Препринт ЕФИ-1297(83)-90

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
YEREVAN PHYSICS INSTITUTE

М.Э.ЛАЗИЕВ

СПЕКТР ЭНЕРГИИ ОТКРЫТОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ МЕМБРАНЫ

ЦНИИатоминформ

Նախնատիպ ԵրՖԻ-1297(83)-90

Մ.Է.ԼԱԶԻԵՎ

ԲԱՑ ԷԼԻՊՍԱՁԵՎ ԹԱՂԱՆԹԻ ԷՆԵՐԳԻԱՅԻ ՍՊԵԿՏՐԸ

Ուսումնասիրված է քվանտային բաց թաղանթը: Կիրառելով կլոր թաղանթի լուծումը խոտորումների տեսության եղանակով, ստացվել է էլիպսաձև թաղանթի էներգիայի սպեկտրը: Հաշվարկված է օղակաձև մեմբրանային դիագրամը, և ցույց է տրված, որ նրա տարամիտության աստիճանը խորանարդային է:

Երևանի ֆիզիկայի ինստիտուտ
Երևան 1990

Preprint YERPHI-1297(83)-90

M.E. LAZIEV

ENERGY SPECTRUM OF AN OPEN ELLIPTIC MEMBRANE

An open quantum membrane is considered in this work. Utilizing the solutions for a round membrane, by the method of perturbation theory there is obtained the energy spectrum of an elliptic membrane. The loop membrane diagram is calculated, and the degree of its divergence is shown to be a cubic one.

Yerevan Physics Institute
Yerevan 1990

Поепринт ЕФИ-1297(83)-90

УДК 539.12.001.1

М.Э.ЛАЗИЕВ

СПЕКТР ЭНЕРГИИ ОТКРЫТОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ МЕМБРАНЫ

В настоящей работе рассмотрена квантовая открытая мембрана. Используя решения для круглой мембраны, методом теории возмущений получен спектр энергии для эллиптической. Вычислена петлевая мембранная диаграмма и показано, что степень ее расходимости кубическая.

Ереванский физический институт

Ереван 1990

Введение

Теория квантовых обобщенных объектов или так называемых P - бран (случай $P = I$ - струна) для $P > I$ представляет определенные трудности в вычислении динамических характеристик движения. В частности, для открытой мембраны ($P = 2$) - объекта с границей - решение уравнений движения нетривиально как для статических [3,4], так и для динамических решений [2]. Кроме того, определенный интерес представляет вычисление спектра безмассовых состояний [2] и поправок к нему. Это имеет важное значение для определения энергии Казимира и, следовательно, критической размерности открытой квантовой мембраны. Такие вычисления позволяют судить о перенормируемости теории. (Нединамические решения для мембран и исследование статических потенциалов для открытой и замкнутой мембран, спектры безмассовых состояний также вычислены в работах [3,4].

В настоящей работе рассматривается динамическое решение для открытой круглой мембраны [2] в t - калибровке [5] и вычисляются поправки к спектру ее безмассовых состояний, т.е. вычисляются петлевые мембранные диаграммы. Поправки получены методом теории возмущений, в предположении, что форма мембраны перестает быть круглой. Но вычисления проводятся таким образом, что граница мембраны учитывается точно, а весь возмущающий фактор переводится в гамильтониан. Показано, что степень расходимости для самой петли кубическая.

Запишем действие для двухмерной мембраны в виде

$$S = -T \int d\sigma_1 d\sigma_2 d\tau \left[\det g_{ab}\right]^{1/2}, \tag{I}$$

где

$$g_{ab} = \partial_a x^\mu \partial_b x_\mu , \tag{2}$$

а T - параметр натяжения.

Из (I) получаем уравнения движения для мембраны

$$\partial_a \left(\sqrt{-g}\, g^{ab} \partial_b x^\mu_{cl} \right) = 0 \tag{3}$$

Рассмотрим возмущение вокруг классического решения (3)

$$x^\mu = x^\mu_{cl} + z^\mu$$

и разложим (I) вблизи x^μ_{cl} [2].

