

ИНДЕКС 3649

Препринт ЕФИ-1285(71)-90

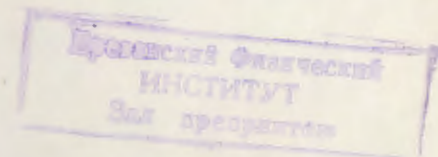
ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ԻՆՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
YEREVAN PHYSICS INSTITUTE

Н.С. АНАНИКЯН, А.З. АХЕЯН

КАЛМЕРОВОЧНАЯ МОДЕЛЬ ПОТТСА С ПОЛЯМИ МАТЕРИИ
НА РЕШЕТКЕ БЕТЕ ИЗ ПЛАКЕТОВ



ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ



ЦНИИатоминформ
ЕРЕВАН-1990

Ն.Ս.ԱՆՆԱՆԻԿՅԱՆ, Ա.Զ.ՀԱԽԵՑԱՆ

ՆՅՈՒԹԻ ԴԱՀՏԵՐԻ ԱՌԿԱՑՈՒԹՅԱՄԲ ՓՈԹՍԻ ՏՐԱՄԱՉԱՓԱՑԻՆ ՄՈՂԵԼԸ
ՊԼԱԿԵՏՆԵՐԻՑ ԿԱԶՄՎԱԾ ԲԵՏԵ ՑԱՆՑԻ ՎՐԱ

Լուծված է Փոթսի տրամաչափային մոդելը նյութերի դաշտերով հատուկ անվերջ չափողականություն ունեցող ցանցի վրա, որը Բենե ցանցի երկչափ ընդհանրացումն է: Ստացվել է ազատ էներգիայի անալիտիկ արտահայտություն, ուսումնասիրված են կրիտիկական հատկությունները: Երկրորդ կարգի փոփային անցման կետում հաշվարկված են կրիտիկական ցուցիչները: Ուսումնասիրված է նույնպես մոդելի վարքը $\beta_g \rightarrow \infty$ սահմանում:

Երևանի ֆիզիկայի ինստիտուտ
Երևան 1990

I. Введение

Изучение калибровочных теорий на решетках - один из основных методов получения физических результатов вне рамок теории возмущений. И хотя непосредственное применение решеточного подхода связано с существенными трудностями, замечательным является возможность использования различных упрощенных моделей и приближений. При этом вычисления значительно упрощаются, а полученные качественные и количественные результаты остаются в силе и в реальных (но значительно более сложных) физических теориях.

Упрощение заключается в переходе к моделям с более простой дискретной - группой симметрии, таким как калибровочные модели Изинга, Поттса, $Z(N)$ -симметричные модели и т.д. К числу наиболее распространенных приближений следует отнести метод среднего поля и седловой точки, вариационное исчисление, численные расчеты методом Монте-Карло и т.д. Ряд работ с использованием этих подходов можно найти в ссылках [1-4].

Мы в своих предыдущих работах [5-7] применяли несколько иной метод, основанный на использовании специальной бесконечномерной решетки - двумерного обобщения дерева Кэйли. Изучаемые

модели при этом удается точно решить, и, хотя сама решетка в принципе лишь некая топологическая абстракция, при наложении определенных условий получаемые результаты представляют из себя некое приближение для обычных решеток. В то же время нельзя не отметить то преимущество, которое дает использование аналитических выражений при изучении критических свойств.

Настоящей статьей мы продолжаем эту серию работ, рассматривая теперь Q -компонентную калибровочную модель Поттса с полими материи (Хитгса). Из результатов других работ известно, что на стандартных решетках эта модель имеет три фазы: конфайнмента, Хитгса и свободных зарядов (рис.1). Все три фазы отделены переходами I рода, причем линия фазовых переходов между конфайнментом и Хитгсом заканчивается критической точкой C перехода

Таким образом, эта модель, несмотря на значительную просимеет весьма богатые критические свойства, что уже само себе заслуживает изучения.

Построение статьи таково. В § 2 определена решетка и кратко указаны некоторые ее особенности. Формулировка модели приведена в § 3, критические свойства рассмотрены в § 4, § 5 посвящен свойствам модели в пределе больших β_g .

§ 2. Решетка

Решетка, используемая в работе, строится последовательным наращиванием оболочек. В качестве нулевой оболочки берется центральный плакет, а все последующие получаются пристраиванием по γ плакетов к каждому свободному ребру предыдущей оболочки. Образованная в итоге решетка (рис.2) характеризуется координа-

ционным числом (число плакетов, выходящих из одного ребра) $\gamma + 1$ и имеет бесконечную хаусдорфову размерность.

