

ИНДЕКС 3649



Препринт ЕФИ-1309(4)-91

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱԶԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ  
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
YEREVAN PHYSICS INSTITUTE

---

Э.М.МАДУНЦ, Р.Т.МИНА

РЕДКИЙ МЕТОД СГЛАЖИВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ

ЦНИИАтоминформ

ЕРЕВАН - 1991

Է.Մ.ՄԱԴՈՒՆՑ, Ռ.Տ.ՄԻՆԱ

ՓՈՐՉԱՐԱՐԱԿԱՆ ՏՎՑԱԼՆԵՐԻ ՈՂՈՐԿՄԱՆ ՀԱՋՎԱԳՑՈՒՑ

ՄԵՓՈԴ

Առաջարկված է Բելմանի Ֆունկցիոնալի վրա հիմնված փորձարարական ավյալների ողորկման մեթոդ: Վերլուծած է եղանակը: Ուսումնասիրված են ելքային ավյալների սպեկտրի փոփոխությունները և դրանց աղմուկների միջինությունը: Ստացված են նորմալ Ֆունկցիայի բաշխման փոփոխությունները բնութագրող արդյունքներ: Գտնված են մեթոդի պարամետրերի սահմանները, որոնք լավագույնացնում են ողորկումը: Տվյալ մոտեցման տարբերակիչ հատկանիշը ծրագրային իրացման պարզությունն է և նվազագույն հաշվողական ռեսուրսների օգտագործումը:

Երևանի ֆիզիկայի ինստիտուտ

Երևան 1991

E.M.MADUNTS, R.T.MINA

A RARE METHOD OF EXPERIMENTAL DATA SMOOTHING

An experimental data smoothing method based on the Bellman functional is proposed and analyzed. The change in the initial data spectrum is investigated and their noise averaging is studied. There are obtained results that characterize the normal distribution function variation. The limits of smoothing-optimizing parameters of the method are found. Simple software and use of minimal computer resources are the characteristic features of this method.

Yerevan Physics Institute

Yerevan 1991



УДК 518

Э.М.МАДУНЦ,Р.Т.МИНА

РЕДКИЙ МЕТОД СГЛАЖИВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ  
ДАННЫХ

Предложен метод сглаживания экспериментальных данных, основанный на функционале Беллмана. Проведен его анализ. Исследовано изменение спектра исходных данных, изучено усреднение их шума. Получены результаты, характеризующие изменение нормальной функции распределения. Найдены пределы параметров метода, оптимизирующие процесс сглаживания. Отличительной особенностью данного подхода является простота программной реализации и использование минимальных вычислительных ресурсов.

Ереванский физический институт  
Ереван 1991

Введение

Аппроксимация экспериментальных данных методом наименьших квадратов с использованием совокупности ортогональных функций или сшиваемых друг с другом сплайнов [1] является эффективным способом аналитического представления получаемой информации. Благодаря погрешностям измерений, количество функций или сплайнов разумным образом ограничивается и аппроксимирующая зависимость оказывается более гладкой, чем кривая, проведенная через все экспериментальные точки. Однако платой за аналитичность представления является значительный объем вычислительной работы.

С другой стороны, во многих случаях, например, для построения графиков, требуется лишь сглаживание результатов в условиях, когда для статистической обработки недостаточно количества данных или вычислительных ресурсов. При этом вынужденно применяются различные малообоснованные методы. Примером может служить усреднение по группам точек, что приводит к уменьшению разрешающей способности и потере информации.

Значительно более привлекательным выглядит малоизвестный метод, изложенный Р.Беллманом в связи с некоторыми задачами оптимизации [2]. В настоящей работе он всесторонне изучен и доведен до практического использования. В целях существенного упрощения расчетов привлечен иной, чем в оригинале, алгоритм решения возникающей специфической системы уравнений, а также уточнены граничные условия и проанализированы получаемые результаты в зависимости от исходных требований к сглаживанию экспериментальных данных.