Тогда в квадратичном приближении получим

$$S = S_{cl} + T \int d\sigma_1 d\sigma_2 d\tau \sqrt{-g}\, z^\mu_a K^{ab}_{\mu\nu} z^\nu_b , \tag{4}$$

где введены обозначения

$$z_a^\mu \equiv \partial_a z^\mu ,$$

$$z_b^\nu \equiv \partial_b z^\nu$$

и

$$K_{\mu\nu}^{ab} = -g^{cb} x_c^\nu g^{da} x_d^\mu + g^{cd} x_d^\nu x_c^\mu g^{ab} + g^{db} x_c^\nu g^{ca} x_d^\mu - g^{ab} g^{\mu\nu} =$$

$$= -x^{\nu b} x^{\mu a} + x^{\partial a} x^{\mu b} + (g^{cd} x_d^\nu x_c^\mu) g^{ab} - g^{\mu\nu} g^{ab} .$$

Классическое решение (3) для открытой двухмерной мембраны, соответствующее основной траектории, есть вращение в плоскостях $x^1 - x^2$ и $x^3 - x^4$.

Выберем калибровку [5]

$$x^0 = \tau$$

$$\partial_\tau \vec{x}\, \partial_{\sigma_i} \vec{x} = 0, \qquad i = 1,2 \tag{5}$$

где обозначено $x^\mu = (x^0, \vec{x})$.

Тогда решение есть

$$
\begin{aligned}
x^1_{cl} &= f(\sigma_1, \sigma_2) \cos \omega_1 t , \\
x^2_{cl} &= f(\sigma_1, \sigma_2) \sin \omega_1 t , \\
x^3_{cl} &= g(\sigma_1, \sigma_2) \cos \omega_2 t , \\
x^4_{cl} &= g(\sigma_1, \sigma_2) \sin \omega_2 t , \\
x^i_{cl} &= 0, \qquad i = \overline{5, D-1} ,
\end{aligned} \tag{6}
$$

где f и g - произвольные функции, удовлетворяющие граничным условиям.

$$1-\omega_1^2 f^2-\omega_2^2 g^2=0 \tag{7}$$

Легко убедиться, что $\vec{X}_t \vec{X}_\sigma=0$

Вычислим теперь g_{ab}. Из (5) и (2) следует, что

$g_{t\sigma_1}=g_{t\sigma_2}=g_{\sigma_1 t}=g_{\sigma_2 t}$

Для g_{ab} получаем

$$g_{ab}=\begin{bmatrix} 1-f^2\omega_1^2-g^2\omega_2^2, & 0, & 0 \\ 0, & -f_{\sigma_1}^2-g_{\sigma_1}^2, & -f_{\sigma_1}f_{\sigma_2}-g_{\sigma_1}g_{\sigma_2} \\ 0, & -f_{\sigma_1}f_{\sigma_2}-g_{\sigma_1}g_{\sigma_2}, & -f_{\sigma_2}^2-g_{\sigma_2}^2 \end{bmatrix}$$

обратная матрица

$$g^{ab}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{1-f^2\omega_1^2-g^2\omega_2^2}, & 0, & 0 \\ 0, & \dfrac{-(f_{\sigma_2}^2+g_{\sigma_2}^2)}{(f_{\sigma_1}g_{\sigma_2}-g_{\sigma_1}f_{\sigma_2})^2}, & \dfrac{(f_{\sigma_1}f_{\sigma_2}+g_{\sigma_1}g_{\sigma_2})}{(f_{\sigma_1}g_{\sigma_2}-g_{\sigma_1}f_{\sigma_2})^2} \\ 0, & \dfrac{(f_{\sigma_1}f_{\sigma_2}+g_{\sigma_1}g_{\sigma_2})}{(f_{\sigma_1}g_{\sigma_2}-g_{\sigma_1}f_{\sigma_2})^2}, & \dfrac{-(f_{\sigma_1}^2+g_{\sigma_1}^2)}{(f_{\sigma_1}g_{\sigma_2}-g_{\sigma_1}f_{\sigma_2})^2} \end{bmatrix}$$