Свойства этой решетки достаточно подробно описаны нами в предыдущих статьях [5-7], поэтому здесь лишь коротко отметим ее основные отличия от стандартных решеток.

Главное отличие состоит в явной неэквивалентности друг другу плакетов из разных оболочек из-за разного расстояния до границы. Такая неэквивалентность имеет место и на стандартных решетках конечного размера, однако она устраняется в пределе бесконечной решетки (термодинамическом пределе) ввиду исчезающего влияния граничных плакетов. В нашем случае число плакетов на поверхности того же порядка, что и полное число плакетов решетки, поэтому влияние границы не пренебрежимо даже в термодинамическом пределе $n \rightarrow \infty$ (n - число оболочек). Решение этой проблемы, позаимствованное из теории спиновых моделей (см, например, [8]), заключается в рассмотрении лишь совокупности плакетов, лежащих глубоко внутри решетки, бесконечно далеко от границ при $n \rightarrow \infty$, и поэтому полностью эквивалентных. Эффективно это означает выбрасывание из статистической суммы всех членов, связанных с границей, и именно в этом заключается упомянутое выше ограничение, после наложения которого получаемые результаты можно считать неким приближением для обычных решеток.

Второе отличие состоит в том, что каждый узел решетки в пределе $n \rightarrow \infty$ оказывается связанным с бесконечным числом соседних узлов. В результате перестает выполняться известная теорема Элитсура [9], согласно которой в решеточных моделях, обладающих локальной симметрией, среднее значение любой калибровочно-

-неинвариантной величины не может быть отличным от тривиального значения (таким значением в случае Q -компонентной модели Поттса будет $1/Q$). Однако, как было недавно показано в работе [10], это утверждение не относится к бесконечномерным моделям, так как существенным условием при доказательстве теоремы Элитсура было конечное число степеней свободы, на которое воздействует калибровочное преобразование, совершаемое в узлах решетки.

Последнее отличие проявляется тем сильнее, чем больше величина калибровочной связи β_g . О причинах этого и получаемых результатах написано в § 5.

§ 3. Модель

Для формулировки модели необходимо два типа базовых переменных: поля материи (Хиггса) ϕ_i , определенные в узлах решетки и принимающие значения в группе $Z(Q)$ (Q корней из мнимой единицы); калибровочные поля U_{ij} , определенные на ребрах и принимающие значения из группы $Z(NQ)$. Здесь N - положительное целое число, которое можно интерпретировать как заряд хиггсовского бозона. Мы ограничимся лишь рассмотрением случая $N=1$. Действие модели состоит из чисто калибровочной части и члена взаимодействия и имеет вид

$$S = \beta_g \sum_{p\ell} \delta_{U_{p\ell}, 1} + \beta_m \sum_{\langle ij \rangle} \delta_{\phi_i U_{ij} \phi_j, 1}, \quad (3.1)$$

где δ - символ Кронекера, $U_{p\ell} = U_{ij} U_{jk} U_{k\ell} U_{\ell i}$ - произведение калибровочных переменных вдоль контура плакета, первая сумма берется по всем плакетам решетки, вторая по всем ребрам.

Статистическая сумма модели определится как сумма по всем конфигурациям:

$$Z(\beta_g, \beta_m) = \sum_{\langle u, \phi \rangle} \exp S, \quad (3.2)$$

а свободная энергия, приходящаяся на одно ребро:

$$f(\beta_g, \beta_m) = -\frac{1}{N_\ell} \ln Z, \quad (3.3)$$

где N_ℓ - полное число ребер решетки.

Действие (3.1) инвариантно относительно совершаемого в узле (локального) $Z(Q)$ -преобразования S_i , такого, что

$$\phi_i \rightarrow S_i \phi_i \quad \text{и} \quad U_{ij} \rightarrow S_i U_{ij} S_j \quad (3.4)$$

Используя это, зафиксируем все спиновые переменные $\phi_i = 1$, перейдя в так называемую "единичную" калибровку. Действие модели при этом приобретает вид

$$S^{\text{Ф}} = \beta_g \sum_{p\ell} \delta_{U_{p\ell}, 1} + \beta_m \sum_{\langle ij \rangle} \delta_{U_{ij}, 1}, \quad (3.5)$$

