the Ising model on a random lattice with spheric topology.

Let $Z_n(B)$ be the statistical sum of the Ising model on a random dynamic lattice.

Introduce

$$Z(B,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-4gc}{(1-c^2)^2}\right]^n Z_n(B) \ , \qquad (1)$$

where

$$c = e^{-2B} \ .$$

Then according to Ref.[1]

$$Z(B,g) \sim \ln\int du \int dv \exp(-u^2-v^2+2cuv-gu^4-gv^4) \ , \qquad (2)$$

where the integral is taken over the Hermitian matrices:

$$u_{ij},\ v_{ij}, \qquad i,j = 1,N \ .$$

If we are interested in Z(B,g) for a g-type lattice, then in the right-hand side of (2) we must take the N^{2-2g} part. The values of the terms of a series with large n are determined by the singularity of the Z(B,g) function over g. Thus, to calculate the values of $Z_n(B)$ for surfaces with a torus topology we need not calculate with O(1) accuracy the whole two-matrix integral (2), but only its main singularity over g, which essentially simplifies the calculations.

In Ref.[2] the value of the integral (2) is calculated by means of the $P_n(X)$ polynomials which by weight are orthogonal to

$$W(X,Y) = \exp[-(X^2+Y^2) - g/N(X^4+Y^4) + 2cXY].$$

For the recurrent constants s_n, r_n, f_n defined in Ref.[2]

$$f_n = \langle P_n | P_n \rangle \, / \, \langle P_{n-1} | P_{n-1} \rangle \tag{3}$$

$$XP_n = P_{n+1} + r_n P_{n-1} + s_n P_{n-3} \tag{4}$$

we have obtained the following equations:

$$cr_i = f_i[1+2g/N(r_{n-1}+r_n+r_{n+1})] \tag{5}$$

$$cf_i = -i/2 + r_i[1+2g/N(r_{i-1}+r_i+r_{i+1})]+2g/N(S_{i-1}+S_i+S_{i+1}) \tag{6}$$

$$cS_{i+1} = 2g/N \; f_{i-1} \; f_i \; f_{i+1} \; . \tag{7}$$

Then the value of the integral in (2)

$$N \langle P_0 | P_0 \rangle + \sum_{i=1}^{N} (N-i) \; . \tag{8}$$

In the limit of large N (x=i/N) we have

$$1/N \; f_i \sim f(x) + f_1(x) \tag{9}$$

$$1/N \; r_i \sim r(x) + r_i(x) \tag{10}$$

$$1/N^2 \; S_i \sim S(x) + S_1(x) \; , \tag{11}$$

where r_1, S_1, $f_1 \sim 1/N^2$.

Then for the part of ~ 1 in (8), to the accuracy of the terms analytical over g, we obtain:

$$N^2 \int_0^1 (1-x) \; f_1/f \cdot dx \; . \tag{12}$$

Substituting (9-10) into (5-7), we obtain:

$$-(1+6gr)f_1 + (c-6gf)r_1 = 2g \tag{13}$$

$$cf_1 - (1+12gr)r_1+6gS_1 = 2g(rr''+S'')1/N^2 \tag{14}$$

$$-6gf^2f_1 + cS_1 = 2gf(f''f-f'^2)1/N^2 \; . \tag{15}$$

Substituting the value of f_1 in (12), for the singular part of f_1 we obtain:

$$f_1 = 3cg(-u^{11}c^4+3c^4u^{10}-3c^4u^9+c^4u^8-c^2u^7 + \\ + 6u^6c^6-9u^5c^2+4c^2u^4+u^2-4u+3)/(2G'(z)^4u^8) \; , \tag{16}$$

where

$$u = 1-3z \\ G(z) = z[1/(1-3z)^2-c^2] + 3c^2z^3 \; . \tag{17}$$

Hence we obtain, that when approaching the critical point from below, and in it

$$Z(B,g) = 1/12 \ln(g-g_c) \; , \tag{18}$$

and from above,

$$Z(B,g) = 1/24 \ln(g-g_c) \; . \tag{19}$$

Thus we obtained, that in the asymptotics over large n (the number of lattice sites), when crossing the transition point B_c, $\ln Z_n(B)$ undergoes a jump on ln2. An analogous jump exists also for the Ising model on a hard regular lattice with a torus topology [2]. And in case of a model on a random lattice with a topology of a sphere, we obtain that the jump of $\ln Z_n(B)$ vanishes.

The author expresses his gratitude to D.V.Bulatov and S.G.Matinyan for useful discussions.

References

1. Казаков В.А.. Письма в ЖЭТФ, 1986, т.44, вып.3, с.105.
2. Попов В.Н. Континуальный интеграл в квантовой теории поля и статфизика. М.: Атомиздат, 1975.

Д.Б. СААКЯН

РЕШЕНИЕ МОДЕЛИ ИЗИНГА НА СЛУЧАЙНОЙ РЕШЕТКЕ С ТОПОЛОГИЕЙ ТОРА

(на английском языке, перевод Г.А. Папяна)

Редактор Л.П.Мукаян

Технический редактор А.С.Абрамян

Подписано в печать 25/ХП-90г.	Формат 60×84×16
Офсетная печать. Уч.изд.л. 0,4	Тираж 299 экз.Ц. 5 к.
Зак.тип.313	Индекс 3649

Отпечатано в Ереванском физическом институте
Ереван-36, ул. Братьев Алиханян 2.

The address for requests:
Information Department
Yerevan Physics Institute
Alikhanian Brothers 2,
Yrevan, 375036
Armenia, USSR

ИНДЕКС 3649

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