ИНДЕКС 3649

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Препринт ЕФИ-1277(63)-90

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
YEREVAN PHYSICS INSTITUTE

Г.М.АЙВАЗЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ РАСЧЕТА КОЭФФИЦИЕНТОВ МИ В ЗАДАЧЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ММ И СБММ ВОЛН В ОБЛАКАХ

ЦНИИатоминформ
ЕРЕВАН-1990

Նախատիպ ԵՖԻ-1277(63)-90

Գ.Մ.ԱՅՎԱԶՅԱՆ

ԱՄՊԵՐՈՒՄ ՄՄ ԵՎ ՍԲՄՄ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ԲԱՇԽՄԱՆ ԽՆԴՐՈՒՄ ՄԻ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿԻ ԱԼԳՈՐԻԹՄՆԵՐԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒՄԸ

Աշխատանքը նվիրված է գնդաձև մասնիկի վրա ըստ Մի-ի տեսության` էլեկտրամագնիսական ալիքների դիֆրակցիայի տեսության հաշվարկի հարցերին, այսինքն, Մի-ի, $a_n$ և $b_n$ գործակիցների հաշվարկին` խնդրի ծայրագույն պայմանների դեպքում, երբ դիֆրակցիայի անչափ պարամետրը և նյութի բեկման կոմպլեքսային ցուցիչը փոխվում են արժեքների լայն միջակայքում նվազագույնից մինչև առավելագույնը: Վերլուծվել են գոյություն ունեցող Մի-ի գործակիցներ հաշվող ալգորիթմները, որոշված են հատուկ ֆունկցիաների և առաջին կարգի Ռիկատի-Բեսելի ֆունկցիայի լոգարիթմական ածանցյալի հաշվման ճշտությունը, որոնք մտնում են a_n-ի և b_n-ի մեջ` երեք մեթոդներով հաշվարկի դեպքում. ուղիղ, հակադարձ ռեկուրսիա և Լենցի ալգորիթմ: Վերը նշված ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրի համար ընտրվել է հաշվի բարձր ճշտություն և արագություն ապահովող ալգորիթմ` ֆունկցիաների արգումենտի փոփոխման լայն միջակայքում: Ուսումնասիրությունները թույլ տվեցին մշակել "ORION" ծրագիրը /PL/1 լեզվով ծրագիրը բերվում է աշխատանքում/, որը կարող է բարձր ճշտությամբ և բավական արագ հաշվել ամպերում մմ և սբմմ ալիքների ռադիոլոկացիոն անդրադարձման և թուլացման գործակիցները:

Երևանի Ֆիզիկայի ինստիտուտ
Երևան 1990

Preprint YERPHI-1277(63)-90

H.M. AIVAZIAN

INVESTIGATION OF ALGORITHMS FOR CALCULATION OF THE MIE COEFFICIENTS IN THE PROBLEM OF PROPAGATION OF MM AND SubMM WAVES IN CLOUDS

The work is devoted to calculations in the theory of diffraction of electromagnetic waves on spherical particles according to the Mie theory, namely, to calculation of the Mie coefficients, a_n and b_n in case of extremal conditions of the problem, when the dimensionless diffraction parameter and the complex refractive index of matter change in a wide range from quite small values to maximal large ones. The available algorithms for calculation of the Mie coefficients are analyzed. The accuracy of special functions and of logarithmic derivative of the first-order Riccati-Bessel function included in a_n and b_n are determined by three methods: direct, inverse recursion and the Lentz algorithm. An algorithm is chosen for each of the above-mentioned functions, which provides high accuracy and rate in a wide range of variation of arguments. The investigations allowed us to write the "ORION" program (the program PL/1 is presented in the work), which with high accuracy and rate can calculate the attenuation and the radar reflection factors of millimeter and sub-millimeter waves in clouds.

Yerevan Physics Institute
Yerevan 1990

Препринт ЕФИ-1277(63)-90

УДК 536.43:538.566

Г.М.АЙВАЗЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ РАСЧЕТА КОЭФФИЦИЕНТОВ МИ В ЗАДАЧЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ММ И СБММ ВОЛН В ОБЛАКАХ

Работа посвящена вычислительным вопросам теории дифракции электромагнитных волн на сферической частице по теории Ми, а именно, расчету коэффициентов Ми, a_n и b_n в случае экстремальных условий задачи, когда безразмерный параметр дифракции и комплексный показатель преломления вещества меняется в широком диапазоне значений от весьма малых до максимально больших. Выполнен анализ имеющихся алгоритмов расчета коэффициентов Ми, определены точности счета специальных функций и логарифмической производной от функции Риккати-Бесселя первого рода, входящих в a_n и b_n, при расчетах тремя методами: прямая, обратная рекурсия и алгоритм Ленца. Для каждой из вышеуказанных функций отобран алгоритм, обеспечивающий высокую точность и скорость счета в широком диапазоне изменения аргументов функций. Исследования позволили разработать программу " ORION " (программа на языке PL/I приводится в работе), которая с высокой точностью и достаточно хорошей скоростью может считать коэффициенты ослабления и радиолокационного отражения миллиметровых и субмиллиметровых волн в облаках.

Ереванский физический институт

Ереван 1990

I. Введение

Несмотря на то, что разитие вычислительной техники в последние десятилетия позволило преодолеть многие трудности расчетов на ЭВМ по теории дифракции электромагнитного излучения на сферических частицах по теории Ми [1-4] остались трудности, связанные с расчетами в экстремальных условиях: одновременно малые и большие значения комплексного показателя преломления частицы и безразмерного параметра дифракции – $\rho = \frac{2\pi r}{\lambda}$, где r – радиус частицы, λ – длина волны. Указанная задача тесно примыкает к случаю распространения миллиметровых (ММ) и субмиллиметровых (СБММ) волн через облака,состоящих из мелких (от 1 до 45 мкм) и сверхкрупных (от 85 до 1500 и более мкм) капель воды , а иногда и льда. Комплексный показатель преломления воды и льда в этих диапазонах, как известно, меняется от весьма малых значений до величины порядка $m = 10 - 10i$. Параметр ρ при этом меняется от значения $\sim 0{,}001$ до порядка 400 и более. Анализ имеющихся алгоритмов расчетов по теории Ми показал, что каждый из имеющихся алгоритмов хорошо работает в определенной избирательной области изменения ρ и для ограниченных значений m.

Ниже приводится описание разработанной нами универсальной программы " ORION ", которая позволяет преодолеть вышеуказанные трудности и обеспечить высокую точность счета коэффициентов Ми для вышерассмотренных диапазонов изменения ρ и m. Естественно, программу " ORION " можно использовать и для других диапазонов длин волн и частиц, лишь бы соблюдались вышеуказанные условия задачи: малые и одновременно большие значения ρ и m.

II. Выбор выражений для расчетов коэффициентов Ми a_n и b_n

Для коэффициентов Ми - a_n и b_n, входящих в факторы эффективностей: ослабления-$K_0(m,\rho)$, рассеяния - $K_p(m,\rho)$, поглощения - $K_n(m,\rho)$ и радиолокационного отражения - $K_{\rho\lambda}(m,\rho)$ [I-3], в комплексные амплитуды, а также в параметры интенсивностей [3], предложено множество выражений. Они содержат различное количество специальных функций с действительными и мнимыми аргументами. Нет необходимости в перечислении всех указанных алгоритмов. Укажем лишь, что нами отобрано такое выражение для a_n и b_n, куда входит минимальное количество специальных функций [3-5]:

$$a_n = \frac{[A_n(m,\rho)/m + \frac{n}{\rho}]\,\psi_n(\rho) - \psi_{n-1}(\rho)}{[A_n(m,\rho)/m + \frac{n}{\rho}]\,\xi_n(\rho) - \xi_{n-1}(\rho)}, \qquad (I)$$

$$b_n = \frac{[m A_n(m,\rho) + \frac{n}{\rho}]\,\psi_n(\rho) - \psi_{n-1}(\rho)}{[m A_n(m,\rho) + \frac{n}{\rho}]\,\xi_n(\rho) - \xi_{n-1}(\rho)},$$

где $\psi_n(\rho)$ - функция Риккати-Бесселя первого рода действительного аргумента, $\xi_n(\rho) = \psi_n(\rho) + i\chi_n(\rho)$ - функция Риккати-Бесселя третьего рода, где $\chi_n(\rho)$ - функция Риккати-Бесселя второго рода действительного аргумента, $A_n(m,\rho)$ - логарифмическая производная от функции Риккати-Бесселя первого рода, мнимого аргумента.

Как известно, из-за плохой сходимости рядов Ми при расчете факторов эффективностей $K_i(m,\rho)$ (i принимает значения o, ρ, n и $\rho\lambda$) или комплексных амплитуд приходится суммировать большое число n действительных или комплексных значений коэффициентов a_n и b_n ($n \sim$ порядка ρ). При этом, из-за реальной ограниченной точности ЭВМ и применения рекуррентных формул при больших ρ или n, накапливается ошибка, которая приводит к снижению точности счета коэффициентов $K_i(m,\rho)$. Так, при $m \sim$ I,6 - 0,5i и $\rho \sim$ IOO точность расчета специальных функций должна быть не ниже IO^{-9} для получения $K_i(m,\rho)$ с точностью IO^{-3} [6].