#### Реализация метода

Если некоторую последовательность действительных чисел  $(A_k)$   $k = 1, 2, \dots, n$  необходимо аппроксимировать другой последовательностью  $(X_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  таким образом, чтобы каждое число  $X_k$  было близко как к  $A_k$ , так и к ближайшим соседям  $X_{k-1}$  и  $X_{k+1}$ , то следует минимизировать функционал

$$Q = \sum_{i=1}^{n+1} C_i (X_i - X_{i-1})^2 + \sum_{i=1}^n D_i (X_i - A_i)^2, \quad (1)$$

где все  $C_i$  и  $D_i$  неотрицательны.

Числа  $X_0$  и  $X_{n+1}$  - константы и могут быть заданы граничными условиями

$$X_0 = 2A_1 - A_2, \quad X_{n+1} = 2A_n - A_{n-1} \quad (2)$$

с целью сохранить величину дискретной производной в начале и конце массива точек.

После приравнивания к нулю частных производных  $Q$  по всем  $(X_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  возникает алгебраическая система линейных уравнений

$$\begin{aligned} H_{i-1} X_{i-1} + G_i X_i + H_i X_{i+1} &= F_i, & i = 1, 2, \dots, n; \\ G_i &= (C_i + D_i + C_{i+1}) / D_i, & i = 1, 2, \dots, n; \\ H_i &= -C_i / D_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; & H_0 = H_n = 0; \\ F_i &= A_i, & i = 2, 3, \dots, n-1; \\ F_1 &= A_1 + C_1 X_0 / D_1, & F_n = A_n + C_{n+1} X_{n+1} / D_n; \end{aligned} \quad (3)$$

Матрица коэффициентов  $H_i$  и  $G_i$  этой системы - трехдиагональная. По главной диагонали стоят коэффициенты  $G_i$ , выше и ниже ее -  $H_i$ , а остальные элементы - нули. Эта специфика позволяет использовать для решения известный метод прогонки [3], который весьма эффективен в компьютерных вычислениях. Его алгоритм приводится ниже.

1. Вычисляются  $\alpha_2 = H_1 / G_1$  и  $\beta_2 = F_1 / G_1$ .
2. Последовательно для  $k = 3, 4, \dots, n$  определяются  $\alpha_k = -H_{k-1} / (H_{k-2} \alpha_{k-1} + G_{k-1})$  и  $\beta_k = (F_{k-1} - H_{k-2} \beta_{k-1}) / (H_{k-2} \alpha_{k-1} + G_{k-1})$ .
3. Находится  $X_n = (F_n - H_{n-1} \beta_n) / (H_{n-1} \alpha_n + G_n)$ .
4. С помощью определенных ранее коэффициентов  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  в обратной последовательности  $k = n-1, n-2, \dots, 1$  находятся  $X_k = \alpha_{k+1} X_{k+1} + \beta_{k+1}$ .

Коэффициенты  $C_i$  и  $D_i$ , с помощью которых вычисляются

элементы трехдиагональной матрицы, могут быть интерпретированы следующим образом.

Значения  $D_i$  пропорциональны весу отдельного измерения  $A_i$ . В свою очередь, коэффициенты  $C_i$  характеризуют степень равномерности изменения какого-либо параметра при измерениях  $A_i$ . Например, если точки  $A_i$  на графике в функции от этого параметра  $Z$  эквидистантны, то все  $C_i$  равны между собой. В ином случае, если отсчет  $i-1$  отстоит от отсчета  $i$  на величину  $Z_i$ , то  $C_i = F(1/Z_i, 1/Z_{i+1})$ , поскольку сближение точек  $Z_i$  и  $Z_{i-1}$  должно быть тем больше, чем меньше расстояние между ними. Вид функции  $F$  — произвольный, и если принять обратно пропорциональный закон, то

$$C_i = (1/Z_i)/(1/Z_i + 1/Z_{i+1}) = 1/(1 + Z_i/Z_{i+1}). \quad (4)$$

Решение системы уравнений (3) зависит только от соотношения между коэффициентами  $C_i$  и  $D_i$ . Определим, как его величина влияет на степень сглаживания. Так как последовательность  $(X_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  доставляет минимум функционалу (1) и является единственным решением (3), то справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n+1} C_i (A_i - A_{i-1})^2 - \sum_{i=1}^{n+1} C_i (X_i - X_{i-1})^2 > \sum_{i=1}^n D_i (X_i - A_i)^2. \quad (5)$$

