ИНДЕКС 3649

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Препринт ЕФИ-[illegible]

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
YEREVAN PHYSICS INSTITUTE

А.П.НЕРСЕСЯН

КЭЛЕРОВЫ СУПЕРМНОГООБРАЗИЯ И СУПЕРСИММЕТРИЧНЫЕ МЕХАНИКИ

ЦНИИатоминформ
ЕРЕВАН-1990

Նախատիպ ԵրՖԻ-1311(6)-91

Ա.Պ.ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ*

ԿԵԼԵՐՅԱՆ ԲԱԶՄԱՁԵՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ԵՎ ԳԵՐՍԻՄԵՏՐԻԿ ՄԵԽԱՆԻԿԱՆԵՐԸ

Կելերյան բազմաձևությունների համաշոշափող շերտավորումների հետ կապակցված՝ որոշված են զույգ և կենտ կելերյան կառուցվածքները գեր-բազմաձևությունների վրա։ Զույգ և կենտ Պուասոնի փակագծերին վերա-բերող համիլտոնյան դաշտերը, որոնք որոշվում են այդ կառուցվածքնե-րով, տալիս են Կիլինգի նրանց ընդհանուր վեկտորները։ Զույգ դաշտերին վերաբերող մեխանիկաները ունեն երկուական գերլիցք։

Երևանի ֆիզիկայի ինստիտուտ
Երևան 1991

*Երևանի պետական համալսարան

Preprint YERPHI-1311(6)-91

A.P. NERSESSIAN*

KAHLERIAN SUPERMANIFOLDS AND SUPERSYMMETRIC MECHANICS

Odd and even Kahlerian structures are naturally determined on supermanifolds associated with cotangent bundles of Kahlerian manifolds. Fields, that are Hamiltonian to both even and odd Poisson brackets determined by these structures, give their general Killing vectors. The mechanics that correspond to even fields have two supercharges.

Yerevan Physics Institute
Yerevan 1991

*Yerevan State University

Препринт ЕФИ-1311(6)-91

А.П.НЕРСЕСЯН *

КЭЛЕРОВЫ СУПЕРМНОГООБРАЗИЯ И СУПЕРСИММЕТРИЧНЫЕ МЕХАНИКИ

На супермногообразиях, ассоциированных кокасательным рас - слоениям кэлеровых многообразий, естественным образом определены четная и нечетная кэлеровы структуры. Поля, гамильтоновые относительно и четной, и нечетной скобок Пуассона, определяемых этими структурами, задают их общие векторы Киллинга. Механики, соответствующие четным полям, имеют по два суперзаряда.

Ереванский физический институт
Ереван 1991

* Ереванский Государственный университет

1. Введение

Супермногообразия размерности (2N . 2N) допускают одновременное введение на них четной и нечетной симплектических структур, и, соответственно, невырожденных скобок Пуассона [1]. Однако, в отличие от четной скобки Пуассона, нечетная скобка Пуассона широко используется, пожалуй, лишь в методе лагранжева BRST квантования [2].

В работе [3] было показано, что суперсимметричная механика Виттена допускает переформулировку на нечетной скобке Пуассона. В связи с этим были исследованы супермногообразия с четной и нечетной скобками Пуассона и гамильтоновы механики на них [4-7]. В частности, оказалось, что существует лишь конечное число механик, гамильтоновых относительно и четной, и нечетной невырожденных скобок Пуассона [5,6]. Супермногообразия с четной и нечетной симплектическими структурами оказываются очень интерес - ным объектом как с геометрической, так и с физической точки зрения. Наряду с уже указанным физическим применением. на них можно глобально определить нечетный оператор Лапласа - один из основных объектов метода лагранжева BRST квантования, как производную Ли формы объема, построенной с помощью четной симплектической структуры, вдоль векторного поля, гамильтонового относительно нечетной скобки Пуассона [6] .

В [8] были построены суперобобщения комплексного проективного пространства, являющиеся приведенными фазовыми пространствами супергамильтоновых систем. Одно из них, ассоциированное кокасательному расслоению комплексного проективного пространства, обладает как четной, так и нечетной кэлеровыми структурами.