С увеличением значений ρ и m: до m = IO - IOi и $\rho \approx 400$ повышается требование к точности расчета специальных функций. Требуется точность $\sim \mathrm{IO}^{-I3} - \mathrm{IO}^{-I4}$ для получения $K_i(m,\rho)$ с точностью $\mathrm{IO}^{-3} - \mathrm{IO}^{-4}$.

Математическая наука выработала критерии точного счета для различных функций. Исходя из этого, при расчетах специальных функций потребовалось их использование для реализации вышеописанных точностей. Ниже рассматриваются критерии, методы и алгоритмы, позволившие в программе " ORION " реализовать высокую точность при высокой скорости счета.

Ш. Расчет функции Риккати-Бесселя первого рода

А. Прямая рекурсия

Во всех ранних программах, связанных с расчетами по теории Ми, функция Риккати-Бесселя первого рода $\Psi_n(\rho)$

$$\Psi_n(\rho) = \rho \cdot j_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}}\, J_{n+1/2}(\rho) \tag{2}$$

рассчитывалась прямой рекурсией (расчет ведется от малых значений n к большим) по рекуррентной формуле

$$\Psi_{n+1}(\rho) = \frac{2n+1}{\rho}\Psi_n(\rho) - \Psi_{n-1}(\rho) \tag{3}$$

с начальными значениями (см.напр., [5])

$$\Psi_{-1}(\rho) = \cos\rho , \qquad \Psi_0(\rho) = \sin\rho \tag{4}$$

Здесь $j_n(\rho)$ - сферическая функция Бесселя первого рода, $J_{n+1/2}(\rho)$ - функция Бесселя первого рода с полуцелевым индексом. И теперь для малых величин ρ и соответственно m можно пользоваться прямой рекурсией при расчетах $\Psi_n(\rho)$.

Однако, в расчетах по формулам Ми приходится иметь дело с большими значениями ρ и n. Поэтому последовательное применение (3) для расчетов $\Psi_n(\rho)$ высших порядков приводит к накоплению ошибок, в результате чего при больших ρ пользоваться формулой (3) становится невозможным. В некоторых случаях, для расчетов функции $\Psi_n(\rho)$ высших порядков n в ЭВМ вместо одинарной точности (I5 точных знаков после запятой) применяется двойная точность счета - (3I точных знаков после запятой). Двойная точность счета не намного увеличивает величину n возможных расчетов $\Psi_n(\rho)$ прямой рекурсией, однако приводит к значительному увеличению расчетного времени. Поэтому для больших значений ρ и n наступает предел, где разумное увеличение точности счета $\Psi_n(\rho)$ не может обеспечить конечную точность $K_i(m,\rho)$ в пределах $10^{-3} - 10^{-4}$. Тогда теряется смысл расчета $\Psi_n(\rho)$ прямой рекурсией и необходимо искать другие пути расчета $\Psi_n(\rho)$.

Для исследователей, которых устраивает прямая рекурсия, полезно знать точность счета $\Psi_n(\rho)$. Как показали наши исследования при одинарной точности счета на ЭВМ: для значений ρ из интервала $0{,}001 < \rho < 0{,}1$ точность плохая:для $n = 1 \sim 10^{-6}-10^{-9}$ для $n = 2 \sim 10^{-5}-10^{-9}$ для $n = 3 \sim 10^{-1}-10^{-3}$. Для ρ в интервале $0{,}5 < \rho < 5$ при $n = 1$ точность $10^{-13}-10^{-14}$, а при $n = 2$ точность $\sim 10^{-12}-10^{14}$. По мере увеличения n точность постепенно падает и при $n \sim 9$ составляет 10^{-10}. Далее с увеличением величин ρ до $\rho = 100$ картина стабилизируется и точность составляет $10^{-13}-10^{-14}$ для всех значений n до $n \sim \rho$. В области $100 \leqslant \rho \leqslant 200$ точность несколько падает и составляет $10^{-12}-10^{-13}$. В области $\rho > 200$ для всех значений n точность резко падает и при $\rho \sim 300$ точность составляет $10^{-1}-10^{-2}$ для любых значений n до $n \sim \rho$. При двойной точности счета на ЭВМ имеем увеличение точности на $10^{-2}-10^{-3}$ по сравнению с данными при одинарной точности. Поэтому при $\rho > 200$ пользоваться прямой рекурсией для расчетов $\psi_n(\rho)$ невозможно.

В случае прямой рекурсии для $\psi_n(\rho)$ следует остерегаться неприятного факта скачкообразного изменения величины $\psi_n(\rho)$, т.е. резкого уменьшения точности счета $\psi_n(\rho)$. Явление это свя зано с близостью значений ρ к числу $\pi/2$ или кратному π. Согласно (4) ψ_n зависит от $\sin\rho$ и $\cos\rho$, поэтому близость ρ к $\pi/2$ или π может привести к значениям $\sin\rho$ или $\cos\rho$, равному 0 или очень близкому к нулю, где ЭВМ очень плохо считает. Это может привести к непредсказуемым ошибкам, на что обращено внимание Дейве [4].

Кроме того, расчеты показывают, что чем меньше n по сравнению с ρ, тем выше точность счета $\psi_n(\rho)$. Точность счета $\psi_n(\rho)$ резко ухудшается, когда $n \gg \rho$. В области $n \sim 1{,}3\rho$ точность счета $\psi_n(\rho)$ еще велика и это ориентировочный предел до которого следует брать величины n, чтобы обеспечить высокую точность сходимости рядов Ми [6]. Следует остерегаться чрезмерного увеличения рассматриваемых величин n при суммировании рядов Ми [5]. В работе Вискомба [7] приводятся предельные значения $n = N^*$, которые необходимо брать в зависимости от ρ

$$n = N^* = \begin{cases} \rho + 4\rho^{1/3} + 1 & 0{,}02 \leq \rho \leq 8 \\ \rho + 4.05\rho^{1/3} + 2 & 8 \leq \rho \leq 4200 \\ \rho + 4\rho^{1/3} + 2 & 4200 \leq \rho \leq 20000 \end{cases} \qquad (5)$$

Б. Обратная рекурсия

Функция $\psi_n(\rho)$ - убывающая функция от возрастания величины n, поэтому по правилам математики точного счета рассчитывать её необходимо обратной рекурсией. И в тех случаях, когда требуется высокая точность счета $\psi_n(\rho)$ при больших ρ и, следовательно, n должна применяться обратная рекурсия. Иначе говоря, опять применяется рекуррентная формула, только счет ведется от очень больших значений $n = N^*$ и рекурсией получаются значения $\psi_n(\rho)$ для последовательно малых значений n до $n = 1$. В отличие от прямой рекурсии, здесь требуется ЭВМ с большой памятью, поскольку в памяти ЭВМ необходимо сохранить все N^* значений $\psi_n(\rho)$. Это необходимо для введения соответствующих поправочных коэффициентов и окончательного расчета всех N^* величин $\psi_n(\rho)$. Схема вычислений обратной рекурсией выглядит следующим образом: следуя Аллену [8] и Гольдстейну и др. [9] по формулам

$$n = N^*(\rho) = \begin{cases} a_1'\rho^2 + b_1'\rho + c_1' & \text{если } 1 \leq \rho \leq 100 \\ a_2'\rho + b_2' & \text{если } 100 \leq \rho \leq 750 \end{cases} \qquad (6)$$

$a_1' = -0{,}2308\ 10^{-2}$, $a_2' = 0{,}1045\ 10^{1}$,
$b_1' = 0{,}1437\ 10^{1}$, $b_2' = 0{,}36\ 10^{2}$
$c_1' = 0{,}14\ 10^{2}$

и заданному ρ вычисляются несколько завышенные значения максимально большого $n = N^*(\rho)$, откуда следует начинать счет обратной рекурсии.

Задаются начальные исходные функции $\Psi_n(\rho)$

$$F_{N^*+\{n'\}}(\rho) = \varepsilon \;, \qquad F_{N^*+1+\{n'\}}(\rho) = 0 \tag{7}$$

где n' - полуцелое значение, входящее в рекуррентную формулу обратной рекурсии

$$F_{K-1+\{n'\}}(\rho) = \frac{2(K+\{n'\})}{\rho} F_{K+\{n'\}}(\rho) - F_{K+1+\{n'\}}(\rho) \tag{8}$$

По формулам (8) и (7) вычисляются значения вспомогательных функций

$$F_{N^*-1+\{n'\}}(\rho)\;, \quad F_{N^*-2+\{n'\}}(\rho) \;\cdots\; F_{\{n'\}}(\rho) \tag{9}$$

В дальнейшем по (9) вычисляются коэффициенты

$$A = \sum_{j=0}^{(\frac{N^*}{2})} \delta_j F_{2j+1/2}(\rho)$$

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} \qquad \delta_j = \frac{(2j+1/2)(2j-1)}{(2j-3/2\cdot 2j)} \tag{10}$$

Действительные значения сферической функции Бесселя первого рода вычисляются по формуле

$$j_{\{n'\}}(\rho) = \frac{1}{A} F_{\{n'\}}(\rho) \tag{11}$$

при условии

$$|j_{N^*-1}(\rho)| \geq \varepsilon, \qquad |j_{\{n'\}}(\rho)| < \varepsilon \qquad \text{для } \{n'\} \geq N^* \tag{12}$$

В нашей программе " ORION " используется несколько усовершенствованная схема расчета $\Psi_n(\rho)$, но сохраняются основные положения, изложенные выше. В качестве значения ε взято 10^{-30}. Брать меньше этого значения ε невозможно, из-за используемой ЭВМ типа ЕС-1045, которая для определенных значений ρ дает **averflom.**

В работах Аллена [8] ,Гольдстейна и др. [9] указывается, что область использования обратной рекурсии ограничена снизу значением $\rho = 1$ (см.формулу (6)). Однако наши исследования показали, что обратную рекурсию для $\Psi_n(\rho)$ можно использовать и для $\rho < 1$.

