ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ԳԻՏԱԿԱՆ ՀԱՂՈՐԴՈՒՄ НАУЧНОЕ СООБЩЕНИЕ

ЕФИ—134(75)

М.Б.БАГДАСАРЯН, Л.И.ДОРМАН

НЕСТАЦИОНАРНАЯ МОДУЛЯЦИЯ ГАЛАКТИЧЕСКИХ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ СОЛНЕЧНЫМ ВЕТРОМ СФЕРИЧЕСКИ РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

ԵՐԵՎԱՆ 1975 ЕРЕВАН

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Научное сообщение ЕФИ- 134 (75)

М.Б.БАГДАСАРЯН, Л. И.ДОРМАН

НЕСТАЦИОНАРНАЯ МОДУЛЯЦИЯ ГАЛАКТИЧЕСКИХ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ СОЛНЕЧНЫМ ВЕТРОМ СФЕРИЧЕСКИ РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ (ИЗОТРОПНАЯ ДИФФУЗИЯ С УЧЕТОМ КОНВЕКЦИИ И АДИАБАТИЧЕСКОГО ОХЛАЖДЕНИЯ И С УЧЕТОМ УСЛОВИЙ НА ДВУХ ДВИЖУЩИХСЯ ГРАНИЦАХ)

Ереван 1975

Уравнение диффузии в сферически-симметричном случае получено в работе [1] и для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\frac{\partial n}{\partial t}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(-r^2\frac{2}{3}un+r^2\varkappa\frac{\partial n}{\partial r}\right)-\frac{2}{3}\frac{u}{r}\frac{\partial}{\partial R}(nR)=0, \quad (1)$$

Здесь $\varkappa$ – коэффициент диффузии, R – жесткость частиц, u – дрейфовая скорость космических лучей.

Это уравнение надо решить для трёх областей с различными коэффициентами диффузии и с движущимися границами, т.е. со следующими граничными условиями (см. рисунок):

$$n_1(r)\Big|_{r=0}<\infty \quad (2)$$

$$n_1(r)\Big|_{r=r_1(t)}=n_2(r)\Big|_{r=r_1(t)}, \quad (3)$$

$$\varkappa_1\frac{\partial n_1}{\partial r}\Big|_{r=r_1(t)}=\varkappa_2\frac{\partial n_2}{\partial r}\Big|_{r=r_1(t)}, \quad (4)$$

$$n_2(r)_{r=r_2}=n_3(r)_{r=r_2}, \quad (5)$$

$$\varkappa_2 \frac{\partial n_2}{\partial r}\Bigg|_{r=r_2(t)} = \varkappa_1 \frac{\partial n_3}{\partial r}\Bigg|_{r=r_2} , \tag{6}$$

$$n_3\Big|_{r\to\infty} = n_0 \quad . \tag{7}$$

Производя дифференцирование (1) и считая, что [1]

$$n_0 = K R^{-\gamma} \quad , \tag{8}$$

где K и γ постоянные и

$$n = n_0(R) f(r,t) \quad , \tag{9}$$

получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \varkappa \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \left(\frac{2}{3}u - \frac{\partial \varkappa}{\partial r} - \frac{2\varkappa}{r}\right)\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{2}{3}u(1+\gamma)\frac{f}{r} = 0 . \tag{10}$$

В предположении пропорциональной зависимости коэффициента диффузии от r

$$\varkappa = \beta r \; , \tag{11}$$

коэффициент при $\frac{\partial f}{\partial r}$ обращается в константу. Обозначим его через $-b$

$$\frac{2}{3}u - \frac{\partial \varkappa}{\partial r} - \frac{2\varkappa}{r} = -b \, . \tag{12}$$

Тогда из (11) и (12) имеем

$$\beta = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}u + b\right) \tag{13}$$

и уравнение (10) приобретает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \beta \tau \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} - b \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{2}{3} u (1+\gamma) \frac{f}{\tau} = 0 . \qquad (14)$$

(Здесь b может зависеть от R и тогда решение уравнения (8) будет зависеть от R параметрически). Решение этого уравнения сопряжено с определенными трудностями при определении констант, так как граничные условия зависят от времени [2].