В данной работе мы покажем, что на супермногообразиях, ассоциированных кокасательному расслоению произвольного кэлерова многообразия, можно естественным образом определить четную и нечетную кэлеровы структуры. Механики, гамильтоновые относительно четной и нечетной скобок Пуассона, отвечающих этим кэлеровым структурам, задают их общие вектора Киллинга, и обратно.

Работа построена следующим образом.

Во втором разделе мы определим кэлерово супермногообразие, скобку Пуассона на нем, и покажем, что на супермногообразиях кокасательным расслоениям кэлеровых многообразий, существует и четная, и нечетная кэлеровы структуры.

В третьем разделе мы найдем векторные поля на супермногообразиях, ассоциированных кокасательным расслоениям произвольных кэлеровых многообразий, гамильтоновые относительно и четной, и нечетной скобок Пуассона. Они совпадают с общими векторами Киллинга четной и нечетной кэлеровых структур.

2. Кэлеровы структуры на супермногообразиях

А. Назовем комплексное супермногообразие с локальными координатами $W^A=(\omega^a,\sigma^\alpha)$, $p(\omega^a)\equiv p_a=0$, $p(\sigma^\alpha)\equiv p_\alpha=1$ кэлеровым если на нем существует вещественная невырожденная эрмитова "метрика"

$$ds^2=dW^A\, g^{\varkappa}_{A\bar{B}}\, d\bar{W}^B,$$

$$(g^{\varkappa}_{A\bar{B}}=(-1)^{(A+\varkappa+1)(B+\varkappa+1)+\varkappa+1}\,\bar{g}_{B\bar{A}}\,,\quad p(g^{\varkappa}_{AB})=p_A+p_B+\varkappa\,, \tag{I}$$

$\varkappa=0,I$ - четность метрики) такая, что соответствующая ей 2-форма

$$\Omega^{\varkappa}=i(-1)^{p_A p(g^{\varkappa}_{A\bar{B}})}\, g^{\varkappa}_{A\bar{B}}\, dW^A\wedge d\bar{W}^B \tag{2}$$

является замкнутой:

$$d\Omega^{\varkappa}=0\,. \tag{3}$$

Таким образом, кэлерово супермногообразие является симплектическим. Симплектической структуре (2) соответствует скобка Пуассона (той же четности)

$$\{f,g\}_{\varkappa}=i\frac{\partial^R f}{\partial\bar{W}^A}\, g_{\varkappa}^{\bar{A}B}\,\frac{\partial^L g}{\partial W^B}-i(-1)^{(p_A+\varkappa)(p_B+\varkappa)}\,\frac{\partial^R f}{\partial W^B}\, g_{\varkappa}^{\bar{A}B}\,\frac{\partial^L g}{\partial\bar{W}^A}\,, \tag{4}$$

где

$$g_{\varkappa}^{\bar A B}\, g^{\varkappa}_{B\bar C} = \delta_C^A\,, \qquad g^{\bar A B}_{\varkappa} = (-1)^{(p_A+\varkappa)(p_B+\varkappa)}\, \overline{g^{\bar B A}_{\varkappa}}\,.$$

Из условия (3) следует, что, по крайней мере локально, существует вещественная функция $K^{\varkappa}(W,\bar W)\,(p(K^{\varkappa})=\varkappa)$, именуемая кэлеровым потенциалом, такая, что

$$g^{\varkappa}_{A\bar B} = \frac{\partial^L}{\partial W^A}\,\frac{\partial^R}{\partial \bar W^B}\, K^{\varkappa}(W,\bar W). \tag{5}$$