Наши исследования показали, что при расчетах $\Psi_n(\rho)$ обратной рекурсией соблюдаются следующие точности в зависимости от величины ρ и n при одинарной точности счета на ЭВМ: в области ρ от 0,001 до 0,5 точность $10^{-14} - 10^{-15}$ независимо от величины n . В области $0,5 \leq \rho \leq 10$ точность составляет $10^{-13} - 10^{-14}$ и с увеличением n точность постепенно уменьшается. В области $10 \leq \rho \leq 100$ точность $10^{-11} - 10^{-13}$, а при определенных больших $n \sim 120$ точность составляет 10^{-9}. В области $200 \leq \rho \leq 400$ точность стабильна и составляет $10^{-10} - 10^{-11}$ и лишь для случаев $n > \rho$ точность может составлять -10^{-9}.

Время, затраченное на расчеты $\Psi_n(\rho)$ обратной рекурсией, несколько больше, чем при расчётах прямой рекурсией,однако в точности расчетов можно выиграть несомненно.

В. Расчет алгоритмом Ленца

Функцию $\psi_n(\rho)$ можно считать и алгоритмом Ленца [IO] .По сравнению с обратной рекурсией этот расчет гораздо медленная процедура, поскольку $\psi_n(\rho)$ рассчитывается не рекуррентной формулой, а отдельно для каждого обособленного значения n . Преимущество при расчетах алгоритмом Ленца [IO] заключается в том, что точность счета задается заранее исследователем, и она может быть сколь угодно большой. Кроме всего прочего расчеты $\psi_n(\rho)$ алгоритмом Ленца отнимают очень много расчетного времени. Тех же, кого интересует расчет $\psi_n(\rho)$ алгоритмом Ленца, мы, согласно Ленцу [IO] , приводим эту формулу

$$j_n(\rho) = \frac{(\rho)^n(2n+1)!!\rho^2/(4\cdot 1(\nu'+1))}{1 \qquad +1-\rho^2/(4\cdot 1(\nu'+1))} \cdots \frac{\rho^2/(4\kappa'(\nu'+\kappa'))}{+1-\rho^2/(4\kappa'(\nu'+\kappa'))} \tag{I3}$$

Члены этой формулы могут быть приведены к виду, удобному для расчетов с помощью преобразований, приведенных Абрамовицем [II] и это подробно рассмотрено Ленцем [IO] .

Из вышеприведенного напрашивается естественный вопрос: насколько алгоритм Ленца может улучшить точность счета $\psi_n(\rho)$ и насколько при этом ухудшится временный показатель счета? Подобная постановка вопроса может заинтересовать тех исследователей, которых не устраивает приведенная выше точность обратной рекурсией, используемая в нашей программе "ORION ", и заинтересованных в еще большем улучшении точности счета $\psi_n(\rho)$.

IУ. Расчет функции Риккати-Бесселя второго рода

Г. Прямая рекурсия

Во всех до сих пор проведенных расчетах функция Риккати-Бесселя второго рода $\chi_n(\rho)$ рассчитывалась прямой рекурсией. Это связано с характером самой функции $\chi_n(\rho)$,представляющей возрастающую функцию от порядка n и требующей, согласно правилам математики, точного счета - расчетов прямой рекурсией. Поэтому по сравнению с другими цилиндрическими функция $\chi_n(\rho)$ наиболее проста в расчетах и рассчитывается прямой рекурсией. Прямая рекурсия используется нами при расчетах $\chi_n(\rho)$ в программе " ORION " с начальными значениями согласно Борену и Хафмену [5]

$$\chi_{-1}(\rho) = -\sin\rho \quad , \qquad \chi_0(\rho) = \cos\rho \tag{I4}$$

и рекуррентной формулой (3).

Наши исследования показали, что с какой точностью считает ЭВМ (одинарной или двойной), такая же точность получается для $\chi_n(\rho)$ соответственно: 10^{-15} или 10^{-31}. С увеличением n над ρ , точность расчетов $\chi_n(\rho)$ постепенно ухудшается. В нашей программе " ORION " используется одинарная точность счета ЭВМ, поскольку точность $10^{-14} - 10^{-15}$нас вполне устраивает.

Только одна неприятность может иметь место при расчетах прямой рекурсией $\chi_n(\rho)$. Согласно формулам (I4), $\chi_n(\rho)$ разных порядков n зависят от $\sin\rho$ и $\cos\rho$, поэтому при близости ρ к $\pi/2$ или кратному π может возникнуть ошибка из-за близости $\chi_n(\rho)$ к нулю (машина плохо считает в области нуля). Для этих случаев в ЭВМ можно предусмотреть программу, исключающую возникновение подобных ситуаций. Для тех, кого не устраивает расчет $\chi_n(\rho)$ прямой рекурсией, можно предложить другие алгоритмы расчетов $\chi_n(\rho)$.

Д. Обратная рекурсия вместе с прямой

Обратной рекурсией вычисляется $j_n(\rho)$ или же $J_{-1+1/2}(\rho)$ и $J_{1+1/2}(\rho)$ согласно Аллену [8] и Гольдстейну и др. [9]. Это означает, что точно определены начальные значения для функций Бесселя второго рода с полуцелым индексом

$$y_{1/2}(\rho) = -J_{-1+1/2}(\rho), \qquad y_{1+1/2}(\rho) = J_{-2+1/2}(\rho) \tag{15}$$

затем по рекуррентной формуле (прямая рекурсия)

$$y_{k'+1+1/2}(\rho) = \frac{2(k'+1/2)}{\rho}\, y_{k'+1/2}(\rho) - y_{k'-1+1/2}(\rho) \tag{16}$$

вычисляются значения $y_{n+1/2}(\rho)$, где $k' = 1,2 \ldots n$. Совмещение двух вышеуказанных методов позволит повысить точность расчета $\chi_n(\rho)$ и избежать ошибок, указанных выше.

Е. Обратная рекурсия

Другой метод точного счета $\chi_n(\rho)$ предложен Грейем и др. [12]. Используя уравнение сферической функции Бесселя, согласно Абрамовицу [11] (10.1.31)

$$j_n(\rho)\cdot y_{n-1}(\rho) - j_{n-1}(\rho)\cdot y_n(\rho) = \rho^{-2} \tag{17}$$

Здесь $y_n(\rho)$ – сферическая функция Бесселя второго рода. Отношение $j_n(\rho)/j_{n-1}(\rho)$ можно рассчитать, используя алгоритм Ленца [10]. Подробности можно посмотреть в [10].

Завершая рассмотрение расчетов $\chi_n(\rho)$, следует отметить, что какую бы точность счета на ЭВМ одинарную или двойную ни брать, прямая рекурсия может привести к неточности счета. Согласно исследованиям Ленца [10], подобная нестабильность в расчетах $y_n(\rho)$ может наблюдаться в 19-м порядке числа, когда $m = 10-10i$, где после некоторого провала наблюдается опять переход к стабильным результатам и еще в 99-м порядке числа, когда $m = 100-100i$. Поскольку подобные высокие значения в наших расчетах не встречаются, нет основания для опасения в расчетах $y_n(\rho)$ или $\chi_n(\rho)$ прямой рекурсией.

У. Расчет логарифмической производной от функции Риккати-Бесселя первого рода

Логарифмическая производная от функции Риккати-Бесселя первого рода мнимого аргумента – $A_n(y)$ (обозначение взято согласно Дейрменджану [3])

$$A_n(y) = \frac{d}{dy}\ln \Psi_n(y) = \frac{\Psi'_n(m\rho)}{\Psi_n(m\rho)} \tag{18}$$

впервые введена в практику расчетов Инфельдом [13] и затем сразу же нашла применение в работах [14,15]. В работе [16] рассматриваются две логарифмические производные – реального и мнимого аргумента, а в работах [3,4] использовалась одна функция $A_n(y)$ мнимого аргумента для расчетов коэффициентов

Ми a_n и b_n. Введение в практику расчетов $A_n(y)$ явилось прогрессивным шагом, намного ускорившем расчеты по теории Ми.