и

$$\det g_{ab}=(1-f^2\omega_1^2-g^2\omega_2^2)(f_{\sigma_1}g_{\sigma_2}-g_{\sigma_1}f_{\sigma_2})^2 \tag{8}$$

Из (I) и (8) получим выражение для классического действия

$$S_{cl} = -T\int\sqrt{1-f^2\omega_1^2-g^2\omega_2^2}\,(f_{\sigma_1}g_{\sigma_2}-g_{\sigma_1}f_{\sigma_2})\,d\sigma_1\,d\sigma_2\,dt = \tag{9}$$

$$= -T\int\sqrt{1-f^2\omega_1^2-g^2\omega_2^2}\,df\,dg\,dt$$

Воспользовавшись (4) и выделяя поперечную часть, имеем

$$S^{(2)} = -T\int df\,dg\,d\tau\,\sqrt{1-f^2\omega_1^2-g^2\omega_2^2}\,\left\{\partial_a z^i\,\partial_b z^i\,(-g^{ab})\right\}$$

Далее можно, используя выражение для g^{ab}, преобразовать S к виду

$$S = -T\int df\,dg\,d\tau\,\sqrt{1-f^2\omega_1^2-g^2\omega_2^2}\left\{-\frac{1}{1-f^2\omega_1^2-g^2\omega_2^2}\left[\frac{\partial z^i}{\partial t}\right]^2+\left[\frac{\partial z^i}{\partial f}\right]^2+\left[\frac{\partial z^i}{\partial g}\right]^2\right\}.$$

Вводя обозначения

$$A = 1-f^2\omega_1^2-g^2\omega_2^2$$

и интегрируя по частям, получим

$$S = -T\int dt\,df\,dg\,\frac{1}{\sqrt{A}}\,z^i\left\{A\left(\frac{\partial^2}{\partial f^2}+\frac{\partial^2}{\partial g^2}\right)-\left(\omega_1^2 f\frac{\partial}{\partial f}+\omega_2^2 g\frac{\partial}{\partial g}\right)-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right\}z^i - \tag{10}$$

$$-\oint_\Gamma dt\,z^i\left(\sqrt{A}\,\frac{\partial z^i}{\partial f}\,dg-\sqrt{A}\,\frac{\partial z^i}{\partial g}\,df\right)$$

где Γ - граница области, на которой выполняются условия (7).

Из (I0) следуют уравнения движения

$$\left\{A\left(\frac{\partial^2}{\partial f^2}+\frac{\partial^2}{\partial g^2}\right)-\left(\omega_1^2 f\frac{\partial}{\partial f}+\omega_2^2 g\frac{\partial}{\partial g}\right)-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right\}z^i=0$$

и гамильтониан

$$\hat{H}=A\left(\frac{\partial^2}{\partial f^2}+\frac{\partial^2}{\partial g^2}\right)-\left(\omega_1^2 f\frac{\partial}{\partial f}+\omega_2^2 g\frac{\partial}{\partial g}\right). \qquad (I1)$$

Из второй части (I0), используя (7), получаем граничные условия

$$\sqrt{A}\left(\omega_1^2 f\frac{\partial}{\partial f}+\omega_1^2 g\frac{\partial}{\partial g}\right)z^i\Big|_{\Gamma}=0. \qquad (I2)$$

Прямым вычислением можно убедиться в унитарности $\hat{H}$

$$\int dg\,df\,dt\,\frac{1}{\sqrt{A}}\,\chi^*\hat{H}\Psi=\int dg\,df\,dt\,\frac{1}{\sqrt{A}}\,(\hat{H}\chi)^*\Psi.$$