Во избежание этих трудностей преобразуем уравнение (14) так, чтобы граничные условия (2)-(7) перестали зависеть от времени. Для этого воспользуемся свойством инвариантности его по отношению к преобразованиям $t' = \ell t$, $\tau' = \ell \tau$, где ℓ может быть любым. Поэтому, полагая $\ell = \frac{1}{t}$ и обозначая

$$z = \frac{\tau}{t} \qquad (15)$$

получим, что $f(\tau, t)$ зависит только от z

$$f\left(\frac{\tau}{t}, 1\right) = f(z, 1) \equiv \varphi(z) . \qquad (16)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \tau} &= \frac{1}{t} \frac{d\varphi}{dz} , \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} &= \frac{1}{t^2} \frac{d^2\varphi}{dz^2} , \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{df}{dz} = -\frac{\tau}{t^2} \frac{d\varphi}{dz} . \end{aligned} \qquad (17)$$

После этих преобразований уравнения и граничные условия в соответствующих областях будут:

$$z^2\frac{d^2\varphi_1}{dz^2}+\left(\frac{z}{\beta_1}+\frac{b}{\beta_1}\right)z\frac{d\varphi_1}{dz}-\frac{2}{3}\frac{u}{\beta_1}(1+\gamma)\varphi_1=0,\ (0\le z\le z_1), \tag{18}$$

$$z^2\frac{d^2\varphi_2}{dz^2}+\left(\frac{z}{\beta_2}+\frac{b}{\beta_2}\right)z\frac{d\varphi_2}{dz}-\frac{2}{3}\frac{u}{\beta_2}(1+\gamma)\varphi_2=0,\ (z_1\le z\le z_2), \tag{19}$$

$$z^2\frac{d^2\varphi_3}{dz^2}+\left(\frac{z}{\beta_1}+\frac{b}{\beta_1}\right)z\frac{d\varphi_3}{dz}-\frac{2}{3}\frac{u}{\beta_1}(1+\gamma)\varphi_3=0.\ (z_2\le z<\infty), \tag{20}$$

$$\varphi_1(z)\Big|_{z=0}<\infty \tag{21}$$

$$(\varphi_1-\varphi_2)\Big|_{z=z_1}=0\ , \tag{22}$$

$$\left(\beta_1\frac{d\varphi}{dz}-\beta_2\frac{d\varphi_2}{dt}\right)\Big|_{z=z_1}=0\ . \tag{23}$$

$$(\varphi_2-\varphi_3)\Big|_{z=z_2}=0\ , \tag{24}$$

$$\left(\beta_2\frac{d\varphi_2}{dz}-\beta_1\frac{d\varphi_3}{dz}\right)\Big|_{z=z_2}=0\ . \tag{25}$$

$$\varphi_3\Big|_{z\to\infty}=1\ , \tag{26}$$

где из (15) имеем $z_1=V,\ \ z_2=\lambda V$

Решения уравнений (18)-(20) имеют вид [3]

$$\varphi_i(z) = C_i\left(\frac{z}{\beta_i}\right)^{1/2+m_i+k_i} {}_1F_1\left(1/2+m_i-k_i,\, 2m_i+1;\, \frac{z}{\beta}\right)e^{-\frac{z}{\beta_i}} +$$

$$+ C_i'\left(\frac{z}{\beta_i}\right)^{1/2-m_i+k_i} {}_1F_1\left(1/2-m_i-k_i,\, 1-2m_i;\, \frac{z}{\beta_i}\right)e^{-\frac{z}{\beta_i}}, \qquad (27)$$

где

$$m_i = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{b}{\beta_i}-1\right)^2+\frac{8}{3}\,\frac{u}{\beta_i}(1+\gamma)}, \qquad (28)$$

$$k_i = -\frac{b}{2\beta_i}, \qquad (29)$$

$$\frac{b}{\beta_i} = 3 - \frac{2}{3}\,\frac{u}{\beta_i}, \qquad (30)$$

${}_1F_1(a, b; z)$ - вырожденная гипергеометрическая функция.

