



AM9800013

Препринт ФФИ-1337(32)-91

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ  
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
YEREVAN PHYSICS INSTITUTE



Ս.Լ.ՄԱՐՏԻՐՕՍՅԱՆ, Բ.Լ.ՍԵՏՐՕՍՅԱՆ, Վ.Տ.ՍՈՂՕՍՅԱՆ

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В ЗАКОСРЕМЕННОМ  
ТОРОИДАЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

29 - 42

ЦНИИАтоминформ

ЕРЕВАН - 1991

**We regret that  
some of the pages  
in this report may  
not be up to the  
proper legibility  
standards, even  
though the best  
possible copy was  
used for scanning**

**ՅՈՒՆԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ, Մ.Լ.ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ, Վ.Ս.ՊՈՂՈՍՅԱՆ**

**ՆՇԱՆԱՓՈՒ ԹՈՐՈՒԴԱՅԻՆ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ ԷԼԵԿՏՐՈՆՆԵՐԻ  
ՇԱՐՔՄԱՆ ՈՁ-ԳԾԱՑԻՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆՆԸ**

Աշխատանքում համիլտոնյան ֆորմալիզմի հիման վրա դիտարկվում է էլեկտրոնների ոչ-գծային դինամիկան ժամանակի ընթացքում չփոխվող նը-շանափոխ թորոդալ մագնիսական դաշտում: Բերվում են լայնական և երկայնական տատանումների հետազոտող կախված առանցքային (աքսիալ) անկյունից, ինչպես նաև փուլային (ֆազային) հետազոտողի տեսքը համապատասխան հարթություններում՝ համակարգի բնութագրիչ պարամետրերի տարբեր թվային արժեքների դեպքում: Ցույց է տրվում, որ առաջափնի մագնիսական դաշտը կարող է ծառայել որպես էլեկտրոնների տանող ճանապարհի ինդուկցիոն օղակածև արագացուցիչների համար էներգիայի փոփոխության լայն տիրույթում (մի քանի կիլոէլեկտրոնվոլտից մինչև մի քանի մեգաէլեկտրավոլտ): Անկայուն շարժման նեղ տիրույթները կիպ են դասավորված փոքր էներգիաների դեպքում: Նրանց կարելի է շրջանցել արագացնող համակարգում:

Երևանի ֆիզիկայի ինստիտուտ  
Երևանի 1991



## Введение

В последнее время в научной литературе по ускорительной физике часто обсуждается возможность применения тороидального магнитного поля для повышения интенсивности ускоряемых пучков.

В работах [1,2] предлагалось использовать постоянное во времени тороидальное поле в качестве магнитной дорожки кольцевого индукционного ускорителя на средних энергиях и накопителе, где вертикальный дрейф частиц подавляется при помощи пар магнитных квадрупольных линз, установленных периодически образцов по тору.

В работах [3,4] обсуждалась возможность применения знакопеременного тороидального магнитного поля в качестве магнитной дорожки в широком диапазоне изменений энергий ускоряемых пучков (от нескольких кэВ до нескольких МэВ). В такой системе вертикальный дрейф частиц, возникающий в отдельном участке, компенсируется обратным дрейфом в соседнем участке.

В работах [5,6] тороидальное магнитное поле применяется в модифицированном бетатроне вдобавок к полю обычного бетатрона на начальной стадии ускорения для существенного повышения ускоряемого тока.

В настоящей работе на основе Гамильтонова формализма рассматривается нелинейная динамика электронов в постоянном во времени знакопеременном тороидальном магнитном поле.

Пусть имеется  $N$  периодов магнитной дорожки, каждый длиной  $2l_0 = \frac{2\pi R_0}{N}$  состоящей из участков тороидальных магнитных полей, имеющих противоположные направления. Здесь  $R_0$  - большой радиус тора,  $l_0$  - длина одной катушки. Предположим концы тороидальных соленоидов расположены вплотную друг к другу.