Ж. Прямая рекурсия

Первое подробное исследование функции $A_n(y)$ выполнено Дейрменджаном [3] в его известной монографии, где расчеты проводились прямой рекурсией по формуле

$$A_n(y) = -\frac{n}{y} + \left[\frac{n}{y} - A_{n-1}(y)\right]^{-1} \qquad (19)$$

при начальном значении

$$A_0(y) = \frac{\sin p_0 \cdot \cos p_0 + i\, \mathrm{sh}\, q_0 \cdot \mathrm{ch}\, q_0}{\sin^2 p_0 + \mathrm{sh}^2 q_0}, \qquad (20)$$

где $y = m\rho = p_0 - iq_0$, $p_0 = \tilde{n}\rho$, $q_0 = æ\rho$, $m = \tilde{n} - iæ$

m – комплексный показатель преломления, $\tilde{n}$ – показатель преломления и $æ$ – показатель поглощения, ρ – безразмерный параметр дифракции $\rho = \frac{2\pi r}{\lambda}$, r – радиус капли, λ – длина волны.

Как показали исследования ряда авторов, функция $A_n(y)$ не так уж проста в расчетах, как это кажется с первого взгляда. При расчетах прямой рекурсией $A_n(y)$ избирательно ошибочна при малых (см. [17]) ρ и n, а также для больших значений m, ρ и n (см. [3]). В этом отношении функция $A_n(y)$ резко отличается от функций $\Psi_n(\rho)$ и $\chi_n(\rho)$, для которых трудности связаны только с расчетами для больших значений ρ и n Кроме того, оказывается, что точность счета $A_n(y)$ зависит от значения комплексного показателя преломления m, в особенности от показателя $æ$.

Наши исследования показали, что при малой величине $æ$ в m (m = I,78-0,Ii) при ρ из интервала 0,00I $< \rho <$ 0,05 точность расчета $A_1(y)$ составляет $\sim 10^{-10}$, как для действительной так и мнимой частей $A_1(y)$, а для $A_2(y)$ $\sim 10^{-3}$–10^{-5}. С увеличением ρ точность расчетов $A_1(y)$ увеличивается до 10^{-13} для $0{,}05 \leqslant \rho < 3$, а для $A_2(y)$ и т.д. точность уменьшается почти на 10^{-1} при уменьшении n на единицу. Для областей $\rho > 3$ и до $\rho \sim 50$ точность стабилизируется и составляет 10^{-10}– 10^{-11} для всех значений $n \sim \rho$. В области $\rho \sim$ 100–400 точность составляет 10^{-8}–10^{-10} для любых $n \sim \rho$, причем с увеличением n точность несколько ухудшается. Для $n > \rho$ точность составляет примерно 10^{-6}–10^{-7}. Все вышеуказанное относится как к действительной, так и к мнимой частям $A_n(y)$.

Точность расчетов сильно меняется для больших значений $æ$ в m (m = I,28-I,37). Для ρ из интервала $0{,}001 \leqslant \rho \leqslant 0{,}01$ точность расчетов $A_1(y)$ составляет 10^{-7}–10^{-10}, а для $A_2(y) \sim 10^{-3}$–10^{-6}. Для $0{,}01 \leqslant \rho \leqslant 0{,}5$ точность составляет: для $A_1(y)$ 10^{-11}–10^{-13} и с возрастанием n точность постепенно уменьшается и при $n = 5 \sim 10^{-6}$–10^{-7}. Для $1 \leqslant \rho \leqslant 50$ точность стабилизируется и для $A_1(y)$ составляет 10^{-13}–10^{-14}. С увеличением n точность постепенно уменьшается до 10^{-10}–10^{-11} для $\rho \sim n$. Для $\rho \sim 70$ точность счета очень сильно ухудшается при любых n и пользоваться формулой $A_n(y)$ прямой рекурсии уже невозможно. Применение двойной точности счета на ЭВМ несколько улучшает точность счета, но не намного 10^{-1}–10^{-2}.

Вопрос зависимости точности счета $A_n(y)$ от величины $æ$

исследован Катаваром и др. [18] , а также Вискомбом [19] . Наши расчеты показали, что точность счета $A_n(y)$ зависит одновременно от ρ и n . Поэтому исследования Вискомба [19] следует продолжить и получить конкретные значения точностей для m, ρ и n , причем конкретно для функции $A_n(y)$, а не для коэффициентов эффективностей. Наши же расчеты позволили установить, что, чем меньше величина $æ$ в m , тем для больших ρ и n правомочно использование прямой рекурсии для $A_n(y)$. Указанное относится к случаю $n<\rho$. При $n\sim\rho$ и и $n>\rho$ точность опять резко ухудшается.

3. Обратная рекурсия

Для устранения ошибок счета $A_n(y)$ прямой рекурсией можно использовать обратную рекурсию. В работе Борена и Хафмана [5] предложена следующая схема расчетов $A_n(y)$ обратной рекурсией

$$A_{n-1}(y) = \frac{n}{y} - \left[A_n(y) + \frac{n}{y}\right]^{-1} \qquad (21)$$

Число n – наибольшее значение N^* и рассчитывается по формуле

$$n = N^* = \rho + 4\rho^{1/3} + 2 + 15 \qquad (22)$$

Начальное значение $A_n(y)$, с которого следует начинать счет , $A_{N^*} = 0,0-0,0i$. Из (22) легко убедиться, что это видоизмененная формула (5) для очень больших значений ρ с добавлением числа 15. Дело в том, что 15 – это число неверных

чисел, которое сопровождает расчет обратной рекурсии. Расчет с уменьшением n исправляется и уже практически с $n=\rho+4\rho^{1/3}+2$ наблюдаются точные значения $A_n(y)$. Здесь, в отличие от других схем расчетов обратной рекурсией (см.разделы Б и Д), не предусмотрена коррекция по формулам (8)-(12). Этим, по-видимому, можно объяснить ухудшение точности счета $A_n(y)$ для больших значений ρ , полученных в результате нашего исследования по схеме обратной рекурсии, предложенной Бореном и Хафменом [5]. Результаты наших исследований формул (21), (22) показали, что точность счета опять сильно зависит от $æ$ в m , а также от ρ и n . Для малых значений $æ$ в m (m = 1,78-0,1i): для малых значений ρ от 0,01 до 5 точность счета весьма стабильна и составляет 10^{-14}-10^{-15}, как для мнимой, так и действительной частей $A_n(y)$ (при одинарной точности счета ЭВМ). Для $\rho\sim 10$ точность несколько уменьшается и составляет 10^{-10}-10^{-13}. Для $\rho \geqslant 30$ пользоваться предложенной схемой расчетов $A_n(y)$ уже невозможно из-за резкого ухудшения точности счета.

Для больших значений $æ$ в m (m = 1,28-1,37i) для малых $\rho\sim 0,001$ и до $\rho\sim 3$ точность счета $A_n(y)$ очень высока и составляет 10^{-14}-10^{-15}. Начиная с $\rho = 3$ и с возрастанием ρ точность счета $A_n(y)$ постепенно ухудшается. Так, при $\rho = 5$ точность составляет 10^{-13}-10^{-14} при ρ = 50-10^{-7}-10^{-13},а при ρ = 100 ~ 10^{-5}-10^{-9}, когда $n\sim\rho$. При $n>\rho$ точность счета $A_n(y)$ резко ухудшается независимо от величины ρ : при $\rho\sim 200$ точность составляет 10^{-3}, для $\rho\sim 300$ – 10^{-5}, а для $\rho\sim 400$ – 10^{-4} при условии $n>\rho$, но не намного. Для этих же ρ , но при $n<\rho$ точность составляет 10^{-9}-10^{-10}.

По-видимому, точность счета $A_n(y)$ можно намного улучшить, если использовать в расчетах коррекцию по формулам (8)-(I2). Подобный расчет, возможно, применялся в расчетах Дейве [I7], иначе невозможно объяснить точные расчеты $A_n(y)$ для очень больших ρ, правда, при небольших $æ$ и m. Анализом расчетов $A_n(y)$ обратной рекурсией с коррекцией мы заниматься не будем. Выше указана схема коррекции, и при желании каждый исследователь может воспользоваться ею. Намного целесообразнее обратиться к расчетам $A_n(y)$ алгоритмом Ленца [I0], который дает существенные преимущества в точности счета $A_n(y)$.