Из условия (21) следует, что $C_1' = 0$, так как $1/2 - m_i + k_i < 0$, и решения (27) будут

$$\varphi_1(z) = C_1\left(\frac{z}{\beta_1}\right)^{1/2+m_1+k_1} {}_1F_1\left(1/2+m_1-k_1,\, 2m_1+1;\, \frac{z}{\beta_1}\right)e^{-\frac{z}{\beta_1}}, \quad (0 \le z \le z_1), \qquad (31)$$

$$\varphi_2(z) = C_2\left(\frac{z}{\beta_2}\right)^{1/2+m_2+k_2} {}_1F_1\left(1/2+m_2-k_2,\, 2m_2+1;\, \frac{z}{\beta_2}\right)e^{-\frac{z}{\beta_2}} +$$

$$+ C_2'\left(\frac{z}{\beta_2}\right)^{1/2-m_2+k_2} {}_1F_1\left(1/2-m_2-k_2,\, 1-2m_2;\, \frac{z}{\beta_2}\right)e^{-\frac{z}{\beta_2}}, \quad (z \le z \le z_2), \qquad (32)$$

$$\varphi_3(z)=C_3\left(\frac{z}{\beta_1}\right)^{1/2+m_1+k_1}{}_1F_1\left(1/2+m_1-k_1,\ 2m_1+1;\ \frac{z}{\beta_1}\right)e^{-\frac{z}{\beta_1}}+$$

$$+C_3'\left(\frac{z}{\beta_1}\right)^{1/2-m_1+k}{}_1F_1\left(1/2-m_1-k_1,\ 1-2m_1;\ \frac{z}{\beta_1}\right)e^{-\frac{z}{\beta_1}};\ (z_2\le z<\infty). \tag{33}$$

Исходя из граничных условий (22)–(26), определим неопределенные коэффициенты $C_1, C_2, C_2', C_3, C_3'$. Для короткой записи введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
a_i &= 1/2+m_i+k_i, & A_z^{(i)} &= {}_1F_1\left(d_i, s_i; \frac{z}{\beta_i}\right),\\
b_i &= 1/2-m_i+k_i, & B_z^{(i)} &= {}_1F_1\left(\ell_i, i_i; \frac{z}{\beta_i}\right),\\
d_i &= 1/2+m_i-k_i, & {}_1A_z^{(i)} &= {}_1F_1\left(d_i+1, s_i+1; \frac{z}{\beta_i}\right),\\
\ell_i &= 1/2-m_i-k_i, & {}_1B_z^{(i)} &= {}_1F_1\left(\ell_i+1, i_i+1; \frac{z}{\beta_i}\right), \qquad (34)\\
s_i &= 2m_i+1, & \frac{dA_z^i}{dz} &= \frac{d_i}{s_i}\,{}_1A_z^{(i)}\,\frac{z}{\beta_i},\\
i_i &= 1-2m_i, & \frac{dB_z}{dz} &= \frac{\ell_i}{i_i}\,{}_1B_z^{(i)}\,\frac{1}{\beta_i}
\end{aligned}$$

где $i = 1,2$

В этих обозначениях уравнения для констант будут:

$$e^{-\frac{v}{\beta_1}}C_1\left(\frac{v}{\beta_1}\right)^{a_1}A_v^{(1)}-C_2\left(\frac{v}{\beta_2}\right)^{a_2}e^{-\frac{v}{\beta_2}}A_v^{(2)}-C_2'\left(\frac{v}{\beta_2}\right)^{b_2}e^{-\frac{v}{\beta_2}}B_v^{(2)}=0; \tag{35}$$

$$\beta_1C_1\left[\frac{a_1}{\beta_1 a_1}v^{a_1-1}A_v^{(1)}+\left(\frac{v}{\beta_1}\right)^{a_1}\frac{d_1}{s_1}\,{}_1A_v^{(1)}\frac{1}{\beta_1}-\left(\frac{v}{\beta_1}\right)^{a_1}\frac{A_v^{(1)}}{\beta_1}\right]e^{-\frac{v}{\beta_1}}-$$

$$-\beta_2C_2\left[\frac{a_2}{\beta_2 a_2}v^{a_2-1}A_v^{(2)}+\left(\frac{v}{\beta_2}\right)^{a_2}\frac{d_2}{s_2}\,{}_1A_v^{(2)}\frac{1}{\beta_2}-\left(\frac{v}{\beta_2}\right)^{a_2}\frac{A_v^{(2)}}{\beta_2}\right]e^{-\frac{v}{\beta_2}}-$$

$$-\beta_2 C_2'\left[\frac{b_2}{\beta_2 b_2} v^{b_2-1} B_v^{(2)} + \left(\frac{v}{\beta_2}\right)^{b_2} \frac{b_2}{i_2}\, \frac{{}_1B_v^{(2)}}{\beta_2} - \left(\frac{v}{\beta_2}\right)^{b_2} \frac{B_v^{(2)}}{\beta_2}\right] e^{-\frac{v}{\beta_2}} = 0; \tag{36}$$