Перепишем уравнения движения для случая $\omega_1=\omega_2=\omega$ (это случай круглой открытой мембраны)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-D\right)z^i=0,$$

где

$$D=(1-\omega^2 f^2-\omega^2 g^2)\left\{\frac{\partial^2}{\partial f^2}+\frac{\partial^2}{\partial g^2}\right\}-\omega^2\left(f\frac{\partial}{\partial f}+g\frac{\partial}{\partial g}\right). \qquad (I3)$$

Перейдем к полярным координатам

$$f = r\cos\varphi\,,\qquad g = r\sin\varphi \tag{I4}$$

Тогда (I3) запишется как

$$D=(1-\omega^2 r^2)\left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\left(1-\frac{\omega^2 r^2}{1-\omega^2 r^2}\right)\frac{\partial}{r\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\} \tag{I5}$$

Будем искать решение в виде

$$Z^i = e^{iE^i t}\, e^{i\ell\varphi} R^i(r).$$

Подставляя в уравнения движения и используя (I5), найдем

$$R^i(r)=\sum_{K=0}^{\infty} a_K^i\, r^{|\ell|+K} \tag{I6}$$

Кроме того, для a_K имеем, что четные компоненты отличны от нуля, а нечетные равны нулю и определяются рекуррентным соотношением (a_0 определяется нормировкой).

$$a_{2K+2}=\frac{|\ell|+4|\ell|K+4K^2+2K-(E_{2n}^{\ell})^2/\omega^2}{(2K+2)(2|\ell|+2K+2)}\,a_{2K}\,. \tag{I7}$$

Из (I7) следует, что ряд (I6) нужно оборвать, иначе он расходится,т.е. имеем спектр энергии [2]

$$E^{\ell}_{2n} = \omega\sqrt{4|\ell|n + 4n^2 + |\ell| + 2n}$$

$$n = 0, 1, 2 \ldots \tag{I8}$$

$$\ell = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

Ввиду конечности суммы граничные условия (I2) выполнены. Волновые функции имеют вид

$$\Phi^{\ell}_{2n} = e^{i\ell\varphi}\sum_{k=0}^{n} a_{2k}\, r^{|\ell|+2k} \tag{I9}$$

Рассмотрим случай, когда

$$\omega_1 = \omega + \delta\omega\ ,$$

$$\omega_2 = \omega - \delta\omega$$

и вычислим поправки к (I8) по теории возмущений. Обозначим вначале

$$f = \frac{1}{\omega_1}\sigma_1$$

$$g = \frac{1}{\omega_2}\sigma_2\ ,$$

что можно сделать, так как f и g – произвольные функции. Тогда

$$\hat{H} = (1-\sigma_1^2-\sigma_2^2)\left(\omega_1^2\frac{\partial^2}{\partial\sigma_1^2} + \omega_2^2\frac{\partial^2}{\partial\sigma_2^2}\right) - \left(\omega_1^2\sigma_1\frac{\partial}{\partial\sigma_1} + \omega_2^2\sigma_2\frac{\partial}{\partial\sigma_2}\right) \tag{20}$$

и граничные условия

$$\sqrt{1-б_1^2-б_2^2}\left(\omega_1^2 б_1 \frac{\partial}{\partial б_1}+\omega_2^2 б_2 \frac{\partial}{\partial б_2}\right) z^i \Big|_{\Gamma=[(1-б_1^2-б_2^2)=0]}=0 \tag{21}$$

Или представив $\hat{H}$ в виде

$$\hat{H}=(1+\delta^2)\hat{H}_0+\hat{V},$$

где

$$\hat{H}_0=\omega^2(1-б_1^2-б_2^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial б_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial б_2^2}\right)-\omega^2\left(б_1\frac{\partial}{\partial б_1}+б_2\frac{\partial}{\partial б_2}\right) \tag{22}$$