Векторный потенциал магнитного поля такой конфигурации в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$  (ось  $z$  перпендикулярна меридиальной плоскости тора и проходит через его центр симметрии) в предположении  $l_0 \ll R_0$  можно представить в виде [7]

$$A_z(r, \theta, z) = -A_0 \frac{z}{\sqrt{(z-R)^2 + z^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} I_1\left(\frac{\alpha_k}{l_0} \sqrt{(z-R)^2 + z^2}\right) K_1\left(\alpha_k \cdot \frac{r_0}{l_0}\right) \times \\ \times \cos(2k+1)N\theta \quad (I)$$

$$A_z(r, \theta, z) = A_0 \frac{z-R}{\sqrt{(z-R)^2 + z^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} I_1\left(\frac{\alpha_k}{l_0} \sqrt{(z-R)^2 + z^2}\right) K_1\left(\alpha_k \cdot \frac{r_0}{l_0}\right) \times \\ \times \cos(2k+1)N\theta,$$

где  $I_1(x)$  и  $K_1(x)$  - модифицированные функции Бесселя первого порядка,  $J$  - ток в обмотках катушки,  $n$  - число витков на единицу длины,  $\alpha = 2 \cdot r_0$  - малый радиус тора,  $\alpha_k = \pi(2k+1)$ ,  $A_0 = J \cdot n \alpha / 2$ .

В отсутствие электрического поля функция Гамильтона, как известно, имеет вид

$$H = c \left[ \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + m_0^2 c^2 \right]^{1/2}, \quad (2)$$

где  $\vec{p}$  - вектор обобщенного импульса,  $m_0$  - масса покоя электрона,  $c$  - скорость света,  $\vec{A}$  - не зависящий от времени векторный потенциал, определяемый по формулам (1),  $e$  - заряд электрона.

Так как функция Гамильтона не зависит явным образом от времени, то она является интегралом движения и мы приравняем ее к полной энергии электрона.

После канонического преобразования переменных  $(z, \theta, z) \rightarrow (\rho, \theta, \varphi)$  ( $\rho$  и  $\varphi$  - полярные координаты в поперечном сечении тора)

$$z - R_0 = \rho \cos \varphi ; \quad P_z = P_\rho \cos \varphi - P_\varphi \sin \varphi \quad (3)$$

$$z = \rho \sin \varphi ; \quad P_z = P_\rho \sin \varphi + P_\varphi \cos \varphi$$

задачу можно привести к эквивалентной с более простой функцией Гамильтона

$$H(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + \frac{1}{2} [y_3 - v \cdot h(x_1, x_2)]^2, \quad (4)$$

где

$y_1 = P_\rho / p$  ,  $y_2 = P_\theta / p$  ,  $y_3 = P_\varphi / p$  - новые канонические импульсы  $x_1 = \rho / \rho_0$  ,  $x_2 = 2N\theta / \pi$  ,  $x_3 = \varphi$  - соответствующие им координаты,  $v = e \cdot A_0 / pc$  ,  $p$  - импульс электрона.

Так как новый гамильтониан не зависит от  $x_3 = \varphi$  , то соответствующий импульс

$$y_3 = \frac{m_0 \rho \dot{\varphi} + \nu h(x_1, x_2)}{\rho} = \text{const.}, \quad (5)$$

что является выражением теоремы Буша о сохранении момента импульса. Если выбрать начальные условия  $\dot{\varphi}_0 = 0$ ,  $X_{20} = \pm I$ , то получаем  $y_3 = 0$  и гамильтониан можно представить в стандартной форме с переменными "действие - угол".

$$H(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + \frac{\nu^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n h_k(x_1, x_2) \cdot h_{n-k}(x_1, x_2). \quad (6)$$

Как видно из (5), если инжекция частиц происходит в одной из плоскостей  $\Theta = \pm(2K + 1) \frac{\ell}{2R_0}$ ,  $K = 0, 1, 2, \dots$ , с нулевой составляющей вращательной скорости  $\dot{\varphi} = 0$  в этой плоскости, то и при своем дальнейшем движении электрон пересекает переходное поле примыкания соленоидов без вращательной составляющей скорости.