$$\left[C_2\left(\frac{\alpha v}{\beta_2}\right)^{a_2} A_{2v}^{(2)} + C_2'\left(\frac{\alpha v}{\beta_2}\right)^{b_2} B_{2v}^{(2)}\right] e^{-\frac{2v}{\beta_2}} -$$

$$-\left[C_3\left(\frac{\alpha v}{\beta_1}\right)^{a_1} A_{\alpha v}^{(1)} + C_3'\left(\frac{\alpha v}{\beta_1}\right)^{b_1} B_{\alpha v}^{(1)}\right] e^{-\frac{\alpha v}{\beta_1}} = 0; \tag{37}$$

$$\beta_2 C_2\left[\frac{a_2}{\beta_2 a_2}(\alpha v)^{a_2-1} A_{\alpha v}^{(2)} + \left(\frac{\alpha v}{\beta_2}\right)^{a_2} \frac{d_2}{s_2}\, \frac{{}_1A_{\alpha v}^{(2)}}{\beta_2} - \left(\frac{2v}{\beta_2}\right)^{a_2} \frac{A_{\alpha v}^{(2)}}{\beta_2}\right] e^{-\frac{\alpha v}{\beta_2}} +$$

$$+\beta_2 C_2'\left[\frac{b_2}{\beta_2 b_2}(\alpha v)^{b_2-1} B_{\alpha v}^{(2)} + \left(\frac{\alpha v}{\beta_2}\right)^{b_2} \frac{b_2}{i_2}\, \frac{{}_1B_{\alpha v}^{(2)}}{\beta_2} - \left(\frac{\alpha v}{\beta_2}\right)^{b_2} \frac{B_{\alpha v}^{(2)}}{\beta_2}\right] e^{-\frac{\alpha v}{\beta_2}} -$$

$$-\beta_1 C_3\left[\frac{a_1}{\beta_1 a_1}(\alpha v)^{a_1-1} A_{\alpha v}^{(1)} + \left(\frac{\alpha v}{\beta_1}\right)^{a_1} \frac{d_1}{s_1}\, \frac{{}_1A_{\alpha v}^{(1)}}{\beta_1} - \left(\frac{\alpha v}{\beta_1}\right)^{a_1} \frac{A_{\alpha v}^{(1)}}{\beta_1}\right] e^{-\frac{\alpha v}{\beta}} -$$

$$-\beta_1 C_3'\left[\frac{b_1}{\beta_1 b_1}(\alpha v)^{b_1-1} B_{\alpha v}^{(1)} + \left(\frac{\alpha v}{\beta_1}\right)^{b_1} \frac{l_1}{i_1}\, \frac{{}_1B_{\alpha v}^{(1)}}{\beta_1} - \left(\frac{\alpha v}{\beta_1}\right)^{b_1} \frac{{}_1B_{\alpha v}^{(1)}}{\beta_1}\right] e^{-\frac{\alpha v}{\beta_1}} = 0; \tag{38}$$

$$C_3 \frac{\Gamma(s_1)}{\Gamma(d_1)} + C_3' \frac{\Gamma(i_1)}{\Gamma(l_1)} = 1. \tag{39}$$

При получении (39) было использовано асимптотическое выражение для функции ${}_1F_1$ [4] . В этом случае $\Psi_3(z)$ при $z \to \infty$ обращается в константу, так как: $d_1 - s_1 = -a_1$ и $l_1 - i_1 = -b_1$; .

Перепишем уравнения (35)-(39) в следующем виде:

$$M_1 C_1 - M_2 C_2 - N_2 C_2' = 0,$$

$$
\begin{aligned}
&M_1^{*} C_1 - M_2^{*} C_2 - \mathcal{N}_2^{*} C_2' = 0\,,\\
&M_2^{\alpha} C_2 + \mathcal{N}_2^{\alpha} C_2' - M_1^{\alpha} C_3 - \mathcal{N}_1^{\alpha} C_3 = 0\,,\\
&M_2^{*\alpha} C_2 + \mathcal{N}_2^{*\alpha} C_2' - M_1^{*\alpha} C_3 - \mathcal{N}_1^{*\alpha} C_3' = 0\,,\\
&M C_3 + \mathcal{N} C_3' = 1
\end{aligned}
\qquad (40)
$$