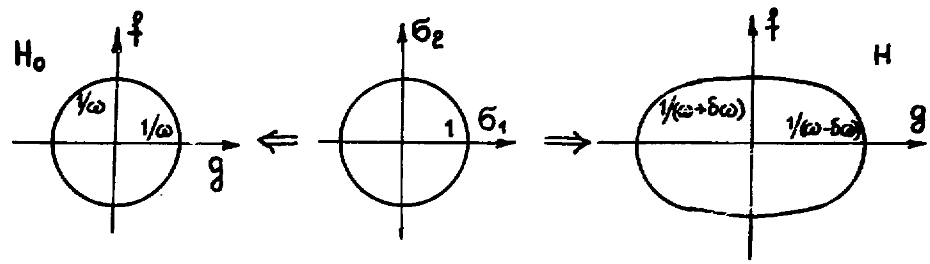
$$\hat{V}=2\delta\omega^2\left\{(1-б_1^2-б_2^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial б_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial б_2^2}\right)-\left(б_1\frac{\partial}{\partial б_1}-б_2\frac{\partial}{\partial б_2}\right)\right\} \tag{23}$$

и граничные условия

$$\left\{(1+\delta^2)\omega^2\sqrt{1-б_1^2-б_2^2}\left(б_1\frac{\partial}{\partial б_1}+б_2\frac{\partial}{\partial б_2}\right)+\right.$$

$$\left.+2\delta\omega^2\sqrt{1-б_1^2-б_2^2}\left(б_1\frac{\partial}{\partial б_1}-б_2\frac{\partial}{\partial б_2}\right)\right\} z^i \Big|_{\Gamma}=0 \tag{24}$$

Сделаем следующее приближение: здесь и в дальнейшем границу будем учитывать точно $(1-б_1^2-б_2^2=0)$,а гамильтониан возмущен.



Кроме того, из (24) следует, что требования эрмитовости для V и H_o по отдельности, означает, что должны выполняться условия

$$(1+\delta^2)\omega^2\sqrt{1-\sigma_1^2-\sigma_2^2}\left(\sigma_1\frac{\partial}{\partial\sigma_1}+\sigma_2\frac{\partial}{\partial\sigma_2}\right)z^i\Big|_\Gamma=0$$

$$2\delta\omega^2\sqrt{1-\sigma_1^2-\sigma_2^2}\left(\sigma_1\frac{\partial}{\partial\sigma_1}+\sigma_2\frac{\partial}{\partial\sigma_2}\right)z^i\Big|_\Gamma=0 \tag{25}$$

и так как $\sqrt{1-\sigma_1^2-\sigma_2^2}=0$, то (25) означает, что решение и его производные должны быть ограничены на Γ.

Запишем (22) и (23) в полярных координатах

$$\hat H_o=\omega^2(1-r^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)-\omega^2 r\frac{\partial}{\partial r} \tag{26}$$

$$\hat V=2\sigma\omega^2\Big\{\cos 2\varphi\Big[-(1-r^2)\frac{\partial^2}{\partial r^2}+(1-r^2)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+(1-r^2)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-r\frac{\partial}{\partial r}\Big]+$$

$$+\sin 2\varphi\Big[2(1-r^2)\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial r}-2(1-r^2)\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big]\Big\} \tag{27}$$

Поправка первого приближения вычисляется по формуле [I]

$$V_{nn} = \int \Psi_n^* \hat{V} \Psi_n \frac{dq}{\rho} \tag{28}$$

Однако, из (27) видно, что после интегрирования по $d\varphi$ $V_{nn} = 0$, значит вычислим поправку второго порядка

$$E_n = \sum_m{}' \frac{V_{nm}\ V_{mn}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}, \tag{29}$$

где

$$V_{nm} = \int \Psi_n^* \hat{V} \Psi_m \frac{dq}{\rho} \tag{30}$$

В (30), подставляя (I9) и (27) и интегрируя по φ ($\Phi_n^* \equiv \Phi_{2n}^{*\ell}$, $\Psi_m \equiv \Phi_{2m}^{\ell'}$, получим, что (30) не есть 0 только если

$$\ell = \ell' \pm 2 \tag{3I}$$

что в данном случае есть правило отбора.