а из статсуммы выйдет множитель $Q_s^N = (N_s - \text{число узлов})$, соответствующий уменьшению во столько же раз числа возможных конфигураций:

$$Z(\beta_g; \beta_m) = Q^N \sum_{\langle U \rangle} \exp \left\{ \beta_g \sum_{pl} \delta_{U_{pl}, 1} + \beta_m \sum_{\langle ij \rangle} \delta_{U_{ij}, 1} \right\}. \quad (3.6)$$

В качестве основного параметра порядка мы используем среднее ребро

$$L = \langle \sigma U \sigma \rangle = Z^{-1} \sum_{\langle \sigma, U \rangle} \sigma_i U_{ij} \sigma_j \exp S, \quad (3.7)$$

которое после фиксирования калибровки переходит в "намагниченность" калибровочного поля:

$$L = \langle U \rangle = Z^{-1} \sum_{\langle \sigma, U \rangle} U_{ij} \exp S^\Phi. \quad (3.8)$$

Со свободной энергией эта величина связана соотношением

$$-\frac{\partial f}{\partial \beta_m} = L \quad (3.9)$$

и является, таким образом, внутренней энергией, приходящейся на одно ребро решетки.

Решение модели осуществляется методом рекуррентных соотношений. Получить их нетрудно. Статсумму модели можно выразить через статсуммы отдельных ветвей:

$$Z^\Phi = \sum_{U^0} \exp \left\{ \beta_g \delta_{U_{pl}^0, 1} + \beta_m \sum_{\langle ij \rangle_0} \delta_{U_{ij}^0, 1} \right\} [g_n(U_{ij}^0)]^\delta \times$$

$$\times [g_n(U_{jk}^0)]^\delta [g_n(U_{kl}^0)]^\delta [g_n(U_{li}^0)]^\delta,$$

здесь $g_n(U^0)$ - статсумма ветви, содержащей n оболочек и стартовой с ребра нулевой оболочки. Последняя величина выражается через $g_{n-1}(U^1)$:

$$g_{n-1}(U^0) = \sum_{U^1} \exp \left\{ \beta_g \delta_{U_{pl}^1, 1} + \beta_m \sum_{\langle ij \rangle_1} \delta_{U_{ij}^1, 1} \right\} [g_{n-1}(U_{jk}^1)]^\delta \times \quad (3.10)$$

$$\times [g_{n-1}(U_{kl}^1)]^\delta [g_{n-1}(U_{li}^1)]^\delta,$$

Введя обозначение

$$X_n = g_n(U \neq 1) / g_n(U = 1) \quad (3.11)$$

и отсуммировав по всем значениям U^1 , получим рекуррентную последовательность

$$X_n = f(X_{n-1}),$$

где

$$(3.12)$$

$$f(X, \beta_g, \beta_m) = \left\{ [(a^2 - a + 1)e^{\beta_g} + (a-1)(a^2 + 1)]X^{3\gamma} + 3e^{\beta_m} [(a-1)e^{\beta_g} + a^2 - a + 1]X^{2\delta} + 3e^{2\beta_m} (e^{\beta_g} + a - 1)X^\gamma + e^{3\beta_m} \right\} / \left\{ a[(a-1)e^{\beta_g} + a^2 - a + 1]X^{3\gamma} + 3ae^{\beta_m} (e^{\beta_g} + a - 1)X^{2\delta} + 3ae^{2\beta_m} X^\gamma + e^{\beta_g + 3\beta_m} \right\}.$$

Здесь и ниже мы для упрощения формул ввели обозначение

$$a = Q^{-1}.$$

В термодинамическом пределе $\pi \rightarrow \infty$ эта последовательность сходится к X^* - устойчивому решению уравнения

$$f(X, \beta_g, \beta_m) = X. \quad (3.13)$$

Таким образом, это уравнение состояния модели. Наличие у него более одного устойчивого решения означает наличие сосуществующих фаз.

Через величину X выражаются все термодинамические параметры модели, но сама она не имеет конкретного физического смысла. Поэтому для упрощения последующих выкладок введем новые обозначения:

$$\theta = (e^{\beta_g} + a) / (e^{\beta_g} - 1) \quad \gamma^3 = \theta \frac{1-X}{aX+1} \quad (3.14)$$

Переменная X , как следует из (3.11), меняется в пределах от 0 до ∞ , следовательно, допустимая область значений для γ - $-1/a < \gamma < 1$.