При помощи разложения функции Бесселя в ряд по степеням аргумента [8]

$$I_1(z) = \frac{z}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}}{m! \Gamma(m+2)}$$

можно нормализовать гамильтониан - представив его в виде

$$H = H_0 + H_2 + H_4 + \dots, \quad (7)$$

где  $H_0 = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2}$ ,

$$H_2 = X_1^2 \cdot \frac{\nu^2}{16} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^n K_1(\alpha_k X_0) \cdot K_1(\alpha_{n-k} X_0) C_{nk}(X_2)$$

$$H_4 = X_1^4 \cdot \frac{\nu^2}{64} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^n \alpha_{n-k}^2 K_1(\alpha_k X_0) \cdot K_1(\alpha_{n-k} X_0) C_{nk}(X_2)$$

$$H_6 = X_1^6 \cdot \frac{\nu^2}{256} \left[ \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^n \alpha_{n-k}^4 \cdot K_1(\alpha_k X_0) K_1(\alpha_{n-k} X_0) C_{nk}(X_2) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^n \alpha_k^2 \alpha_{n-k}^2 K_1(\alpha_k X_0) K_1(\alpha_{n-k} X_0) C_{nk}(X_2) \right] \quad (8)$$

$$C_{nk}(X_2) = \cos(2k+1)N \cdot \theta \cdot \cos[2(n-k)+1]N\theta ; \quad X_0 = \beta_0 / l_0 .$$

Учет членов до квадратичного гамильтониана включительно в разложении (7) приводит нас из канонических уравнений

$$\frac{dx_i}{dz} = - \frac{\partial H}{\partial y_i} ; \quad \frac{dy_i}{dz} = \frac{\partial H}{\partial x_i} ; \quad i = 1, 2 \quad (9)$$

к уравнению Хилла по отношению к  $X_1$

$$\ddot{X}_1 + \nu^2 \left[ \alpha_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m(X_0) \cdot \cos 2mX_2 \right] X_1 = 0 ; \quad X_2 = \gamma_{20} \tau + X_{20} \quad (10)$$

где точка над буквой означает дифференцирование по безразмерной переменной  $\tau = 2ct / l_0$ , решение которого пишется при помощи функции Флокье.

Точки неустойчивого движения линейного приближения [4] в

действительности представляют узкие полосы, которые начинаются в точках

$$2\nu^2 \alpha_0 = k^2; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (II)$$

на положительной полуоси  $\alpha_0$ .

Для коэффициентов  $\alpha_m$  Фурье-разложения уравнения (9) из (8) можно получить следующие выражения

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2} [K_1^2(\pi x_0) + K_2^2(3\pi x_0) + K_1^2(5\pi x_0)], \\ \alpha_1 &= \frac{1}{2} K_1^2(\pi x_0) - K_1(\pi x_0) K_1(3\pi x_0) - K_1(3\pi x_0) \cdot K_1(5\pi x_0), \\ \alpha_2 &= K_1(\pi x_0) [K_1(5\pi x_0) - K_1(3\pi x_0)], \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2} K_1^2(3\pi x_0) + K_1(\pi x_0) \cdot K_1(5\pi x_0), \\ \alpha_4 &= -K_1(3\pi x_0) \cdot K_1(5\pi x_0), \\ \alpha_5 &= \frac{1}{2} K_1^2(5\pi x_0). \end{aligned} \quad (I2)$$

Как видно из (I2),  $\alpha_0 > \alpha_1$  и движение почти всегда устойчиво. Однако уже при  $x_0 = 2$  (т.е. длина катушки становится равной ее диаметру)  $\alpha_0 \approx \alpha_1$ , и величины "островков" неустойчивого движения становятся большими и мы приближаемся к зоне неустойчивости.

Находя решение уравнения (I0) методом усреднения или Хилла после соответствующего канонического преобразования, с использованием следующего члена разложения (7) можно найти решение кано-

нических уравнений (9) высокого порядка точности. Эти преобразования и окончательные результаты довольно громоздки, трудно поддаются оценки и контролю.

Однако заключения о характере решений системы уравнений (9) можно сделать и без решения этих уравнений.

