AM9800005

Препринт ЕФИ-1340(35)-91

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
YEREVAN PHYSICS INSTITUTE

Д.Р. КАРАХАНЯН

# ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ ДВУХМЕРНЫХ ФЕРМИОНОВ В СВЕТОПОДОБНОЙ КАЛИБРОВКЕ

29 - 16

ЦНИИатоминформ
ЕРЕВАН - 1991

We regret that
some of the pages
in this report may
not be up to the
proper legibility
standards, even
though the best
possible copy was
used for scanning

Նախնատիպ ԵրՖԻ-1340(35)-91

Դ.Ռ.ԿԱՐԱԽԱՆՅԱՆ

# ԵՐԿՉԱՓ ՖԵՐՄԻՈՆՆԵՐԻ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆԸ ԼՈՒՍԱՆՄԱՆ ՏՐԱՄԱՉԱՓԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆ ՓԻՔՍԵԼՈՒ ԴԵՊՔՈՒՄ

Պոլյակովի հայտնի գործողությունը երկչափ մակածված գրավիտացիայի համար՝ լուսանման տրամաչափման դեպքում, ստացված է վերջավորչափանի խմբերին պատկանող կիրալ դաշտերի հանրահաշվի օգտագործման նոր եղանակով: Այս մոտեցումը պարզաբանում է հոսանքային SL(2,R) խմբի ծագման եղանակը երկչափ գրավիտացիայի տեսության մեջ:

Երևանի Ֆիզիկայի ինստիտուտ

Երևան 1991

Индуцированная двухмерная гравитация возникает [1] в качестве эффективного действия при квантовании теории безмассовых частиц, взаимодействующих с двухмерной гравитацией.

Причем свойства теории, индуцированной квантовыми флуктуациями этих частиц, не зависят от их статистики и других квантовых чисел, а определяются лишь видом взаимодействия – от числа степеней свободы зависит лишь общий коэффициент перед действием индуцированной теории. Это утверждение составляет суть гипотезы универсальности, которая, хотя до сих пор строго не доказана, не противоречит основным принципам квантовой теории поля и, кажется не вызывает сомнений.

В этой статье мы воспроизведем действие Полякова [2], вычисляя фукциональный интеграл по фермионным степеням свободы в теории двухмерных фермионов, взаимодействующих с гравитацией непосредственно в светоподобной калибровке.

Действие этой теории:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\Sigma} d^2\xi\sqrt{g}e^{\alpha}_{a}(\bar{\psi}\sigma^{a}\partial_{\alpha}\psi-\partial_{\alpha}\bar{\psi}\sigma^{a}\psi) \quad (1)$$

на классическом уровне обладает четырехпараметрической группой симметрии. Однако квантовые флуктуации приводят к несовместимости этих симметрий друг с другом.

Как известно, наличие в нашем случае смешанной гравитационной аномалии приводит к тому, что на квантовом уровне "выживает" лишь двухпараметрическая группа симметрии [3].

Обычно при квантовании сохраняют общекоординатную инвариантность, фиксируя конформную калибровку, жертвуя вейлевской и локальной лоренцевской симметриями.

Мы вычислим эффективное действие для киральных фермионов в случае, когда калибровочное условие фиксирует вейлевскую симметрию и половину общекоординатной.

В соответствии с симметриями действия (1), тетрады удобно параметризовать в виде:

$$e^{a}_{\alpha}(\xi)=\rho^{1/2}(\xi)\partial_{\alpha}f^{A}(\xi)\mathring{e}^{b}_{A}(\xi)\lambda^{a}_{\cdot b}(\xi) \tag{2}$$

здесь so(2)-матрица $\lambda^{a}_{\cdot b}$ параметризует лоренц-вращения в касательной, к двухмерному многообразию $\Sigma$, плоскости, функции $f^{\pm}(\xi)$ имеют смысл дифференциалов Бельтрами поверхности, поскольку, удовлетворяют уравнениям:

$$\left(g^{\alpha\beta}\pm\frac{\varepsilon^{\alpha\beta}}{\sqrt{g}}\right)\partial_{\beta}f^{\pm}=0 \tag{3}$$

матрица $\mathring{e}^{a}_{A}(\xi)$, зависящая от модулей поверхности и соответствующая метрике постоянной кривизны, в дальнейшем для простоты положена равной единице.