Среднее ребро, выраженное через эти переменные, имеет вид

$$L = \frac{e^{\beta_m}}{e^{\beta_m} + aX^{\gamma+1}} = \frac{(1+a\gamma)(\theta + a\gamma^3)}{(1+a)(\theta + a\gamma^4)}. \quad (3.14)$$

Используя его значение, свободную энергию системы можно определить интегрированием из (3.9). После правильного учета граничных условий получим следующее выражение:

$$f = \ln \frac{a+1}{a^2-a+1} - \frac{\delta-1}{4} \ln(a\theta^3+1) - \ln(\theta-1) - \ln(1-\gamma) - \frac{3\delta-1}{4} \ln \left[\gamma^4 + \frac{\theta}{a} \right] + \gamma \ln(\theta - \gamma^3). \quad (3.15)$$

§ 4. Критические свойства

Разрешим уравнение состояния (3.13) относительно β_m . В переменных γ и θ получаем

$$\beta_m = \gamma [\ln(\theta - \gamma^3) - \ln(\theta + a\gamma^3)] + \ln(1+a\gamma) - \ln(1-\gamma). \quad (4.1)$$

Изучение критического поведения модели, основанное на исследовании монотонности функции $\beta_m(y)$, при различных значениях параметра θ (константы β_g) подробно описано в работе [6], поэтому приведем здесь только основные положения:

а) Если при некотором β_g функция $\beta_m(y)$ монотонно возрастает, это означает существование только одной фазы. Точки кризиса при этом определяют состояние системы.

б) Возникновение у функции $\beta_m(y)$ убывающего участка соответствует появлению второй фазы в модели. При этом две фазы описываются крайними решениями уравнения (3.13), а среднее решение неустойчиво и описывает неравновесные состояния (возрастающий участок). Фазовый переход I рода происходит в точке, где выравниваются свободные энергии обеих фаз:

$$f(y_I, \beta_g, \beta_m) = f(y_{II}, \beta_g, \beta_m). \quad (4.2)$$

Линия фазовых переходов I рода $\beta_m^c(\beta_g)$ определится, если решать это уравнение совместно с уравнением

$$\beta_m(y_I, \beta_g) = \beta_m(y_{II}, \beta_g). \quad (4.3)$$

в) Промежуточным случаем является перегиб функции $\beta_m(y)$. Точке перегиба, координаты которой находятся из условия

$$\frac{\partial \beta_m}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \beta_m}{\partial y^2} = 0, \quad (4.4)$$

соответствует критическая точка C фазового перехода II рода - конечная точка линии фазовых переходов I рода.

Вернемся к рассматриваемой модели. Типичная фазовая диаграмма для не слишком больших γ приведена на рис.3. Линия фазовых переходов I рода AC отделяет фазу конфайнмента от фазы Хиттса и заканчивается критической точкой C, не пересекая ось β_m . Это означает наличие непрерывного перехода из одной фазы в другую в области малых β_g и больших β_m в соответствии с результатами других работ.

Координаты критической точки, полученные из (4.4), равны

$$y_c = -\left[\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \frac{4}{\alpha}}\right],$$

где

$$\alpha = \frac{(\alpha-1)(3\gamma-1)}{3\alpha\gamma} \left[3 - \sqrt{1 + \frac{32\alpha(\gamma^2-1)}{(\alpha-1)^2(3\gamma-1)^2}} \right]. \quad (4.5)$$

Критические индексы, несколько переопределенные с учетом нашего параметра порядка L (см. 6), имеют классические значения

$$\delta = 3, \quad \beta = 1/2, \quad \alpha = 0 \quad (4.6)$$

Все сказанное выше относилось к области $y > 0$. В модели Изинга ($Q=2$) функция $\beta_m(y)$ является нечетной [6], и поэтому поведение в области $y < 0$ полностью совпадает с поведением

в области $y > 0$. Это отражает очевидную симметрию гамильтониана $Z(2)$ модели относительно одновременной замены $\beta_m \rightarrow -\beta_m$ и $U_{ij} \rightarrow -U_{ij}$. При $Q > 2$ такой симметрии нет и область $y < 0$ может представлять определенный интерес. Оказывается, что при малых значениях координационного числа решетки χ , функция $\beta_m(y)$ в интервале $-1/a < y < 0$ монотонно возрастает при любых физических значениях параметра β_g , что означает отсутствие критического поведения. Однако, если χ становится больше некоторого предельного значения $\chi_c(Q)$ (график $\chi_c(Q)$ приведен на рис.4), в отрицательной области появляются вторая точка перегиба у функции $\beta_m(y)$ и соответственно второй убывающий участок (рис.5а). Это явление можно было бы толковать как наличие на фазовой диаграмме еще одной критической точки C_1 и линии перехода I рода (рис.5б). Однако анализ свободных энергий на разных участках графика $\beta_m(y)$ показывает, что вся эта вторая линия, вместе с конечной точкой C_1 , лежит в метастабильной области, иначе говоря, обладает большей свободной энергией, чем стабильные решения уравнения состояния при $y > 0$.