И. Расчет алгоритмом Ленца

Формула для расчетов $A_n(y)$ алгоритмом Ленца [I0] выглядит

$$A_n(y) = \frac{\Psi_n'(y)}{\Psi_n(y)} = -\frac{n}{y} + \frac{J_{n-1/2}(y)}{J_{n+1/2}(y)} \tag{23}$$

$$\frac{J_{n-1/2}(y)}{J_{n+1/2}(y)} = \frac{|a_1||a_2a_1|\cdot|a_3a_2a_1|\ldots\ldots|a_{g-1}\ldots a_1||a_g\ldots a_1|}{|a_2|\;|a_3a_2|\;\ldots\;|a_{g-1}\cdots a_2||a_g\cdots a_2|} \tag{24}$$

$$a_{m'} = (-1)^{m'+1}\cdot 2(n+m'-1/2)y^{-1} \tag{25}$$

$$|a_1| = a_1 = (-1)^2\cdot 2(n+1-1/2)y^{-1} \tag{26}$$

$$\left.\begin{aligned} |a_2\cdot a_1| &= a_2 + \frac{1}{a_1} \\ |a_3\cdot a_2\cdot a_1| &= a_3 + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_1} \\ |a_4\cdot a_3\cdot a_2\cdot a_1| &= a_4 + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_1} \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Расчет (24) проводится последовательно сравнением числителя и знаменателя дробей, например, $|a_2\cdot a_1|/|a_2|$ или $|a_3\cdot a_2\cdot a_1|/|a_3\cdot a_2|$ и т.д. Точность счета задается заранее, например, 10^{-9}. Если числитель и знаменатель совпадают с точностью, заданной исследователем, то расчет всей дроби (24) прекращается на той дроби, на которой уже достигнута отмеченная точность. Если точность не достигнута, то считается следующая дробь, например, $|a_4\cdot a_3\cdot a_2\cdot a_1|/|a_4\cdot a_3\cdot a_2|$ и т.д., пока не будет достигнута установленная точность счета выражения (24). Поэтому в зависимости от m, ρ и точности счета количество дроби в (24) будет различным.

Первые же наши расчеты $A_n(y)$ по (27) показали, что вычисление $A_n(y)$ для каждого n занимает очень много времени. Поэтому было принято решение, расчеты приводить по схеме

$$\begin{aligned} |a_2\cdot a_1| &= a_2 + \frac{1}{|a_1|} \\ |a_3\cdot a_2\cdot a_1| &= a_3 + \frac{1}{|a_2\cdot a_1|} \\ |a_4\cdot a_3\cdot a_2\cdot a_1| &= a_4 + \frac{1}{|a_3\cdot a_2\cdot a_1|} \end{aligned} \tag{28}$$

Расчет по (28) позволил намного ускорить скорость счета $A_n(y)$. Далее было обращено внимание на то, что очень много времени ЭВМ тратит на сравнение числителя и знаменателя дроби для получения заданной точности счета. Когда число дробей велико, скажем, 200,300, то на это уходит очень много времени. Поэтому в нашей программе "ORION" разработан алгоритм, который не сравнивает первые дроби, и только тогда, когда до достижения заданной точности не достает, скажем, 5 дробей, начинается сравнение числителя и знаменателя до достижения заданной точности.

Следующая проблема - это выбор точности счета функции $A_n(y)$ на ЭВМ. В программе "ORION" выбрана одинарная точность счета. Однако за счет этого увеличена точность счета самой функции $A_n(y)$ до 10^{-20}. Этот оптимум позволил получить достаточно точную программу счета $A_n(y)$ с достаточно высокой скоростью счета.

Исследования наши показали, что для $\rho > 10$, если с одинарной точностью счета использовать оптимизирующую программу ЕС-1045, то примерно в два раза можно ускорить время счета $A_n(y)$.

В результате всех вышеприведенных усовершенствований удалось получить достаточно высокую скорость счета $A_n(y)$ при высокой точности счета.

В табл.I мы приводим результаты сравнения расчетов $A_n(y)$ по программе Дейве [4], Ленца [10], которые приводятся в работе Вискомба [7], с результатами наших расчетов $A_n(y)$ по программе "ORION". Напомним, что Дейве [4] приводил расчеты $A_n(y)$ обратной рекурсией, а Вискомб [19] и программа "ORION" алгоритмом Ленца [10]. В таблице приводится число дробей или опе-

Таблица I

Результаты сравнения расчетов различными алгоритмами x)

ρ	m	Число дробей или операций		
		Дейве [4,17]	Вискомб [7,19]	"ORION"
100	1,05-i	41	16	30
"	1,50-i	80	22	41
"	1,95-i	122	31	55
1000	1,05-0,01i	115	53	87
"	1,05-0,1i	121	32	67
"	1,05-i	555	20	41
"	1,50-0,1i	613	135	298
	1,50-i	943	28	59
	1,95-0,1i	1108	254	744
	1,95-i	1370	42	86

x) Дейве [4,17] - обратная рекурсия,
Вискомб [7,19]- алгоритм Ленца [10] - точность 10^{-8};
"ORION" - алгоритм Ленца [10]- точность 10^{-20}.

раций, которые необходимо вычислить, чтобы получить одно значение $A_n(y)$ для любого, каждого ρ и m. Различие числа дробей по программе "ORION" и Вискомба [7,19] связано с различием в точности вычисления $A_n(y)$: у Вискомба [7,19] - 10^{-8}, а у нас в "ORION" - 10^{-20}. К сожалению, у Вискомба [7,19] не приводятся времена счета $A_n(y)$, чтобы сравнить с программой "ORION".

В работе Вискомба [7] приводятся времена счета одного из коэффициентов эффективностей: ослабления, рассеяния, поглощения или адиолокационного отражения. В табл.2 сравниваются теперь уже

Таблица 2

Время расчета одного из значений фактора эффективностей различными алгоритмами x)

ρ	Время в секундах			
	Дейве [4,17]	Виском6 [7,19]	" ORION " $m=1,78-0,1$	" ORION " $m=1,28-1,37$
0,05	-	-	0,0057	0,0059
0,1	0,7	0,018	0,0057	0,006
1	1,1	0,036	0,0059	0,0062
10	3,7	0,098	0,0071	0,0071
100	22	0,54	0,045	0,0227
400	-	-	0,45	0,3616
1000	194	4,56	-	-

x) Дейве [4,17]- приводил расчеты на ЭВМ 360/50-360/91 10 млн операций/секунду

Виском6 [7,19] - проводил расчеты на Cray-I - 1 млрд операций/секунду

"ORION " - мы проводили расчеты на ЕС-1048-0,8 - 1 млн операций/секунду

В табл.2 все времена приведены к скорости 10 млн операций/секунду

времена счета для одного из вышеуказанных коэффициентов эффективностей по программам Дейве [4,17] , Вискомба [7,19] с расчетами по нашей программе " ORION ". Как видно из табл.2, скорость счета программой " ORION ", для отдельных ρ и m , почти в 10 раз быстрее, чем при расчетах программой Вискомба [7,19] и несравненно быстрее расчетов по программе Дейве [4,17] .

У внимательного читателя может возникнуть естественный вопрос: какими эталонными значениями специальных функций и логарифмической производной от специальной функции располагает автор, если речь идет относительно одинарной - 10^{-15} и двойной 10^{-31} точностей счета - на ЭВМ. Действительно, подобных таблиц в литературе нет. Поэтому по просьбе автора сотрудники ВЦ АН АрмССР во главе с кандидатом физ.-мат.наук Г.Б.Маранджаном разработали специальный алгоритм расчетов функций Риккати-Бесселя первого и второго рода с весьма высокой точностью счета. Ясно, что на данном этапе развития науки подобная точность счета пока не нужна. Поэтому автор использовал эти алгоритмы для получения таблиц $\Psi_n(\rho)$ и $\chi_n(\rho)$ с точностью 10^{-31}. Таблицы охватывают значения аргументов от 0,001 до 400 с определенными разумными интервалами. При этом значения n изменяются от 1 до $n = 1,3\rho$ [6] опять с разумными интервалами.

В качестве эталонных значений для функции $A_n(y)$ использовались рассчитанные нами по алгоритму Ленца [10] значения $A_n(y)$ - точностью 10^{-20}. Расчеты охватывают диапазон изменения ρ от 0,001 до 400 и два значения m: $m = 1,78-0,1i$ и $m = 1,28-1,37i$. Дискретные значения ρ взяты с разумными интервалами. Для каждого значения m и ρ вычисления $A_n(y)$ проводились для дискретных значений n от $n = 1$ до N^* , которое примерно равно $n = 1{,}3\rho$, а точнее, по формуле три из (5). Вычисления проводились для n через разумные интервалы.

VI. Программа "ORION"

Прежде чем приводить программу "ORION", которая написана на языке PL/1, сделаем несколько замечаний по программе.

Программа "ORION" предназначена для расчетов спектральных коэффициентов: ослабления – $\Gamma_o(\lambda)$, рассеяния – $\Gamma_p(\lambda)$, поглощения – $\Gamma_n(\lambda)$ и радиолокационного отражения – $\Gamma_{p\lambda}(\lambda)$ ММ и СБММ волн в облаках по формуле

$$\Gamma_i(\lambda) = 1{,}36439\cdot 10^{-2}\int_{r_1}^{r_2} r^2\cdot N\cdot f(r)\cdot K_i(m,\rho)\,dr \quad \text{дБ/км} \qquad (29)$$

Здесь r – радиус капель в мкм, N – число капель в единице объема – $см^{-3}$, $f(r)$ – плотность распределения капель по размерам, $m=\tilde{n}-i\varkappa$ – комплексный показатель преломления, $\tilde{n}$ – показатель преломления, $\varkappa$ – показатель поглощения, $\rho=\frac{2\pi r}{\lambda}$ – безразмерный параметр дифракции, λ – длина волны в мкм, $K_i(m,\rho)$ факторы эффективностей (i принимает последовательно значения o, p, n и $p\lambda$) соответственно ослабления, рассеяния, поглощения и радиолокационного отражения. Факторы эффективностей согласно Шифрину [1–2] и Дейрменджану [3] выражаются

$$K_o(m,\rho) = \frac{2}{\rho^2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\,\mathrm{Re}(a_n+b_n), \qquad (30)$$

$$K_p(m,\rho) = \frac{2}{\rho^2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)(|a_n|^2+|b_n|^2), \qquad (31)$$

$$K_n(m,\rho) = K_o(m,\rho) - K_p(m,\rho), \qquad (32)$$

$$K_{p\lambda}(m,\rho) = \frac{1}{\rho^2}\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n+1)[a_n-b_n]\right|^2. \qquad (33)$$

Подставив (30)–(33) в (29), получим соответствующие значения $\Gamma_o(\lambda)$, $\Gamma_p(\lambda)$, $\Gamma_n(\lambda)$ и $\Gamma_{p\lambda}(\lambda)$.