Таким образом, мы отвлекаемся от усложнений, связанных с учетом топологии поверхности как в (2), так и при вычислении детерминанта (пренебрегаем возможностью существования нормируемых нулевых мод).

Конформная калибровка фиксируется наложением условий:

$$
\begin{aligned}
f^{+}(\xi) &= \xi^{+}/\sqrt{2} \\
f^{-}(\xi) &= \xi^{-}/\sqrt{2}
\end{aligned} \tag{4}
$$

Эффективное действие в этом случае определяется суммой лоренцевской и конформной аномалиями

$$
W=\frac{1}{192\pi}\int d^2\xi\,\partial_a \log\rho\,\partial_a \log\rho+\frac{1}{8\pi}\int d^2\xi\,R\sqrt{g}\,\alpha(\xi) \tag{5}
$$

где $\alpha(\xi)$ - угол поворота в касательной плоскости, а первое слагаемое - известное действие Лиувилля.

Нас интересует случай, когда репараметризационная симметрия фиксирована наполовину, а вейлевская - целиком:

$$
\begin{aligned}
& f^{+}(\xi)=\xi^{+}/2 \\
& \rho(\xi)=\frac{1}{\partial_{-} f^{-}(\xi)} \qquad \text{или} \qquad \sqrt{g}=\rho\det|\partial_{\alpha} f^{a}|=\frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{6}
$$

Эффективное действие, помимо второго слагаемого в (5), определяющего лоренцевскую аномалию, будет содержать также слагаемое, выражающееся через функцию $f^{-}(\xi)$ и определяющее общекоординатную аномалию. Калибровочное условие (6) полностью исключает из действия (1) зависимость от $\rho$ и $f^{+}$, а используемая при вычислении детерминанта регуляризация по собственному времени не деформирует оператор Дирака и его собственные функции поэтому эффективное действие от этих полей не зависит и может считаться вычисленным в регуляризации, сохраняющей вейлевскую симметрию и половину репараметризационной

Калибровка (6) соответствует следующему виду метрики

$$ds^2=d\xi^+d\xi^-+h_{++}(\xi)(d\xi^+)^2 \tag{7}$$

и действия (1):

$$S=i\int d^2\xi\left[\bar\psi_L\lambda^{-1}(\partial_-f^-)^{3/4}\sigma^+[\partial_+-h_{++}\partial_-](\partial_-f^-)^{-1/4}\lambda\psi_L+\right.$$
$$\left.+\bar\psi_R\lambda^{-1}(\partial_-f^-)^{-1/4}\sigma^-\partial_-(\partial_-f^-)^{-1/4}\lambda\psi_R\right] \tag{8}$$

где матрица $\lambda(\xi)$, вращающая матрицы Паули $\sigma^a$, определяет спинорное представление $\lambda^a_{\cdot b}$ из (2):

$$\sigma^b\lambda^a_{\cdot b}=\lambda^{-1}(\xi)\sigma^a\lambda(\xi) \tag{9}$$

Эффективное действие левых фермионов, равное детерминанту оператора $D_L$, определим:

$$\delta W_L=\lim_{\varepsilon\to 0}\ \mathrm{F.P.}\int_\varepsilon^\infty ds\,\mathrm{Tr}[\delta D_L D_R\exp(-sD_L D_R)] \tag{10}$$

Чтобы воспользоваться этой формулой, оператор $D_L$ необходимо представить в таком виде, чтобы:

$$\delta D_L=AD_L+D_L B \tag{11}$$

именно для этого и фиксируется конформная калибровка, в которой оператор $D_L$ содержит только производную $\partial_+$.