§ 5. Предел $\beta_g \rightarrow \infty$

В этом пределе происходит "замораживание" плакетов, то есть все $U_{\rho\sigma} = U_{\rho\sigma}$ становятся равными I. В таком случае подбором соответствующей калибровки все переменные U_{ij} можно сделать равными I, и получается обычная спиновая модель Поттса с гамильтонианом

$$H = \beta_m \sum_{\langle ij \rangle} \delta(b_i, b_j). \quad (5.1)$$

На стандартных четырехмерных решетках при этом имеет место фазовый переход I рода при всех $Q \geq 3$. У нас тоже получают переходы I рода, но здесь нельзя не отметить одно обстоятельство. В термодинамическом пределе, как уже говорилось, каждый узел решетки оказывается связанным с бесконечным числом соседних узлов. Так как с увеличением β_g увеличивается и число непосредственных спин-спиновых взаимодействий, специфика решетки проявляется все более сильно. В результате несколько необычные свойства отмеченных фазовых переходов. Прежде всего обычный параметр порядка $\langle b \rangle$ - намагниченность - здесь не работает, он равен своему неупорядоченному значению $1/Q$ при всех β_m . При фазовом переходе скачет величина $\langle b^2 \rangle$, причем в упорядоченной фазе она строго равна I. Интересны также значения β_m^c , при которых происходит фазовый переход. Независимо от числа компонент модели Q , $\beta_m^c > 0$ при $\chi = 2$, $\beta_m^c = 0$ при $\chi = 3$ и $\beta_m^c < 0$ при $\chi \geq 4$. Таким образом, мы как бы имеем ферромагнитную модель при $\chi = 2$ и антиферромагнитную при $\chi \geq 4$.

В заключение хотим отметить, что нам не удалось обнаружить третью фазу - фазу свободных зарядов. Может быть, ее отсутствие также объясняется спецификой решетки, поскольку появляется эта фаза при больших β_g . Однако мы не исключаем возможности, что нам не удалось найти эту вторую линию фазовых переходов (линию BD на рис.1) из-за отсутствия подходящего параметра порядка. Возможно также, что причиной неудачи послужило использование фиксированной калибровки. Мы попытались провести расчеты без фиксирования калибровки, но вычисления сильно усложняются (достаточно сказать, что вместо одного уравнения состояния

(3.13) получается система из Q^3 уравнений), и получить какие-нибудь достоверные результаты нам не удалось. Мы надеемся решить эту проблему в дальнейшей работе.

Выражаем нашу благодарность С.Г.Матияну и Н.Ш.Измайлану за полезные обсуждения и помощь в работе.