Его можно получить, подставляя в (1)  $A_i$  вместо  $X_i$  и сравнивая полученное значение  $Q$  с минимальным. Это неравенство можно усилить, отбрасывая сумму со знаком минус в левой его

части.

Для упрощения дальнейших рассуждений положим сначала все  $C_i$ , а также и  $D_i$  равными друг другу и соответственно величинам  $C$  и  $D$ . Поскольку модуль разности  $A_i - A_{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  в конечной последовательности всегда имеет верхний предел, равный, допустим,  $M$ , то неравенство (5) дает нам следующую оценку сверху суммы:

$$\sum_{i=1}^n (X_i - A_i)^2 < \frac{C}{D} n M \quad (6)$$

Таким образом, при стремлении  $D/C$  к бесконечности последовательности  $(X_i)$  и  $(A_i)$  сливаются, то есть сглаживания нет.

Применяя неравенство Коши-Буняковского к исходному соотношению (6), можно, повторяя предыдущий путь рассуждений, показать, что при различных коэффициентах  $C_i$  и  $D_i$  увеличение соотношения  $D_i/C_i$  приводит к сближению вплоть до слияния значений  $X_i$  и  $A_i$  для любого  $i$ . Впрочем, это сразу видно из системы уравнений (3), так как если  $D_i/C_i \rightarrow \infty$ , то  $G_i \rightarrow 1$  и  $H_i \rightarrow 0$ , что эквивалентно частному решению  $X_i = A_i$ .

Иллюстрация метода Беллмана приводится на рис. I, где с различной степенью выполнено сглаживание зубчатой кривой, образованной прямыми линиями со случайными наклонами.

#### Исследование свойств метода

Механизм действия метода сглаживания следующий. Поскольку преобразование (3) линейное, результат его применения к сумме двух разных последовательностей чисел одинаковой длины равен

сумме результатов воздействия на каждую из них. Это дает возможность мысленно разложить последовательность на сумму абсолютно точных данных и наложенных на них шумовых добавок. Сглаживанию подвергаются обе составляющие, но степень его будет, как это уже видно из рис.1, в значительной мере зависеть от скорости изменения величины чисел в последовательности. Очевидно, что шумовая составляющая будет сглаживаться более сильно.

Изучим этот механизм количественно. Любую последовательность чисел, циклически повторенную, можно разложить в дискретный ряд Фурье. Ограничимся симметричным случаем и исследуем сглаживание максимума косинусоиды единичной амплитуды при изменении числа составляющих ее точек от 256 до 5. На рис.2 показано, насколько смещается максимум сглаженной косинусоиды для разных отношений  $D/C$ . Из него следует, например, что если осцилляционная особенность в последовательности чисел образована, допустим, десятью точками, то при сглаживании с  $D/C = 4$  она усреднится не более чем на 1%.

В свою очередь, допустим, что шум имеет гауссову природу. Исследуем поведение его дисперсии. На рис.3 для шестидесяти различных наборов случайных двухсот сорока нормально распределенных чисел подсчитано отношение суммы их квадратов после и до сглаживания. Из рисунка следует, что дисперсия уменьшается по мере уменьшения  $D/C$ , но для отдельных наборов эта закономерность нарушается. Однако по абсолютной величине отношение всегда меньше единицы. Усредненное по шестидесяти наборам отношение дисперсии в зависимости от  $D/C$  показано на рис.4. Основываясь на данных этого и предыдущего рисунков, целесообразно выбирать  $D/C$  в области от 0.1 до 1, чтобы получить

оптимальный эффект от сглаживания независимо от спектра шума.