Программа "ORION" написана для первого варианта, а именно, для 14 типов облаков, где размеры капель изменяются от $r_1 = 1$ мкм и максимально до $r_2 = 45$ мкм, а плотность распределения капель по размерам – $f(r)$, согласно Левину [20], подчиняется гамма-распределению

$$f(r) = \begin{cases} \dfrac{r^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}}\exp\left[-\dfrac{r}{\beta}\right] & r>0 \\ 0 & r<0 \end{cases} \qquad (34)$$

В предпоследней таблице программы "ORION" приводятся параметры (34) для 14 типов облаков: r_1 и r_2, затем значения β, значения α и, наконец, значения N в $см^{-3}$.

В программе "ORION" расчеты приводятся для 19 значений длин волн миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов из интервала 10–1 мм через 1 мм и 1–0,1 мм через 0,1 мм. Соответственно в последней таблице программы приводятся значения $\tilde{n}$ и $\varkappa$ для пяти значений температур: 20^0, 10^0, 0^0, -10^0 и -20^0 и всех

19 значений длин волн.

Коэффициенты $\Gamma_o(\lambda)$, $\Gamma_p(\lambda)$, $\Gamma_n(\lambda)$ вычисляются в единицах дБ/км, а коэффициент $\Gamma_{p\lambda}(\lambda)$ в $м^{-1}$. В программе приводится коэффициент перевода единиц дБ/км в $м^{-1}$.

Подпрограмма DQG 24 предназначена для вычисления интегралов по формуле (29). Здесь же приводится подпрограмма вычислений гамма-функции.

Подпрограмма вычислений $K_i(m,\rho)$ включает вычисление специальных функций: функции Риккати-Бесселя первого рода - обратной рекурсией, функции Риккати-Бесселя второго рода - прямой рекурсией и логарифмической производной от функции Риккати-Бесселя первого рода - алгоритмом Ленца.

Для ясности программа "ORION" снабжена пояснительными надписями и комментариями.

В разделе вычисления функций $A_n(y)$ имеется комментарий "обход нуля", который требует объяснения. При расчетах $A_n(y)$ алгоритмом Ленца мало вероятно, однако не исключен случай, когда один из знаменателей непрерывной дроби может оказаться меньше расчетного нуля ЭВМ. В этом случае дробь будет стремиться к бесконечности и дальнейший счет непрерывной дроби прекратится. Чтобы исключить указанную ситуацию и расчеты продолжить до логического завершения, в программе "ORION", согласно модели, предложенной в работе Ленца [10], разработан алгоритм обхода нуля. В комментариях этот алгоритм обозначен "обход нуля".

В программе "ORION" все обозначения соответствуют буквенным обозначениям вышеприведенных формул и легко расшифровываются.

На печать выводятся данные отдельно для каждого из 14 типов облаков (см.раздел под комментарием: "вывод результатов"). Каждый тип облака включает четыре отдельных массива соответственно для коэффициентов $\Gamma_o(\lambda)$, $\Gamma_p(\lambda)$, $\Gamma_n(\lambda)$ в дБ/км и $\Gamma_{p\lambda}(\lambda)$ в $м^{-1}$. Каждый массив включает 19 строк по числу длин волн и пяти столбцов - последовательно для температур: 20^0, 10^0, 0^0, -10^0 и -20^0C.