Так как в нормализованном гамильтониане (7) квадратичная часть является знакоопределенной функцией, то взяв ее в качестве функции Ляпунова, на основании теоремы Мозера [9] можно прийти к выводу, что условия устойчивого движения

$$2\nu^2 \alpha_0 \neq k^2; \quad \alpha_0 > \alpha_1; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

достаточны для существования устойчивых по смыслу Ляпунова решений точных уравнений (9).

На рис.1 приводятся графики зависимостей радиальных колебаний (вертикальные колебания отличаются от радиальных сдвигом фаз на  $\approx \pi/2$ ) от безразмерного времени  $\tau$ , при значении характерного параметра  $\nu = 0,04; 1,4; 10,4$  численным интегрированием канонических уравнений на ЭВМ.

На рис.2 приводится зависимость продольных колебаний от  $\tau$  при тех же значениях параметров. При напряженности магнитного поля в центре катушки  $H_0 = 1500$  эрст. (для теплых магнитов),

$R_0 = 150$  см,  $a = 4$  см,  $N = 30$  (длина одной катушки равна  $\approx 15$  см), значению  $\nu = 0,04$  соответствует кинетическая энергия электронов  $E_k \approx 6$  МэВ, а значению  $\nu = 10,4$  - кинетическая энергия  $E_k \approx 10$  кэВ. Во всех случаях для начальных координат и скоростей принимаются практические значения

$$z_0 R_0 \approx 0,1 \text{ см}; \quad z_0 \approx 0,1 \text{ см}; \quad v_{0z} \approx v_{0z} \approx 10^{-2} v_{00}.$$

Как видно из рис.1 и рис.3 при увеличении энергии электрона от 10 кэВ до 1 МэВ (релятивистских скоростей) сначала происходит сжатие эллипсов по импульсам, а при дальнейшем увеличении энергии в релятивистской области происходит растяжение эллипсов по обеим осям.

Как видно из рис.2, монотонному росту продольного движения (10) налагаются периодические колебания малой амплитуды. При увеличении начальных поперечных скоростей до значений  $V_{\text{поп}} \approx V_{\text{пр}} \cdot \gamma^{-1}$  амплитуды этих колебаний становятся большими и краевое переходное поле катушек может играть роль магнитной ловушки.

Ограничения на максимальную достижимую энергию электронов получаются величиной вертикального дрейфа в пределах одного элемента периодичности. Применением сверхпроводящих соленоидов можно несколько сот раз увеличить напряженность магнитного поля, тем самым существенно повысить энергию ускоряемых пучков.

На рис.3 приведены фазовые траектории поперечных колебаний для тех же значений параметров системы.

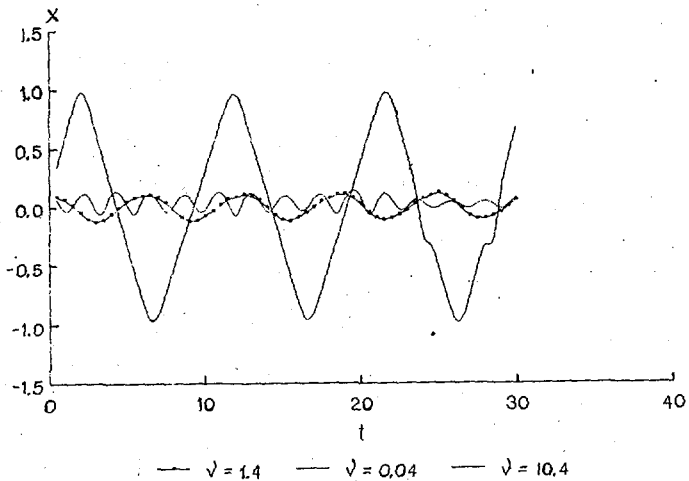


Рис.1 Траектории радиальных колебаний электронов в знакопеременном тороидальном магнитном поле. Численные значения параметров приведены в тексте.