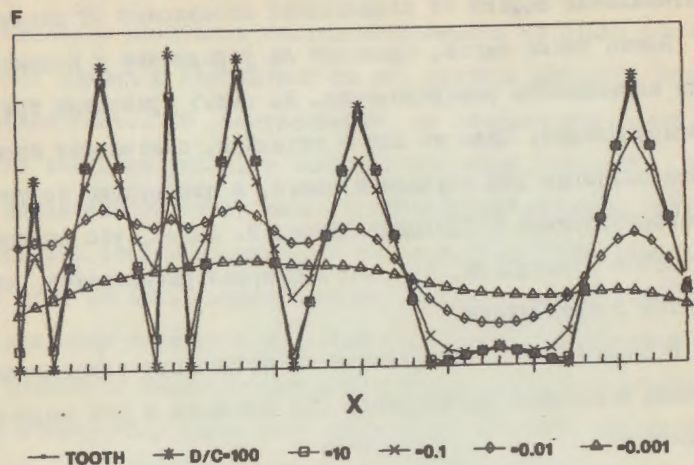
Важно также знать, приводит ли усреднение к искажению функции нормального распределения. На рис.5 приведены три функции распределения. Одна из них - исходная, отвечающая нормальному распределению 240 случайных чисел, а две другие построены из преобразованных последовательностей. Видно, что распределение остается нормальным, но его дисперсия уменьшается, что согласуется с предыдущим.

В заключение можно указать на любопытную связь между сглаживанием с помощью функционала (1) Беллмана и его непрерывным аналогом

$$G = \int ((dx/dt)^2 + (x-a(t))^2) dt. \quad (7)$$

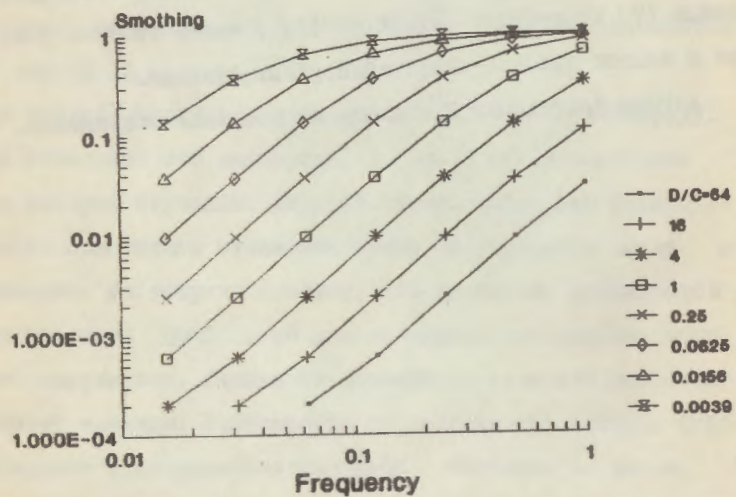
Вариационная задача, заключающаяся в поиске минимума функционала (7) по теореме Гильберта [4], имеет гладкое решение даже в классе кусочно-дифференцируемых функций.

Авторы благодарны С.А.Аюццу за полезные обсуждения.