Легко видеть, что кэлеров потенциал определяется с точностью до голоморфной и антиголоморфной функции. Поэтому, если на картах $\tilde U$ и U супермногообразия определены соответственно кэлеровы потенциалы $\tilde K^{\varkappa}$ и $K^{\varkappa}$, то на пересечении карт $\tilde U \cap U$ они будут связаны соотношением

$$\tilde K^{\varkappa}(\tilde W(W),\, \bar{\tilde W}(\bar W)) = K^{\varkappa}(W,\bar W) + f^{\varkappa}(W) + \overline{f^{\varkappa}(W)} \tag{6}$$

Б. Каждому супермногообразию размерности $(p.q)$ с базой $\mathcal{M}_o$ однозначно сопоставляется линейное расслоение с той же базой и слоем размерности q [9]. Кокасательному расслоению кэлерова многообразия $\mathcal{M}_o$, $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_o = N$ можно сопоставить комплексное супермногообразие $S^*\mathcal{M}_o$ размерности $\dim_{\mathbb{C}} S^*\mathcal{M}_o = (N.N)$. На пересечении двух карт функции перехода будут иметь вид

$$\tilde\omega^a = \tilde\omega^a(\omega)\,, \tag{7а}$$

$$\tilde\sigma^a = \sum_{b=1}^{N} \frac{\partial \tilde\omega^a(\omega)}{\partial \omega^b}\, \sigma^b\,, \tag{7б}$$

где (7а) - функции перехода координат базового многообразия.

<u>Теорема</u>. На супермногообразии $S^*\mathcal{M}_o$ с функциями перехода (7а,б) имеются четная и нечетная кэлеровы структуры, локально задаваемые кэлеровыми потенциалами.

$$K^0(W,\bar W) = K(\omega,\bar\omega) + i\varepsilon\, \frac{\partial^2 K}{\partial\omega^a\,\partial\bar\omega^b}\, \sigma^a\, \bar\sigma^b\,, \tag{8а}$$

$$K^1(W,\bar W) = \alpha\, \frac{\partial K}{\partial \omega^a}\, \sigma^a + \bar\alpha\, \frac{\partial K}{\partial \bar\omega^a}\, \bar\sigma^a\,, \tag{8б}$$

где $\varepsilon = \bar\varepsilon,\ \alpha, \bar\alpha$ - константы, $K(\omega,\bar\omega)$ - локальный кэлеров потенциал базового многообразия.

<u>Доказательство</u>. Так как $K(\omega,\bar\omega)$ - кэлеров потенциал многообразия $\mathcal{M}_o$ с функциями перехода (7а), то при преобразовании (7а) он меняется на голоморфную и антиголоморфную функции

$$\tilde K(\tilde\omega(\omega), \bar{\tilde\omega}(\bar\omega)) = K(\omega,\bar\omega) + f(\omega) + \overline{f(\omega)}\,.$$

σ^a преобразуется как $d\omega^a$, поэтому

$$\tilde K^0(\tilde W(W),\bar{\tilde W}(\bar W)) = K^0(W,\bar W) + f(\omega) + \overline{f(\omega)},$$

$$\tilde K^1(\tilde W(W),\bar{\tilde W}(\bar W)) = K^1(W,\bar W) + \alpha \frac{\partial f}{\partial \omega^a}\sigma^a + \bar\alpha \frac{\partial \bar f}{\partial \bar\omega^a}\bar\sigma^a .$$

Поскольку $\det g_{a\bar b} \equiv \det \frac{\partial^2 K}{\partial\omega^a \partial\bar\omega^b} \neq 0$, то матрицы $g^{æ}_{A\bar B} = \frac{\partial^l}{\partial W^A}\frac{\partial^r}{\partial \bar W^B} K^{æ}$ невырождены.

Теорема доказана.