Чтобы обойти эту трудность, мы прибегнем к следующему трюку - введем нелокальный оператор

$$h=\exp[\beta(\xi)\partial_-]\in \mathrm{Diff}\ S^1 \tag{12}$$

такой, что
$$h^{-1}\partial_+h=-h_{++}\partial_- \tag{13}$$

тогда для вариации легко получить

$$h^{-1}h=\frac{\delta f^-}{\partial_- f^-}\,\partial_- \qquad (14)$$

В таком подходе оператор $D_L$ можно интерпретировать как находящийся во внешнем поле $\bar{A}_+$

$$D_L=\lambda^{-1}(\partial_- f^-)^{3/4}\sigma^+[\partial_+ +A_+](\partial_- f^-)^{-1/4}\lambda \qquad (15)$$

калибрующем алгебру Вирасоро поскольку разлагая $h_{++}$ ряд Лорана, получим:

$$\bar{A}_+=-h_{++}(\xi)\partial_-=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}h_n(\xi^+)(\xi^-)^{n+1}\partial_- \qquad (16)$$

Заметим, что бесконечномерная матрица (12) играет в данном случае ту же роль, что и конечномерная матрица $g$ в работе [4], параметризующая обычное калибровочное поле $A_+=\partial_+ gg^{-1}$.

Действительно, при помощи (13) оператор $D_L$ можно записать в виде:

$$D_L=\lambda^{-1}(\partial_- f^-)^{3/4}\sigma^+ h^{-1}\partial_+ h(\partial_- f^-)^{-1/4}\lambda \qquad (17)$$

а его вариация удовлетворяет соотношению (11) с $A$ и $B$ равными:

$$\begin{aligned}
A&=-\lambda^{-1}\delta\lambda+\frac{3}{4}\delta\log\partial_- f^- -\lambda^{-1}(\partial_- f^-)^{3/4}h^{-1}\delta h(\partial_- f^-)^{-3/4}\lambda\\
B&=-\lambda^{-1}\delta\lambda-\frac{1}{4}\delta\log\partial_- f^- -\lambda^{-1}(\partial_- f^-)^{1/4}h^{-1}\delta h(\partial_- f^-)^{-1/4}\lambda
\end{aligned} \qquad (18)$$

Этот вид оператора $D_L$ очень важен для нас - из (17) мы заключаем, что даже после фиксации светоподобной калибровки (6), действие (1) обладает остаточной симметрией относительно преобразований группы $\mathrm{Diff}\ S^1$ над переменной $\xi^-$, параметрами которой служат функции $h_n(\xi^+)$ из (16).

Однако, из-за общекоординатной аномалии, из этой группы на квантовом уровне выживает лишь группа дробно-линейных преобразований координаты $\xi^-$.

Используя теперь (14) и циклическое свойство следа в (10) легко показать, что те члены в **A** и **B**, которые содержат оператор дифференцирования $\partial_-$ в выражении для $\delta W_L$ сокращают друг друга.

При помощи известных формул Сили [5] для разложения ядер $\langle\xi|\exp(-\varepsilon D_L D_R)|\xi\rangle$ и $\langle\xi|\exp(-\varepsilon D_R D_L)|\xi\rangle$ по степеням $\varepsilon$ перейдём в (10) к пределу и получим для $W_L$ вариационное уравнение:

$$\delta W_L = \frac{1}{24\pi}\,\partial_-^2 h_{++}\partial_-\left(\frac{\delta f^-}{\partial_- f^-}\right) + \frac{1}{8\pi}\,R\sqrt{g}\,\mathrm{tr}(\sigma_3\lambda^{-1}\delta\lambda) \tag{19}$$