Так как оператор $\hat{H}$ является унитарным оператором, следовательно, собственные функции Φ_{2n}^{ℓ} будут ортогональны (с весом $\rho = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$).

Вычислим интеграл

$$I = \int \Phi_{2n'}^{\ell'} \Phi_{2n}^{\ell} \frac{z\,dz\,d\varphi}{\sqrt{1-z^2}}$$

Ортогональность по ℓ очевидна как и в случае (28), т.е.

$$I = 2\pi \int \Phi_{2n}^{\ell} \Phi_{2n'}^{\ell} \frac{r\,dr}{\sqrt{1-r^2}}$$

Подставляя в I (I9) и делая замену $r = \cos\alpha$ получим

$$I = 2\pi \sum_{k=0}^{n} \sum_{p=0}^{n'} a_{2k} a_{2p} \int_0^{\pi/2} (\cos\alpha)^{2(|\ell|+p+k)+1} d\varphi$$

Интегрируя это и учитывая, что при $n \neq n'$, $I = 0$ получаем

$$I = 2\pi \sum_{k=0}^{n} \sum_{p=0}^{n'} a_{2k} a_{2p} \frac{(2|\ell| + 2p + 2k)!!}{(2|\ell| + 2p + 2k + 1)!!} = 0, \tag{32}$$

а нормировочный интеграл для Φ_n^{ℓ} есть

$$I_n = 2\pi \sum_{k,p=0}^{n} a_{2k} a_{2p} \frac{(2|\ell| + 2p + 2k)!!}{(2|\ell| + 2p + 2k + 1)!!} \tag{33}$$

Вычислим теперь (30)

$$V_{2n2m}^{\ell\ell'} = \int \Phi_{2m}^{*\ell'} \hat{V} \Phi_{2n}^{\ell} \frac{r\,dr\,d\varphi}{\sqrt{1-r^2}} \tag{34}$$

Подставляя (I9) и (27) и учитывая (3I), получим

$$V^{\ell\ell'}_{2n2m} = 2\delta\omega^2\pi \sum_{p=0}^{m} \sum_{\kappa=0}^{n} a_{2\kappa} a_{2p} \left[(|\ell|+2\kappa)(|\ell|+2\kappa \pm 2\ell-3) \mp 3\ell+\ell^2\right] \times$$

$$\times \int_0^1 \frac{z^{|\ell|+|\ell'|+2\kappa+2p+1}}{\sqrt{1-z^2}}\,dz + 2\delta\omega^2\pi \sum_{p=0}^{m} \sum_{\kappa=0}^{n} a_{2\kappa} a_{2p}\left[(|\ell|+2\kappa)(2 \mp 2\ell -\right.$$

$$\left.- 2\kappa - |\ell|) - \ell^2 \pm 2\ell\right] \int_0^1 \frac{z^{|\ell|+|\ell'|+2p+2\kappa-1}}{\sqrt{1-z^2}}\,dz$$

Делая замену $z = \cos\varphi$ и интегрируя, получим

$$V^{\ell'\ell}_{2n2m} = 2\delta\omega^2\pi \sum_{p=0}^{m} \sum_{\kappa=0}^{n} a_{2\kappa} a_{2p} \left\{\left[(|\ell|+2\kappa)(|\ell|+2\kappa \pm 2\ell-3 \mp 3\ell+\ell^2)\right] \times\right.$$

$$\left.\times \frac{(|\ell|+|\ell\mp 2|+2\kappa+2p)!!}{(|\ell|+|\ell\mp 2|+2p+2\kappa+1)!!} + \left[(|\ell|+2\kappa)(2 \mp 2\ell-2\kappa-|\ell|)-\ell^2 \pm 2\ell\right] \frac{(|\ell|+|\ell\mp 2|+2\kappa+2p-2)!!}{(|\ell|+|\ell\mp 2|+2p+2\kappa-1)!!}\right. \qquad (35)$$