Четная кэлерова структура, определяемая потенциалом (8а), имеет матрицу

$$g^0_{A\bar B} = \begin{pmatrix} g_{a\bar b} + i\varepsilon g_{a\bar b, c\bar d}\sigma^c\bar\sigma^d , & i\varepsilon g_{a\bar b, c}\sigma^c \\ i\varepsilon g_{a\bar b, \bar c}\bar\sigma^c , & i\varepsilon g_{a\bar b} \end{pmatrix} \tag{9a}$$

Нечетная кэлерова структура, определяемая потенциалом (8б), имеет матрицу

$$g^1_{A\bar B} = \begin{pmatrix} \alpha g_{a\bar b, c}\sigma^c + \bar\alpha g_{a\bar b, \bar c}\bar\sigma^c , & \bar\alpha g_{a\bar b} \\ \alpha g_{a\bar b} & , \quad 0 \end{pmatrix} \tag{9б}$$

По формуле (4) мы можем сопоставить ей нечетную скобку Пуассона с

$$g_1^{\bar A B} = \begin{pmatrix} 0 & , \quad \frac{1}{\alpha} g^{\bar a b} \\ \frac{1}{\bar\alpha} g^{\bar a b} & , \quad \frac{1}{\alpha\bar\alpha}\left(\alpha g^{\bar a b}_{\ ,c}\sigma^c + \bar\alpha g^{\bar a b}_{\ ,\bar c}\bar\sigma^c\right) \end{pmatrix} \tag{10}$$

В. Как было отмечено в введении, супермногообразие $S^*\mathbb{C}P(N)$ и кэлеровы структуры на нем можно получить также методом гамильтоновой редукции, а именно, если на $\mathbb{C}^{N+1.N+1}$ заданы четная

$$\Omega^0 = i dz^m \wedge d\bar z^m + d\eta^m \wedge d\bar\eta^m \tag{11a}$$

и нечетная

$$\Omega^1 = dz^m \wedge d\bar\eta^m + d\bar z^m \wedge d\eta^m \tag{11б}$$

кэлеровы 2-формы, то четную кэлерову структуры на $S^*\mathbb{C}P(N)$ можно получить редукцией 2-формы (11а) по гамильтонианам

$$H = z^m \bar z^m - i\eta^m\bar\eta^m$$

$$Q_1 = z^m\bar\eta^m + \bar z^m \eta^m$$

$$Q_2 = i(z^m\bar\eta^m - \bar z^m\eta^m)$$

Они образуют суперaлгебру

$$\{Q_1, Q_1\} = \{Q_2, Q_2\} = 2H,$$

$$\{Q_1, Q_2\} = \{Q_1, H\} = \{Q_2, H\} = \{H, H\} = 0 .$$

Нечетную кэлерову структуру на $S^*\mathbb{C}P(N)$ можно получить редукцией 2-формы (11б) по

$$Q_2 = i(z^m\bar\eta^m - \bar z^m\eta^m),$$

$$H_0 = z^m \bar z^m$$

образующим абелеву суперaлгебру [8].

3. Гамильтоновы системы на супермногообразии с четной и нечетной кэлеровыми структурами

В предыдущем разделе нами было построено супермногообразие, обладающее четной и нечетной кэлеровыми, а , значит, и симплектическими структурами. Найдем векторные поля, являющиеся гамильтоновыми относительно обоих структур, иными словами, найдем пары вещественных функций H и Q $(p(H)=p(Q)+1=0)$ таких, что

$$V^A=\{W^A,H\}_0=\{W^A,Q\}_1\,, \tag{I}$$

где четная и нечетная скобки Пуассона определяются, соответственно, четной (2.9) и нечетной (2.II) кэлеровыми структурами.

Из (I) имеем:

$$\frac{\partial^L H}{\partial W^A}=\overset{0}{g}_{A\bar{B}}\,\overset{\bar{B}C}{g_1}\,\frac{\partial^L Q}{\partial W^C}. \tag{2}$$