Второй член воспроизводит лоренцеву аномалию, а первый представляет собой вариацию действия Полякова:

$$\int d^2\xi\,\partial_-\left(\frac{\delta f^-}{\partial_- f^-}\right) = \int d^2\xi\left[\delta\log\partial_- f^- - \frac{\delta f^-}{\partial_- f^-}\partial_-\log\partial_- f^-\right]\partial_-(\partial_+ - h_{++}\partial_-)\log\partial_- f^- =$$
$$(20)$$
$$= \frac{1}{2}\delta\int d^2\xi\left[\partial_+\log\partial_- f^-\,\partial_-\log\partial_- f^- - h_{++}(\partial_-\log\partial_- f^-)^2\right] = \frac{1}{2}\delta\int d^2\xi\,\partial_- h_{++}\,\frac{\partial_-^2 f^-}{\partial_- f^-}\,.$$

Если фермионы взаимодействуют также и с калибровочным полем $B_\alpha$, то с левыми частицами связана комбинация $B_+ - h_{++}B_-$, которую удобно параметризовать с помощью матрицы $g\in G$:

$$B_+ - h_{++}B_- = g^{-1}\partial_+ g \; - \; h_{++}g^{-1}\partial_- g \tag{21}$$

При этом оператор $D_L$ удовлетворяет соотношению (18) и в аномальном тождестве Уорда появляются новые члены, которые комбинируются в вариацию члена Полякова-Вигмана [4]:

$$\frac{1}{4\pi}\,\delta\,\mathrm{tr}\left[\int_\Sigma d^2\xi\sqrt{h}\,(B_\alpha - g^{-1}\partial_\alpha g)\,h^{\alpha\beta}\,(B_\beta - g^{-1}\partial_\beta g) - \frac{1}{3}\int_{\Sigma_t}(g^{-1}dg)^3\right] \tag{22}$$

здесь $\Sigma_t$ - трехмерная область, натянутая на $\Sigma=\partial\Sigma_t$.

Точно так же, с использованием указанного трюка, можно провести бозонизацию теории индуцированного действия Дирака [7]. В результате, вместо действия Лиувилля возникнет действие Полякова, а калибровочная часть эффективного действия, если в ней восстановлены компоненты метрики - не меняется.

Таким образом, использование нелокального оператора (12) позволило нам провести вычисление эффективного действия двухмерных фермионов, взаимодействующих с гравитацией, в калибровке, отличной от конформной.

Список литературы


1. Polyakov A.M. // Phys. Lett. B103 (1981) P.207.
2. Polyakov A.M. // Mod. Phys Lett. A2 (1987) P.893
3. Leutwiller H. // Phys. Lett. B153 (1985) P.65.
4. Polyakov A M., Wiegmann P.B. // Phys. Lett. B131 (1983) P.121.
5. А.М.Романов, А.С.Шварц // ТМФ 4I (I979) с.I47.
6. Karakhnyan D.R., Sedrakan A.G. // Phys. Lett. B236 (1990) P.140.
7. Kavalov Al.R., Kostov I.K., Sedrakyan A.G. // Phys. Lett. B175 (1986) P.331.



**Рукопись поступила 22 мая I99I г.**

Д.Р. Караханян
ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ ДВУХМЕРНЫХ ФЕРМИОНОВ
В СВЕТОПОДОБНОЙ КАЛИБРОВКЕ
Редактор Л.П.Мукаян
Технический редактор А.С.Абрамян

Подписано в печать 25/УП-9Iг. Формат 60×84×I6
Офсетная печать. Уч.изд.л. 0.8 Тираж 299 экз. Ц.I2к.
Зак. тип. I20 Индекс 3649

Отпечатано в Ереванском физическом институте
Ереван-36, ул. Братьев Алиханян 2.

The address for requests:
Information Department
Yerevan Physics Institute
Alikhanian Brothers 2,
Yrevan, 375036
Armenia, USSR

ИНДЕКС 3649

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