Смысл новых обозначений ясен из сравнения системы (40) с (35)-(39):
Решая (40), имеем:

$$
\left.
\begin{aligned}
&C_1 = \frac{M_2 \bar{M} + \mathcal{N}_2}{M_1 M} \frac{\Delta_1}{\Delta}\,; \quad C_2 = \frac{\bar{M}}{M} \frac{\Delta_1}{\Delta}\,; C_2' = \frac{\Delta_1}{\Delta}\,;\\
&C_3 = \frac{1}{M} \left(1 - \mathcal{N} \frac{\Delta_2}{\Delta}\right); \quad C_3' = \frac{\Delta_2}{\Delta}\,;
\end{aligned}
\right\}. \qquad (41)
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
&\Delta_1 = M_1^{\alpha}\left(M_1^{*\alpha} \mathcal{N} - M \mathcal{N}_1^{*\alpha}\right) - M_1^{*\alpha}\left(M_1^{\alpha} \mathcal{N} - M \mathcal{N}_1^{2}\right),\\
&\Delta_2 = M_1^{*\alpha}\left(M_2^{\alpha} \bar{M} + \mathcal{N}_2^{\alpha}\right) - M_1^{\alpha}\left(M_2^{*\alpha} \bar{M} + \mathcal{N}_2^{*\alpha}\right),\\
&\Delta = \left(M_2^{\alpha} \bar{M} + \mathcal{N}_2^{\alpha}\right)\left(M_1^{*\alpha} \mathcal{N} - M \mathcal{N}_1^{*\alpha}\right) - \left(M_2^{*\alpha} \bar{M} + \mathcal{N}_2^{*\alpha}\right)\left(M_1^{\alpha} \mathcal{N} - M \mathcal{N}_1^{2}\right),\\
&\bar{M} = \frac{M_1 \mathcal{N}_2^{*} - M_1^{*} \mathcal{N}_2}{M_1^{*} M_2 - M_1 M_2^{*}}\,.
\end{aligned}
$$

Таким образом, формулы (31)-(33) с (41) решают поставленную задачу. Численные результаты по расчётам на ЭВМ на основе указанных формул и сопоставление с экспериментальными данными будут даны в другом месте.

В заключение авторы выражают благодарность проф. Матиняну С.Г. за обсуждения и Мелкумян Л.Г. за помощь в работе.

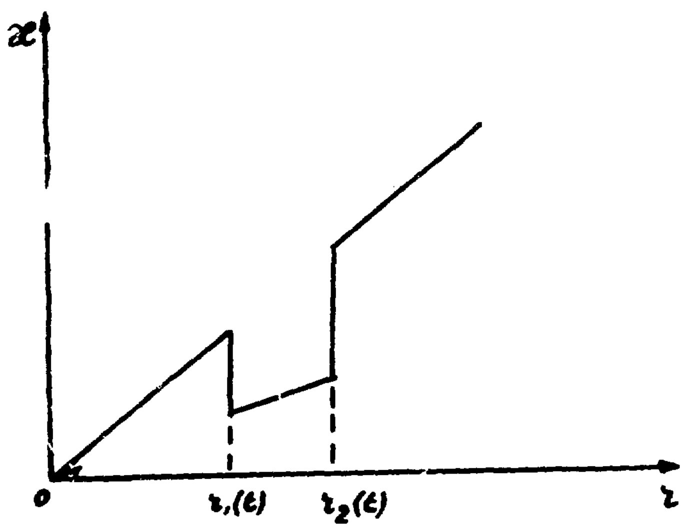

Рис.1

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.И.Дорман. Модуляция космических лучей в межпланетном пространстве, "Космические лучи", сборник статей 8, Москва, (1966).

2. А.Н. Тихонов, А.А.Самарский. Уравнение математической физики, Москва, (1966).

3. Э.Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Москва, (1971).

4. Э.Янке, Ф.Эмде, Ф.Леш. Специальные функции. Москва, (1968).

Рукопись поступила 14-го августа 1975 г.

Редактор Л.П.Мукаян
Тех.редактор А.С.Абрамян

Заказ 305 ВФ- 03399 Тираж 299

Подписано к печати 29/УШ-75г. Формат издания 30х40

0,7 уч.изд.л. Ц. 5 к.

Отпечатано на ротапринте
Ереванского физического института, Ереван-36, пер.
Маркаряна 2.