Подставляя выражения (2.9) и (2.I2) в (2), получаем

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial H}{\partial\omega^a}\\[2ex] \dfrac{\partial^L H}{\partial\sigma^a}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{i\varepsilon}{\alpha}\Gamma^c_{ab}\sigma^b, & \dfrac{1}{\alpha}\delta^c_a+\dfrac{i\varepsilon}{\alpha}R^c_{ab\bar{d}}\sigma^b\bar{\sigma}^d-\dfrac{i\varepsilon}{\alpha}\Gamma^n_{am}\Gamma^c_{nl}\sigma^m\sigma^l\\[2ex] \dfrac{i\varepsilon}{\alpha}\delta^c_a, & -\dfrac{i\varepsilon}{\alpha}\Gamma^c_{ab}\sigma^b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial Q}{\partial\omega^c}\\[2ex] \dfrac{\partial^L Q}{\partial\sigma^c}\end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $\Gamma^c_{ab}=g^{c\bar{d}}g_{\bar{d}a,b}$ – согласованная с метрикой связанность базового многообразия, $R^c_{ab\bar{d}}=(\Gamma^c_{ab})_{,\bar{d}}$ - его тензор кривизны.

Представив H и Q в виде полиномов по σ^a , $\bar{\sigma}^a$ и учтя, что дифференцирование по $\sigma^a\,(\bar{\sigma}^a)$ есть просто вычеркивание вынесенного влево $\sigma^a\,(\bar{\sigma}^a)$, без труда находим решения системы (3)

а) если $p(H)=0$,

$$H=H_0(\omega,\bar{\omega})+i\varepsilon\,\frac{\partial^2 H_0}{\partial\omega^a\partial\bar{\omega}^b}\,\sigma^a\bar{\sigma}^b\,, \tag{4а}$$

$$Q=\alpha\,\frac{\partial H_0}{\partial\omega^a}\sigma^a+\bar{\alpha}\,\frac{\partial H_0}{\partial\bar{\omega}^a}\bar{\sigma}^a\,, \tag{4б}$$

где $H_0(\omega,\bar{\omega})$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial^2 H_0}{\partial\omega^a\partial\omega^b}-\Gamma^c_{ab}\,\frac{\partial H_0}{\partial\omega^c}=0. \tag{5}$$

Гамильтонианам (3) соответствует четное векторное поле

$$\bar{V}_0=V^a\frac{\partial}{\partial\omega^a}+V^a_{,c}\,\sigma^c\frac{\partial}{\partial\sigma^c}\,, \tag{6}$$

где

$$V^a=ig^{a\bar{b}}\,\frac{\partial H_0}{\partial\bar{\omega}^b}. \tag{7}$$

б) если $p(H)=1$, решениями системы (3) являются

$$H=\frac{i\varepsilon}{\alpha\bar{\alpha}}\left(\alpha\,\frac{\partial H_0}{\partial\omega^a}\sigma^a-\bar{\alpha}\,\frac{\partial H_0}{\partial\bar{\omega}^a}\bar{\sigma}^a\right), \tag{8а}$$

$$Q = H_0(\omega,\bar\omega) - i\varepsilon \frac{\partial^2 H_0}{\partial\omega^a \partial\bar\omega^b} \sigma^a \bar\sigma^b , \qquad (8б)$$

где $H_0(\omega,\bar\omega)$ опять же должно удовлетворять условию (5).

Гамильтонианы (8) задают нечетное векторное поле

$$\bar V_1 = \frac{i\varepsilon}{\alpha} V^a_{;c} \sigma^c \frac{\partial}{\partial\omega^a} + \frac{1}{\alpha} V^a \frac{\partial}{\partial\sigma^a} . \qquad (9)$$

Из (5) следует, что поле (7) является голоморфным $V^a = V^a(\omega)$ и, значит, киллинговым полем $\mathcal{M}_0$. Уравнения (5),(7) есть уравнения Киллинга кэлерова многообразия, но, если поле (7) голоморфно, то голоморфны и поля (6) и (9), следовательно, они являются векторами Киллинга супермногообразия $S^*\mathcal{M}_0$. Можно проверить, что полями (6),(9) исчерпываются все поля, являющиеся киллинговыми и для четной и для нечетной кэлеровых структур. Выясним простейшие свойства систем, задаваемых гамильтонианами (4а,б). Поскольку гамильтониан (4а) зависит только от параметра ε четной скобки Пуассона и не зависит от комплексного параметра α нечетной скобки Пуассона, а гамильтониан (4б) зависит лишь от параметра α нечетной скобки Пуассона, то, деформируя эти параметры, с легкостью получаем из (I) равенства

$$\{f, H_0 + F\}'_0 = \{f, Q^+ + Q^-\}'_1 = \{f, H_0 - F\}''_0 = \{f, i(Q^+ - Q^-)\}''_1 , \qquad (10)$$