Введем обозначения

$$A^{+\ell}_{2\kappa 2p} = \left\{\left[(|\ell|+2\kappa)(|\ell|+2\kappa+2\ell-3)-3\ell+\ell^2\right] \frac{(|\ell|+|\ell-2|+2\kappa+2p)!!}{(|\ell|+|\ell-2|+2\kappa+2p+1)!!} + \right.$$

$$\left. + \left[(|\ell|+2\kappa)(2-2\ell-2\kappa-|\ell|)-\ell^2+2\ell\right] \frac{(|\ell|+|\ell-2|+2\kappa+2p-2)!!}{(|\ell|+|\ell-2|+2p+2\kappa-1)!!}\right\}$$

$$A^{-\ell}_{2\kappa 2p} = \left\{\left[(|\ell|+2\kappa)(|\ell|+2\kappa-2\ell-3)+3\ell+\ell^2\right] \frac{(|\ell|+|\ell+2|+2\kappa+2p)!!}{(|\ell|+|\ell+2|+2p+2\kappa+1)!!} + \right.$$

$$\left. + \left[(|\ell|+2\kappa)(2+2\ell-2\kappa-|\ell|)-\ell^2-2\ell\right] \frac{(|\ell|+|\ell+2|+2\kappa+2p-2)!!}{(|\ell|+|\ell+2|+2p+2\kappa-1)!!}\right\}$$

и

$$V^{\ell'\ell}_{2n\,2m} = V^{+\ell}_{2n\,2m} + V^{-\ell}_{2n\,2m} \;,$$

где

$$V^{+\ell}_{2n\,2m} = 2\delta\omega^2\pi \sum_{p=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{2p}\, a_{2k}\, A^{+\ell}_{2k\,2p}$$

$$V^{-\ell}_{2n\,2m} = 2\delta\omega^2\pi \sum_{p=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{2p}\, a_{2k}\, A^{-\ell}_{2k\,2p}$$

Вычислим поправку второго приближения по формуле

$$(E^{\ell}_{2n})^2 = {\sum_m}' \frac{\left|V^{+\ell}_{2n\,2m}\right|^2}{E^{(0)\ell}_{2n} - E^{(0)\ell}_{2m}} + {\sum_s}' \frac{\left|V^{-\ell}_{2n\,2s}\right|^2}{E^{(0)\ell}_{2n} - E^{(0)\ell}_{2s}}$$

Тогда имеем выражение для E

$$(E^{\ell}_{2n})^2 = (1+\delta^2)^2\omega^2(4|\ell|n + 4n^2 + |\ell| + 2n) +$$

$$+(4\pi^2\delta^2)^2\omega^2 {\sum_m}' \frac{\sum\limits_{p=0}^{m}\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{p'=0}^{m}\sum\limits_{k'=0}^{n} a_{2p}a_{2k}a_{2p'}a_{2k'}A^{+\ell}_{2k2p}A^{+\ell}_{2k'2p'}}{(4|\ell|n+4n^2+|\ell|+2n)-(4|\ell|m+4m^2+|\ell|+2m)} + \tag{36}$$

$$+(4\pi^2\delta^2)^2\omega^2 {\sum_s}' \frac{\sum\limits_{p=0}^{s}\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{p'=0}^{s}\sum\limits_{k'=0}^{n} a_{2p}a_{2k}a_{2p'}a_{2k'}A^{-\ell}_{2k2p}A^{-\ell}_{2k'2p'}}{(4|\ell|n+4n^2+|\ell|+2n)-(4|\ell|s+4s^2+|\ell|+2s)}$$

Изучим расходимости в (36). Нужно сказать, что добавка к основной энергии в (36) есть, в данном случае петлевая диаграмма и бесконечные суммы по m и по s есть суммы по всем возможным состояниям во внутренних линиях.