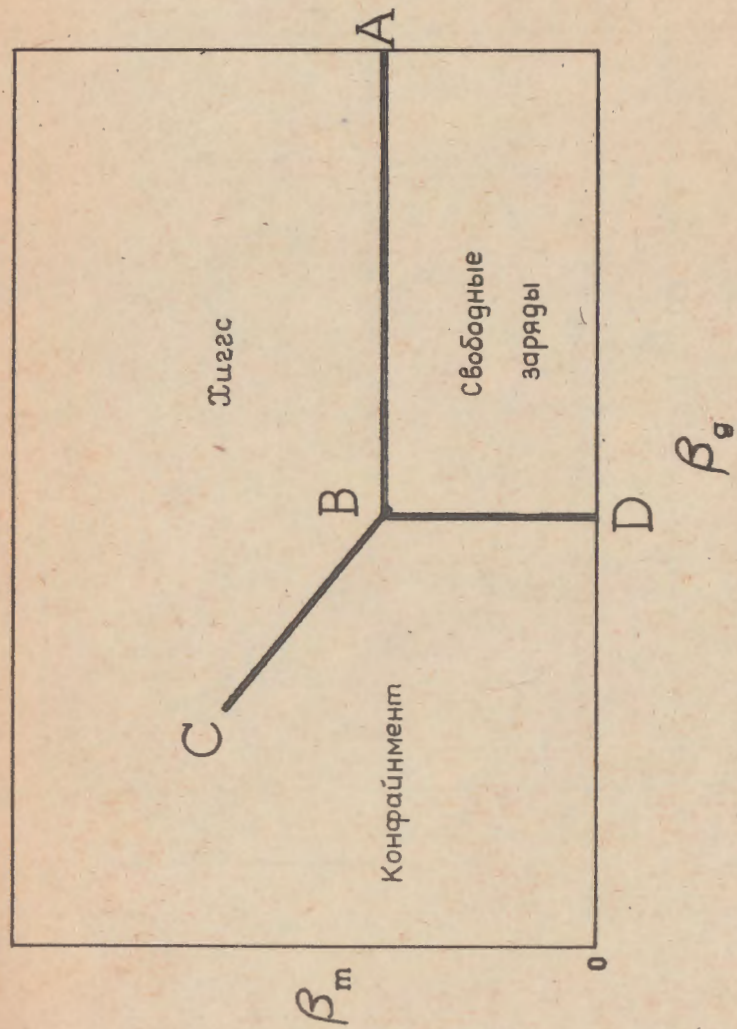


Рис. I

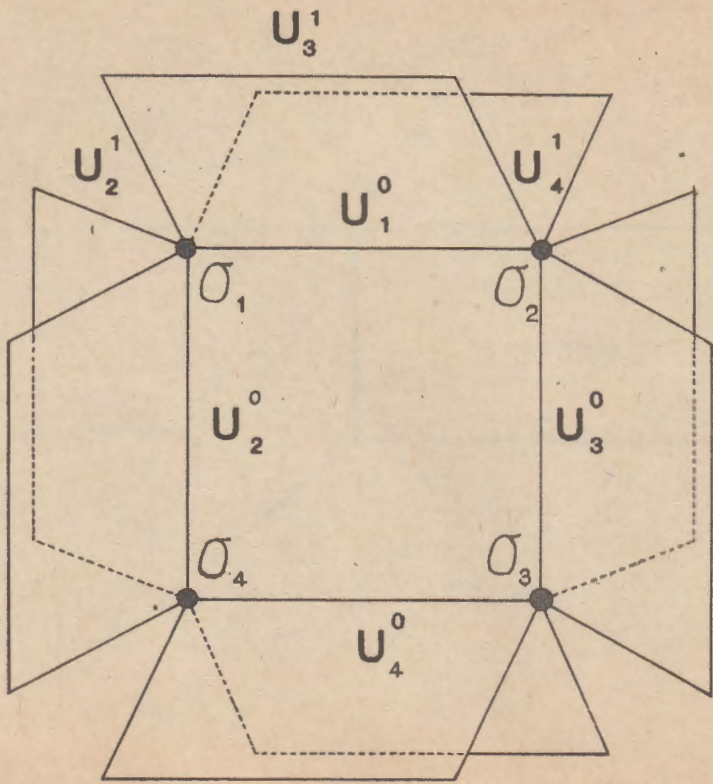


Рис. 2

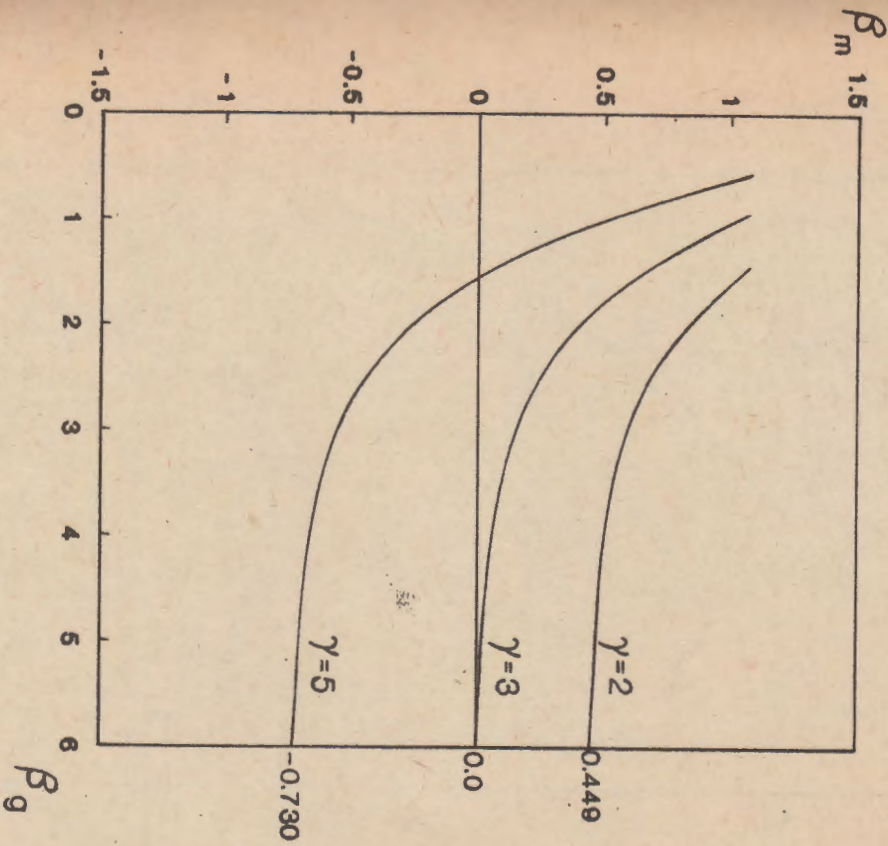