Данные для Γ_o, Γ_p, Γ_n и $\Gamma_{p\lambda}$ печатаются с точностью три знака после запятой.

```
//ORION JOB (1,9,,,,A),'АРУТЮНЯН Н.П.',REGION=256K
//ST1 EXEC PLIXOG,TIME=120
/*****************************************************************/
/*      == УНИВЕРСАЛЬНАЯ ПРОГРАММА  «O R I O N»  ==              */
/*  РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОСЛАБЛЕНИЯ, РАССЕЯНИЯ, ПОГЛОЩЕНИЯ       */
/*   И РАДИОЛОКАЦИОННОГО ОТРАЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН         */
/*                    ДИСПЕРСНОЙ СРЕДОЙ.                         */
/*****************************************************************/
(NOUNDERFLOW):
AIVP:PROC OPTIONS(MAIN);   /*I - ВАРИАНТ */
     DCL (G8,R0,C,AA,BB,A7,G7,RM) BIN FLOAT(53),
         ALF BIN FIXED(31);
     DCL ((G1,G2,G3,G4,G5)(14),(CC1,CC2,CC3,CC4)(2),
         (SUMQ(14),(SUMSO,SUMSR,SUMSP,SUMSRL)(14,19,5)),
         (C1,C2,C3,C4)(14)) BIN FLOAT(53);
     DCL (QQ,(AB,AC)(19,5),AL(19),SO,SR,SP,SRL,QJ,SOJ,SRJ,
         SPJ,SRLJ,(AC1,AC2)(8),QK,HAVQ(14),SOK,SRK,
         SPK,SRLK) BIN FLOAT(53);
     DCL (NIV,KAPA,LAM,R1,R2,B,EN) BIN FLOAT(53);
        DO L=1 TO 14;
     GET LIST(G1(L),G2(L),G3(L),G4(L),G5(L)); /******************/
        END;                                   /*                */
        DO K1=1 TO 19;                         /*     ВВОД       */
          GET LIST(AL(K1));                    /*   ИСХОДНЫХ     */
         DO I1=1 TO 5;                         /*    ДАННЫХ      */
           GET LIST(AB(K1,I1),AC(K1,I1));      /*                */
         END;                                  /******************/
        END;
     IG=1;
     AA=4,18870E-6;BB=1,36439E-2;
     /*************************************************************/
     /*      ВЫЗОВ ПОДПРОГРАММ РАСЧЕТА ИНТЕГРАЛОВ  ДЛЯ            */
     /*  КОЭФФИЦИЕНТОВ ОСЛАБЛЕНИЯ, РАССЕЯНИЯ, ПОГЛОЩЕНИЯ И        */
     /*            РАДИОЛОКАЦИОННОГО ОТРАЖЕНИЯ.                   */
     /*************************************************************/
        DO L=1 TO 14;
          R1=G1(L);R2=G2(L);R0=G3(L);ALF=G4(L);EN=G5(L);
          I1=1;CALL DQG24(R1,R2,QQ);QQ=EN*AA*QQ;
          SUMQ(L)=QQ;
         DO K1=1 TO 19;
           LAM=AL(K1);
          DO I1=1 TO 5;
            NIV=AB(K1,I1);KAPA=AC(K1,I1);
       I1=2;CALL DQG24(R1,R2,SO);SO=EN*BB*SO;
            SUMSO(L,K1,I1)=SO;
       I1=3;CALL DQG24(R1,R2,SR);SR=EN*BB*SR;
            SUMSR(L,K1,I1)=SR;
       I1=4;SP=SO-SR;SUMSP(L,K1,I1)=SP;
       I1=5;CALL DQG24(R1,R2,SRL);SRL=EN*BB*SRL;
            SUMSRL(L,K1,I1)=SRL*1,0E-3/4,34294E0;
          END;
         END;
        END;
/*************************************************************/
/*                  ВЫВОД   РЕЗУЛЬТАТОВ                      */
/*************************************************************/
        DO L=1 TO 14;
PUT SKIP(4) EDIT('QQ=',SUMQ)(A(3),E(22,15));
PUT SKIP(2) EDIT('ЗНАЧЕНИЯ «SO»',L)(COL(30),A(15),X(5),F(2));
        DO K1=1 TO 19;
   PUT SKIP EDIT(AL(K1),SUMSO(L,K1,*))(E(7,1),(5)(X(2),E(11,5)));
        END;
PUT SKIP(3) EDIT('ЗНАЧЕНИЯ «SR»',L)(COL(30),A(15),X(5),F(2));
```



```
      DO K1=1 TO 19;
   PUT SKIP EDIT(AL(K1),SUMSR(L,K1,*))(E(7,1),(5)(X(2),E(11,5)));
      END;
 PUT SKIP(3) EDIT('ЗНАЧЕНИЯ «SP»',L)(COL(30),A(15),X(5),F(2));
      DO K1=1 TO 19;
   PUT SKIP EDIT(AL(K1),SUMSP(L,K1,*))(E(7,1),(5)(X(2),E(11,5)));
      END;
 PUT SKIP(3) EDIT('ЗНАЧЕНИЯ «SRL»',L)(COL(30),A(15),X(5),F(2));
      DO K1=1 TO 19;
   KRQ PIDK ГФDQ(БМ(IY),PRRPMИ(И,IY,*))(Г(2,Y),(0)(S(X),F(YY,0)))
      END;
      END;
/***************************************************************/
/*      ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛА                      */
/***************************************************************/
DQG24:PROC(XL,XU,YN);
     DCL (XL,XU,YN,A,B,C)
         BIN FLOAT (53),
         LY BIN FLOAT (53),
         XV(24) BIN FLOAT (53) STATIC INIT
         (4,9759360999851О7E-01,  6,170614899993600E-03,
         4,873642779556547E-01,  1,426569431446683E-02,
         4,691372760013664E-01,  2,213871943870990E-02,
         4,432077635022005E-01,  2,964929245771839E-02,
         4,100099298695150E-01,  3,667324073554015E-02,
         3,730620957892772E-01,  4,309508376597664E-02,
         3,240468259684878E-01,  4,880932505205694E-02,
         2,727107356944198E-01,  5,372213505798282E-02,
         2,168967538130226E-01,  5,775283402686280E-02,
         1,575213398480817E-01,  6,083523646390170E-02,
         9,555943373680815E-02,  6,291872817341415E-02,
         3,232844643130281E-02,  6,396997673376080E-02);
      A = ,5*(XU+XL);
      B = XU-XL;
      LY = 0;
     DO LI= 1 TO 23 BY 2;
        C = XV(LI)*B;
        LY = LY+XV(LI+1)*(UNDINT(A+C)+UNDINT(A-C));
     END;
       YN= LY*B;
 END DQG24;
/***************************************************************/
/*    ПОДПРОГРАММА-ФУНКЦИЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ             */
/*                  KO, KR И KRL.                              */
/***************************************************************/
UNDINT:PROC(R) RETURNS(FLOAT BIN(53));
   DCL (Z,A,VA,BRJ,SA,NSA,NSN,SB,ANY(800)) CPLX BIN FLOAT(53),
       (U(0:500),RJ,RQ,XS) BIN FLOAT(53),
       (MN,NN,I,NMX,NMN) BIN FIXED(31);
   DCL (M,XI,XI1,AN,BN,KRL) CPLX FLOAT BIN(53),
       (BJ(-1:800),PBJ(800),KR,KO) BIN FLOAT(53),
       (SS,NR,R,PI,AB,P,B0,EV1,EV2) BIN FLOAT(53),
        KK BIN FIXED(31),
       (BK(-1:800)) BIN FLOAT(53),
       (J,K,N,NO) BIN FIXED(31);
  ON OVERFLOW ;
  ON FIXEDOVERFLOW ;
      PI=3,14159265358979323846E0;R0=2*PI*R/LAM;
      M=CPLX(NIV,-KAPA);
   IF IG=1 THEN
      NR=(R**ALF*DGAMMA(ALF+1)/R0**(ALF+1))*EXP(-R/R0);
         ELSE
   IF IG=2 THEN NR=((B-1)/20)*(20/K)**B;ELSE
```

```
IF IG=3 THEN NR=(B-1)*(85/R)**B/85;ELSE
IF IG=4 THEN NR=(B-1)*(C/85)*(85/R)**B;ELSE
IF IG=5 THEN DO;G8=-(ALF*R)/(G7*RM);
             NR=A7*R**ALF*EXP(G8);END;
IF II=1 THEN GOTO FIT;
   XS=RO+4E0*RO**3.3333E-1+2E0;
   Z=RO*M;
DO NN=1,XS;
   BRJ=2E0*(NN+5E-1)/Z;                /*  PACЧET ANY  */
   SB=(-2E0)*(NN+1.5E0)/Z;
   NA=SB;  NSN=BRJ;
   SA=SB+1E0/BRJ; BRJ=BRJ*(SA/SB); NSA=SA;
DO I=3 BY 1 WHILE(ABS(SA-SB)>1E-20);
   A=(-1E0)**(I+1)*2E0*(NN+I-5E-1)/Z;
   SA=A+1E0/SA;SB=A+1E0/SB;
   IF SA=0 THEN
   SA=(A*(NA*NSN+1)+NSN)/(NA*NSN+1);   /* ОБХОД НУЛЯ */
   NA=A;  NSN=NSA;  NSA=SA;
   BRJ=BRJ*(SA/SB);
END;
   ANY(NN)=-NN/Z+BRJ;
IF NN=1 THEN NMX=I-1;ELSE NMN=I-1;
END;
IF NMX<5 THEN GOTO LL;
IF NMX<25 THEN DO;
   NMX=NMX-3;NMN=NMN-3;
             END;ELSE DO;
   NMX=NMX-5;NMN=NMN-5; END;
LL:DO NN=2 TO XS-1;
   MN=NMX-((NMX-NMN)*NN)/XS;
   BRJ=(2E0)*(NN+5E-1)/Z;
   SB=(-2E0)*(NN+1.5E0)/Z;
   NA=SB; NSN=BRJ;
   SA=SB+1E0/BRJ; BRJ=BRJ*(SA/SB); NSA=SA;
 DO I=3 TO MN;
   A=(-1E0)**(I+1)*2E0*(NN+I-5E-1)/Z;
   SA=A+1E0/SA;SB=A+1E0/SB;
   IF SA=0 THEN
   SA=(A*(NA*NSN+1)+NSN)/(NA*NSN+1);   /* ОБХОД НУЛЯ */
   NA=A;  NSN=NSA;  NSA=SA;
   BRJ=BRJ*(SA/SB);
 END;
 DO I=MN+1 BY 1 WHILE(ABS(SA-SB)>1E-20);
   A=(-1E0)**(I+1)*2E0*(NN+I-5E-1)/Z;
   SA=A+1E0/SA;SB=A+1E0/SB;
   IF SA=0 THEN
   SA=(A*(NA*NSN+1)+NSN)/(NA*NSN+1);   /* ОБХОД НУЛЯ */
   NA=A;  NSN=NSA;  NSA=SA;
   (NOUNDERFLOW): BRJ=BRJ*(SA/SB);
END;
   ANY(NN)=-NN/Z+BRJ;
END;
IF RO>0&RO<=100 THEN DO;
   JHAI=0;N=-0.2308E-2*RO**2+1.437*RO+14;
                      END;ELSE
IF RO>100&RO<=750 THEN DO;
   JHAI=1;N=1.045*RO+36;
                      END;ELSE DO;
   JHAI=2;GOTO FIN;                 END;
      BJ(N)=1E-30;BJ(N+1)=0;
DO J=N BY -1 TO 1;
   BJ(J-1)=((2*J+1)/RO)*BJ(J)-BJ(J+1);
END;
```



```
   B0=BJ(0)**2;
DO K=1 TO N;
   B0=B0+(2*K+1)*BJ(K)**2;
END;
   P=1/SQRT(B0);
DO K=0 TO N;
   PBJ(K)=P*BJ(K);
   BJ(K)=PBJ(K);
END;
L1:KR,KO,KRL=0;
   BK(-1)=-SIN(RO);BK(0)=COS(RO);
/************************************************************/
/*    ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ AN, BN  И  ФУНКЦИЙ        */
/*    KO, KR  И  KRL                                       */
/************************************************************/
DO J=1 BY 1 TO XS;
   RJ=J;
   BK(J)=(2*RJ-1)*BK(J-1)/RO-BK(J-2);
   EV1=RO*BJ(J);EV2=RO*BJ(J-1);
   XI=CPLX(EV1,BK(J));XI1=CPLX(EV2,BK(J-1));
   AN=(ANY(J)/M+RJ/RO)*EV1-EV2;
   AN=AN/((ANY(J)/M+RJ/RO)*XI-XI1);
   BN=(M*ANY(J)+RJ/RO)*EV1-EV2;
   BN=BN/((M*ANY(J)+RJ/RO)*XI-XI1);
   KR=KR+(2*RJ+1)*(ABS(AN)**2+ABS(BN)**2);
   KO=KO+(2*RJ+1)*REAL(AN+BN);
   KRL=KRL+(-1)**J*(RJ+5E-1)*(AN-BN);
END;
   KR=(2/RO**2)*KR;KO=(2/RO**2)*KO;
   KRL=4*(ABS(KRL))**2/RO**2;
/************************************************************/
/*    РЕЗУЛЬТАТЫ ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ В              */
/*              ПОДПРОГРАММЕ DQG24.                        */
/************************************************************/
FIT:IF IG=1 THEN DO;
   IF II=1 THEN SS=NR*R**3;ELSE
   IF II=2 THEN SS=R**2*NR*KO;ELSE
   IF II=3 THEN SS=R**2*NR*KR;ELSE
   IF II=5 THEN SS=R**2*NR*KRL;END;ELSE
   IF IG=2 THEN DO;
   IF JJ=1 THEN SS=NR*R**3;ELSE
   IF JJ=2 THEN SS=R**2*NR*KO;ELSE
   IF JJ=3 THEN SS=R**2*NR*KR;ELSE
   IF JJ=5 THEN SS=R**2*NR*KRL;END;ELSE
   IF IG=3 THEN SS=NR;ELSE
   IF IG=4 THEN DO;
   IF KK=1 THEN SS=NR*R**3;ELSE
   IF KK=2 THEN SS=R**2*NR*KO;ELSE
   IF KK=3 THEN SS=R**2*NR*KR;ELSE
   IF KK=5 THEN SS=R**2*NR*KRL;END;ELSE
   IF IG=5 THEN DO;
   IF MM=1 THEN SS=NR*R**3;ELSE
   IF MM=2 THEN SS=NR**2*NR*KO;ELSE
   IF MM=3 THEN SS=NR**2*NR*KR;ELSE
   IF MM=5 THEN SS=NR**2*NR*KRL;END;
   RETURN(SS);
 FIN: END UNDINT;
   /************************************************************/
   /*    ПОДПРОГРАММА-ФУНКЦИЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ГАММА ФУНКЦИИ        */
   /************************************************************/
   DGAMMA:PROC(G) RETURNS(BIN FLOAT(53));
          DCL (G,XZ,YZ) BIN FLOAT(53);
          XZ=G;YZ=1E0;
```

```
               DO WHILE(XZ>1E0);XZ=XZ-1E0;YZ=YZ/XZ;END;
               DO WHILE(XZ<=1E0);YZ=YZ*XZ;XZ=XZ+1E0;END;
               IF XZ¬=1E0 THEN
               YZ=YZ*(((((((((((((((((((((((((
                  1E-16*XZ+14E-16)*XZ-54E-16)*XZ-206E-16)*XZ
                  +5100E-16)*XZ-36968E-16)*XZ+77823E-16)*XZ
                  +1043427E-16)*XZ-11812746E-16)*XZ+50020075E-16)*XZ
                  +61160950E-16)*XZ-2056338417E-16)*XZ
                  +11330272320E-16)*XZ-12504934821E-16)*XZ
                  -2,01348547807E-5)*XZ+12,80502823882E-5)*XZ
                  -21,52416741149E-5)*XZ-116,51675918591E-5)*XZ
                  +721,89432466630E-5)*XZ-962,19715278770E-5)*XZ
                  -4,21977345555443E-2)*XZ+16,65386113822915E-2)*XZ
                  -4,20026350340952E-2)*XZ-6,558780715202538E-1)*XZ
                  +5,772156649015329E-1)*XZ+1E0)*XZ);
               RETURN(YZ);
         END DGAMMAI;
   END AIVP;
//* ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ R1, R2, R0 - В МКМ, ALF, EN - В 1/КУБ,СМ
//* ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ LAM - В МКМ; NIV И КАРА ДЛЯ ТЕМПЕРАТУР
//*  СООТВЕТСТВЕННО +20, +10, 0, -10, -20 ГРД,ЦЕЛЬСИЯ,
//GO,SYSIN DD *
1 20 1,666 2 188
1 20 1,500 2 248
1 20 2,166 2 117
1 20 1,566 2 155
1 20 1,833 2 116
1 20 1,500 2 472
1 20 3,333 2 1000
1 20 1.000 2 1987
1 20 1,333 2 1677
1 20 2,000 2 925
1 35 1,666 6 247
1 35 1,666 6 247
1 45 3,500 5 55
1 45 3,500 5 55
10000 5,60 2,34 5,00 2,82 4,37 2,60 3,75 2,26 3,21 1,82
 9000 5,33 2,81 4,76 2,72 4,16 2,50 3,59 2,14 3,10 1,70
 8000 5,05 2,76 4,51 2,63 3,95 2,37 3,43 2,01 2,99 1,57
 7000 4,74 2,67 4,24 2,50 3,73 2,22 3,26 1,85 2,88 1,43
 6000 4,42 2,55 3,96 2,35 3,51 2,35 3,10 1,68 2,77 1,28
 5000 4,07 2,38 3,66 2,15 3,28 1,85 2,93 1,49 2,88 1,43
 4000 3,70 2,15 3,36 1,91 3,04 1,61 2,77 1,27 2,57 0,92
 3000 3,31 1,84 3,04 1,60 2,81 1,31 2,61 1,01 2,48 0,72
 2000 2,90 1,42 2,73 1,22 2,59 0,95 2,48 0,71 2,41 0,49
 1000 2,56 1,01 2,45 0,89 2,28 0,58 2,26 0,37 2,10 0,25
  900 2,47 0,96 2,40 0,83 2,24 0,54 2,20 0,42 2,06 0,30
  800 2,45 0,87 2,36 0,74 2,20 0,51 2,15 0,38 2,03 0,28
  700 2,39 0,81 2,32 0,75 2,18 0,48 2,09 0,35 1,99 0,26
  600 2,34 0,71 2,28 0,70 2,15 0,44 2,04 0,32 1,96 0,24
  500 2,29 0,71 2,24 0,65 2,11 0,43 1,99 0,29 1,92 0,22
  400 2,22 0,62 2,19 0,58 2,05 0,38 1,94 0,27 1,89 0,21
  300 2,13 0,55 2,12 0,53 1,93 0,35 1,91 0,26 1,87 0,21
  200 2,06 0,48 2,05 0,51 1,93 0,30 1,91 0,27 1,87 0,24
  100 1,98 0,47 1,97 0,47 1,96 0,30 1,83 0,37 1,79 0,36
```


СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шифрин К.С. Рассеяние света в мутной среде. М.: ГИНТЛ, 1951, с.288.
2. Шифрин К.С. Введение в оптику океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1983, с.278.
3. Дейрменджан Д. Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсными частицами. М.: Мир, 1971, с.165.
4. Dave J.V. Scattering of Electromagnetic Radiation by a Large Absorbing Sphere. IBM J.Res. and Development. 1968, vol.13., p.302-313.
5. Борен К.,Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986, с.660.
6. Шифрин К.С.,Зельманович И.Л. Таблицы по светорассеянию.Л.: Гидрометеоиздат,1968,т.3, с.432.
7. Wiscombe W.J. Improve Mie Scattering Algorithms. Applied Optics. 1980, vol.19, N.9, p.1505-1509.
8. Allen E.E., Polynomial Approximations of same Modified Bessel Functions. MTAC, 1956, N.55, p.162-169.
9. Goldstein M., Thaler R.M. Recurrence Techniques for Calculation of Bessel Function. MTAC, 1959, vol.13, N.66, p.102-108.
10. Lentz W.J. Generating Bessel Functions in Mie Scattering Calculations Using Continued Fractions. Applied Optics. 1976, vol.15, N.13, p.668-671.
11. Abramowitz M., Oliver F.W., Antosiewicz H.A. In Handbook of Mathematical Functions, Abramowitz M. and Stegun I.A. Eds. Applied Mathematical Series 55 (U.S. Covt. Printing Office Washington. D.C. 1955) Chaps. 3.9.10.

I2. Грей Э.,Метьюз Г.Б. Функции Бесселя и их приложение к физике и механике. М.: ИЛ, I953, с.372.

I3. Infeld L. The Influence of the Width of the Gap Upon the Theory of Antennas. Quart. Appl. Marh. 1947, V.5,N.2,p.113-132.

I4. Smith P. The Conical Dipole of Wide Angle. J.Applied Phys. 1948, vol.19, p.11-23.

I5. Tai C. A Study of the e.m.f. Method. J.Applied Phys. 1949, vol.20, (July), p.717-723; 1948, vol.19, N.12, p.1155-1160; 1949, vol.20, N.11, p.1076-1084.

I6. Aden A.L. Electromagnetic Soattering from Sphere with Sizes Comparable to the Wavelength. J.Applied Physics. 1951, vol.22, N.5, p.601-605.

I7. Dave J.V. Scattering of Visible Light by Large Water Spheres. Applied Optics. 1969, vol.8, N.1, p.155-164.

I8. Kattawar G.W., Plass G.N. Electromagnetic Scattering from Absorbing Spheres. Applied Optics. 1967, vol.6, N.8, p.1377-1382.

I9 Wiscombe W.J. Mie Scattering Calculations: Advances in Technique and Fast, Vector-Speed Computer Codes. NCAR/TH-140 STR. (National center of atmospheric research). Boulder Colo. 1979.

Рукопись поступила I0 июля I990 г.

Г.М.АЙВАЗЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ РАСЧЕТА КОЭФФИЦИЕНТОВ МИ В ЗАДАЧЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ММ И СБММ ВОЛН В ОБЛАКАХ

Редактор Л.П.Мукаян
Технический редактор А.С.Абрамян

Подписано в печать 27/УШ-90г. Формат 60x84/I6
Офсетная печать.Уч.изд.л. I,5 Тираж 299 экз. Ц. 22 к.
Зак.тип.№ 225 Индекс 3649

Отпечатано в Ереванском физическом институте
Ереван 36, ул.Братьев Алиханян,2

The address for requests:
Information Department
Yerevan Physics Institute
Alikhanian Brothers 2,
Yrevan, 375036
Armenia, USSR