где $f(W,\bar W)$ – произвольная функция на супермногообразии, $\{\ ,\ \}'_0$, $\{\ ,\ \}''_0$ – четные скобки Пуассона, соответствующие

кэлеровой структуре (2.9а) при $\varepsilon = +1$, $\varepsilon = -1$, $\{\ ,\ \}'_1$, $\{\ ,\ \}''_1$ – нечетные скобки Пуассона, соответствующие нечетной кэлеровой структуре (2.9б) при $\alpha = 1$, $\alpha = i$

$$F = i \frac{\partial^2 H_0}{\partial\omega^a \partial\bar\omega^b} \sigma^a \bar\sigma^b$$

$$Q^+ = \frac{\partial H_0}{\partial\omega^a} \sigma^a \qquad Q^- = \frac{\partial H_0}{\partial\bar\omega^a} \bar\sigma^a$$

Подставляя в (10) в качестве f функции F, Q^+, Q^-, H_0, получаем, что они являются интегралами движения динамической системы, задаваемой гамильтонианами (4а,б). Таким образом, динамические системы, гамильтоновые относительно четной и нечетной кэлеровых структур, имеют два четных интеграла движения и два нечетных, переходящие друг в друга при переходе от одной скобки Пуассона к другой.

В заключение хочу выразить глубокую благодарность О.М.Худавердяну за полезные обсуждения, И.Л.Бухбиндеру, Р.Л.Мкртчяну, И.В.Тютину за интерес к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Леитес Д.А. ДАН СССР,I977, 236, № 4, с.804.

2 Batalin I.A., Vilkovisky G.A., Phys.Lett. 1981, vol.B102, p.27; Nucl.Phys. 1984, vol.B234, p.106.

3 Волков Д.В.,Пашнев А.И.,Сорока В.А.,Ткач В.И. Письма в ЖЭТФ, I986, т.44, с.55.

4 Khudaverdian O.M., Nersessian A.P., Formulation of Hamiltonian mechanics with odd and even poison brackets, Preprint YERPHI-1031(81)-87.

5 Нерсесян А.П.,Худавердян О.М. Материалы УП Советской гравитационной конференции. Ереван, I988.

6 Khudaverdian O.M., Preprint of Geneva University UGVA-DPT 1989/05-613., Journal of Math.Phys., 1991 (to be published)

7 Khudaverdian O.M., Nersessian A.P., Preprint of Geneva University, UGVA-DPT 1989/05-614, Journal of Math.Phys.,1991,

8 Нерсесян А.П.,Худавердян О.М. Изв. АН РА. Физика,I990,т.25, № 6.

9 Березин Ф.А. ЯФ, I979, т.29, № 6.,с.I670.

I0 Нерсесян А.П.,Худавердян О.М. Изв. АН АрмССР.Физика,I989, т.24, № 6.

Рукопись поступила I8 января I99I г.

The address for requests:
Information Department
Yerevan Physics Institute
Alikhanian Brothers 2,
Yrevan, 375036
Armenia, USSR

А.П.НЕРСЕСЯН

КЭЛЕРОВЫ СУПЕРМНОГООБРАЗИЯ И СУПЕРСИММЕТРИЧНЫЕ МЕХАНИКИ

Редактор Л.П.Мукаян

Технический редактор А.С.Абрамян

Подписано в печать 28/П-9Iг. Формат 60х84/I6
Офсетная печать.Уч.изд.л. 0,8 Тираж 299 экз. Ц. I0 к.
Зак.тип.№ 0I3 Индекс 3649

Отпечатано в Ереванском физическом институте
Ереван 36, ул.Братьев Алиханян,2