Рис. 3

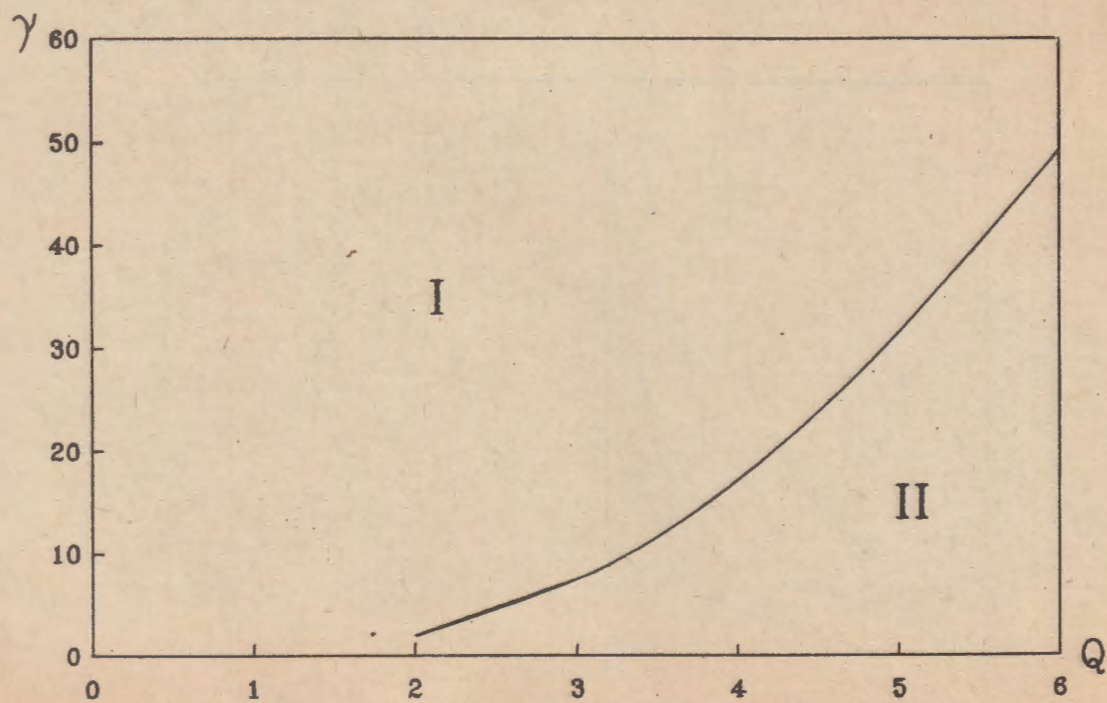
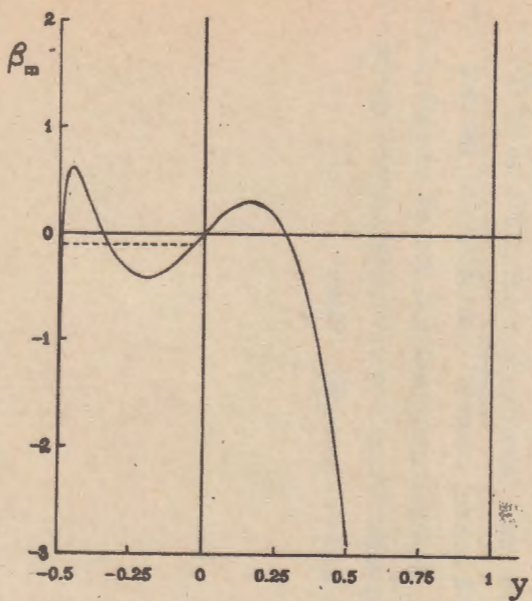
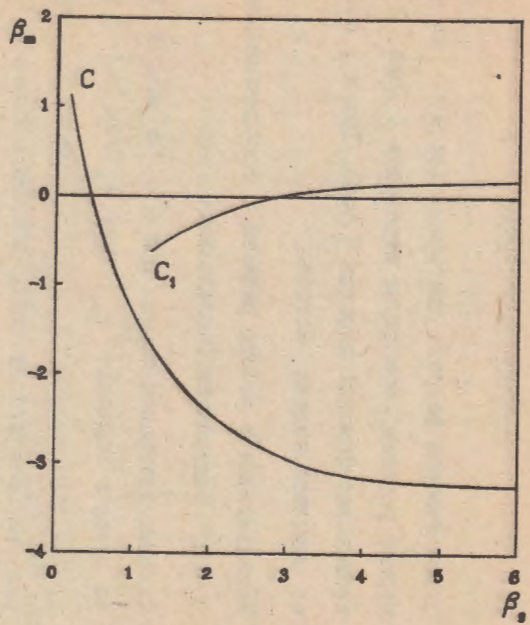