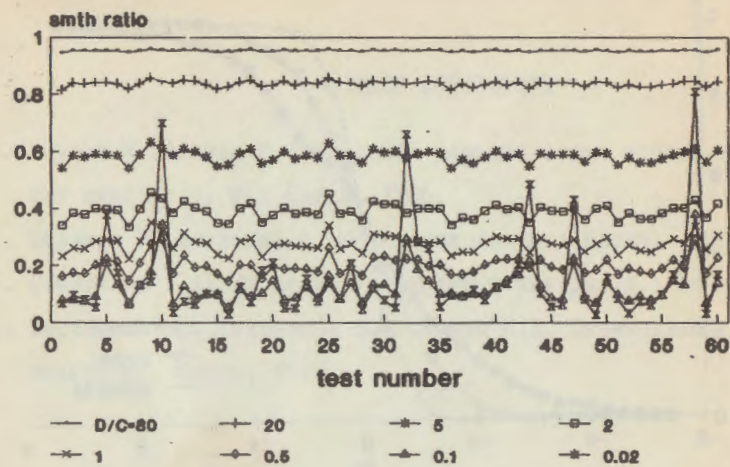
SMOOTHING TOOTHLINE

Рис. 1



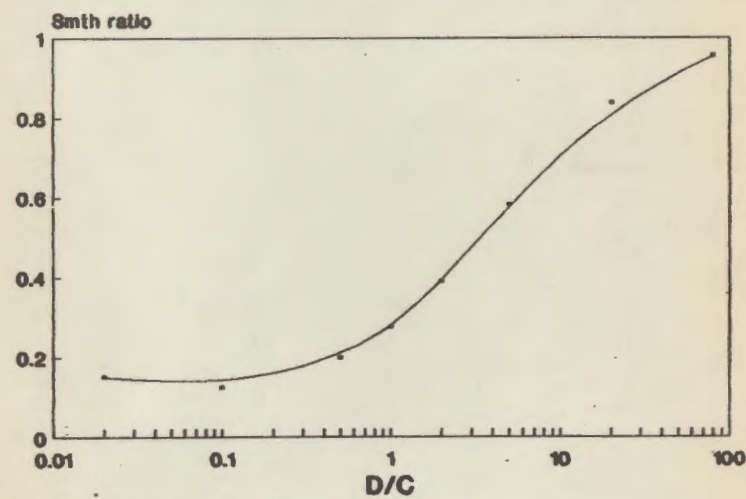
Frequency dependence by Belmans method

Рис. 2



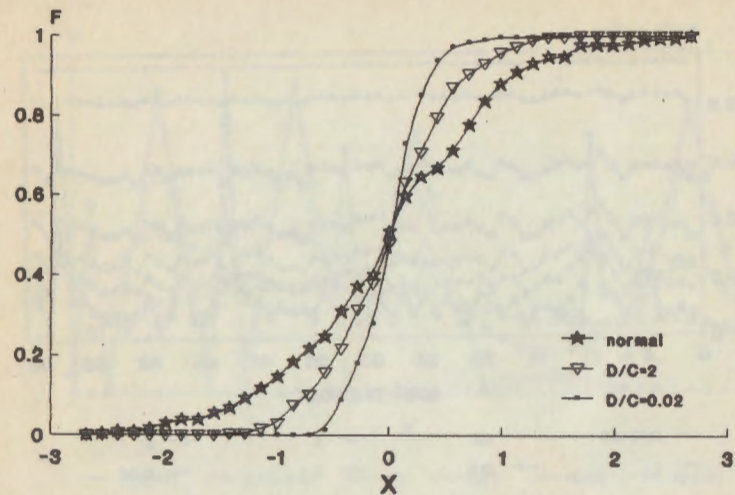
Smoothing by Belman method

Рис. 3



Smoothing by Belman method depend on D/C

Рис. 4



Distribution before and after transform

Рис.5

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Доусен Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. М.: Наука, 1986.
2. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976.
3. Самарский А.А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1987.
4. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.

Рукопись поступила 10 января 1991 г.

15

Э.М.МАДУНЦ, Р.Т.МИНА

РЕДКИЙ МЕТОД СГЛАЖИВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Редактор Л.П.Мукаян

Технический редактор А.С.Абрамян

---

Подписано в печать 2/IV-91г.

Формат 60x84/16

Офсетная печать. Уч.изд.л. 0,8

Тираж 299 экз. Ц. 10 к.

Зак.тип.№ 38

Индекс 3649

---

Отпечатано в Ереванском физическом институте

Ереван 36, ул.Братьев Алиханян, 2

The address for requests:  
Information Department  
Yerevan Physics Institute  
Alikhanian Brothers 2,  
Yerevan, 375036  
Armenia, USSR