Рассмотрим, как ведут себя $a_{2p}, a_{2p'}, A^{\pm\ell}_{2k2p}, A^{\pm\ell}_{2k'2p'}$, при устремлении P и P' к бесконечности.

Распишем вначале рекуррентную формулу (17). Подставив в нее (18) и учитывая, что $n \geqslant k$, получим

$$a_{2k+2} = -\frac{2(n-k)[2|\ell|+2n+2k+1]}{4(k+1)[|\ell|+k+1]}\, a_{2k} \qquad (37)$$

Эту формулу можно преобразовать и найти зависимость прямо от a_0, определяемой из нормировки (33)

$$a_{2k+2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{(n-k)!\,(2k+2n+2|\ell|+1)!!}{(k+1)!\,(k+|\ell|+1)!}\, a_0$$

кроме того, нужно потребовать, чтобы $a_{2k+2}=0$ при $n=k$. Но рассмотрим частные случаи.

Из (37) видно, что при $k\to n\to\infty$ имеем $a_{2k+2}\sim k^{-2}a_{2k}$, т.е. ряд сходится для больших n и k как k^{-2}. (Либо если $n-k$ фиксировано, а k и n то сходится как k^{-k}).

Но в этом случае первые члены ряда, такие как a_2, a_4 и т.д. начинают стремиться к бесконечности как n^2, что ведет к расходимости ряда.

(Несмотря на то, что ряд знакопеременный, можно убедиться, что эти расходимости не скомпенсированы).

Нужно заметить, что $A^{\pm\ell}_{2k2p}$ в данном случае не влияет на сходимость и расходимость ряда, так как при P и P', стремящихся к бесконечности, выходит на единицу.

Получаем, что петлевые диаграммы являются расходящимися. При больших m и s внутренние суммы в (36) расходятся как m^6 и s^6. Затем, после суммирования еще раз по m и s и учитывая знаменатель (36), получим, что петля расходится кубически.

В заключение выражаю свою искреннюю признательность научному руководителю Г.К.Саввиди за постановку задачи и постоянное внимание к работе, А.Б.Нерсисяну за ценные консультации. Я благодарю всех участников теоретического семинара ЕрФИ и его руководителя С.Г.Матиняна за интересное обсуждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л.Д.Ландау,Е.М.Лифшиц. Квантовая механика. М.:Наука,1974.
2. K.Kikkawa, M.Yamasaki, Progr. Theor. Phys. 76(1986) 1379.
3. E.G.Floratos, The Static Potential of Open Bosonic Membranes, CERN preprint TH.5239/88.
4. E.G.Floratos, G.K.Leontaris, The Static Potential of Closed Bosonic Membranes, CERN preprint TH.5257/88.
5. M.E.Laziev, G.K.Savvidy Phys.Lett. B198 (1987) 451.

Рукопись поступила 12 сентября 1990 г.

М.Э.ЛАЗИЕВ

СПЕКТР ЭНЕРГИИ ОТКРЫТОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ МЕМБРАНЫ

Редактор Л.П.Мукаян
Технический редактор А.С.Абрамян

Подписано в печать 24/XII-90г. Формат 60х84/16
Офсетная печать.Уч.изд.л. 0,8 Тираж 299 экз. Ц.10 к.
Зак.тип.№ 326 Индекс 3649

Отпечатано в Ереванском физическом институте
Ереван 36, ул.Братьев Алиханян,2

The address for requests:
Information Department
Yerevan Physics Institute
Alikhanian Brothers 2,
Yrevan, 375036
Armenia, USSR

ИНДЕКС 3649

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