Рис. 4



a



б

Рис. 5

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ

Рис.1 Схематическая фазовая диаграмма для $Q > 3$ на четырехмерной решетке. Все линии переходов I рода. В точке С происходит фазовый переход II рода. Точка А соответствует спиновой модели Поттса.

Рис.2 Используемая в работе решетка с координационным числом $\chi = 2$, содержащая 2 оболочки.

Рис.3 Фазовые диаграммы модели при $Q = 3$ и разных χ . Справа указаны значения β_m^c при $\beta_g \rightarrow \infty$

Рис.4 График зависимости $\chi_c(Q)$. В области I появляется вторая метастабильная линия фазовых переходов.

Рис.5 а) График зависимости $\beta_m(\chi)$ при $Q = 3$, $\chi = 15$. Видно появление убывающего участка в области $\chi < 0$. Пунктирной линией отмечен метастабильный фазовый переход.

б) Фазовая диаграмма при тех же значениях Q и χ .

Сплошная линия соответствует обычным фазовым переходам, точечная - метастабильным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ginsparg P., Goldschmit Y., Zuber J.-B. // Nucl. Phys., 1980, В 170(FS 1), p. 409.
2. Greutz M. // Phys. Rev., 1980, v.D 21, p.1006.
3. Camarata C., Fanchiotti H. and Garcia Canal // Phys. Rev., 1986, v.D 33, p. 519.
4. Baig M. // Phys. Lett., 1988, v.B 207, p.300.
5. Ананикян Н.С., Ахеян А.З., Тер-Арутюнян-Саввиди Н.Г. // ТМФ, 1989, т.78, с.261.
6. Ананикян Н.С., Ахеян А.З. // ЯФ, 1989, т.50, с.1485.
7. Ананикян Н. С. , Ахеян А.З. // ЯФ, 1990, т.51, с.1770 .
8. Бэкстер Р. Точно решаемые модели в статистической механике М.: Мир, 1985.
9. Elitzur S. // Phys. Rev., 1975, v. D 12, p.3978.
10. Maslanka P. // Acta Phys. Pol., 1988 v. B 19, p. 269.

Рукопись поступила 25 августа 1990 г.

Н.С. АНАНИКЯН, А.З. АХЕЯН

КАЛИБРОВОЧНАЯ МОДЕЛЬ ПОТТСА С ПОЛЯМИ МАТЕРИИ НА РЕШЕТКЕ
БЕТЕ ИЗ ПЛАКЕТОВ

Редактор Л.П. Мукаян

Технический редактор А.С. Абрамян

Подписано в печать 25/ХП-90г.

Формат 60x84/16

Офсетная печать. Уч. изд. л. I, 0

Тираж 299 экз. Ц. 15 к.

Зак. тип. № 325

Индекс 3649

Отпечатано в Ереванском физическом институте

Ереван 36, ул. Братьев Аликханян, 2