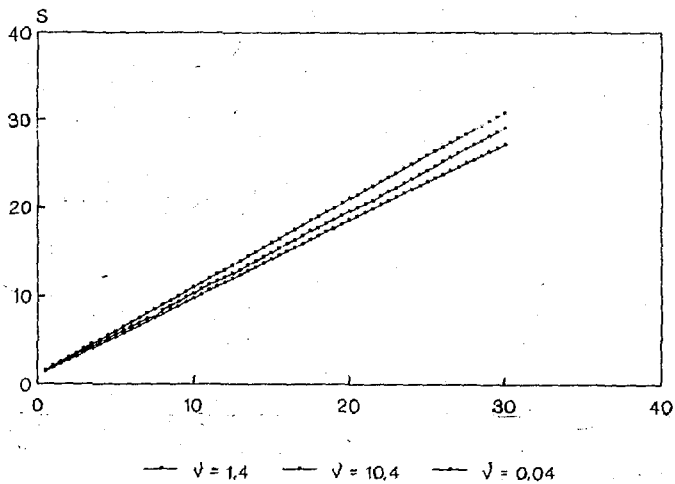


Рис.2 Траектории продольных колебаний электронов в знакопеременном тороидальном магнитном поле. Численные значения параметров приведены в тексте.

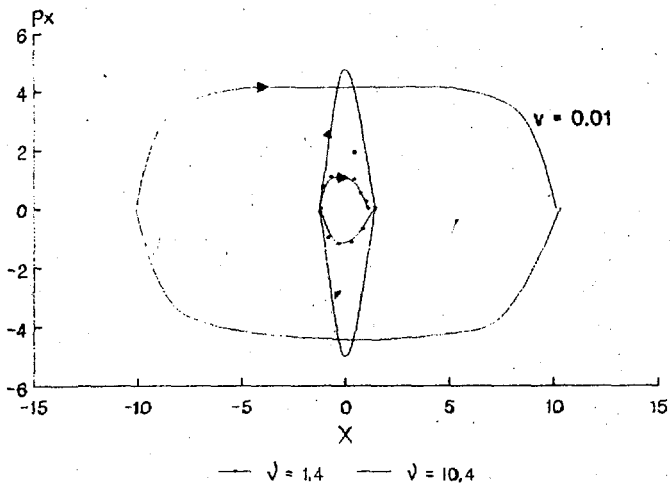


Рис.3 фазовые траектории радиального движения электронов в знакопеременном тороидальном магнитном поле. Численные значения характерных параметров системы приведены в тексте

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мартиросян В.Л., Петросян В.Л. Препринт ЕФН-414(21)-80.
2. Акопов М.А., Мартиросян В.Л., Петросян В.Л. Авт.св.№768378  
БН, 1982, № 41, 275 с.
3. Дербенев Н.С., Мартиросян В.Л., Петросян В.Л. МФ, т.59, в.8,  
1989.
4. Мартиросян В.Л. МФ, т.60, в.8, 1990.
5. Rostoker N. Bull. APS, 1980, V.25, p.854.
6. Barak G. et al. IEEE Trans. Nucl. Sci., 1981, V.NS-28, N.3,  
p.792-798.
7. Справочник по специальным функциям (Под ред. М.Абрамовица)  
И.Н.Стиган, М.: Наука, 1979.
8. Джакаля Г.Е.О. Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979.

Рукопись поступила 22 мая 1991 г.

А.Л. АРТИРОСЯН, М.А. НЕГРОСЯН, В.С. ПОГОСЯН

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В ЗНАКОПЕРЕМЕННОМ  
ТОРОИДАЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Редактор Л.П. Мукаян

Технический редактор А.С. Абрамян

---

Подписано в печать 25/III-91г.

Формат 60x84/16

Офсетная печать. Уч. изд. л. 0,5

Тираж 299 экз. Ц. 8 к.

Зак. тип. № 194

Индекс 3649

---

Отпечатано в Ереванском физическом институте

Ереван 36, ул. братьев Аликханян, 2

The address for requests:  
Information Department  
Yerevan Physics Institute  
Alikhanian Brothers 2,  
Yerevan, 375036  
Armenia, USSR

ИНДЕКС 3649



ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