



Центральный научно-исследовательский институт информации
и технико-экономических исследований по общей науке
и технике (ИИИТЭИ) 1991 г.

Введение

Вопросы генерации сильных полей в плазме и использование их для целей релятивистского ускорения заряженных частиц, в последние годы широко обсуждаются в научной литературе. Этот интерес обусловлен в первую очередь прогрессом в создании мощных источников микроволн и пучков заряженных частиц, которые могут быть использованы для возбуждения в плазме электрических полей

$E \sim 10^8 - 10^{11} \text{ В/м}$ [1]. Привлекательность плазмы при этом обусловлена не только возможностью получения сильных полей, но также короткими длинами ускорения ($\sim 10^{-3} - 1 \text{ м}$) и большими темпами ускорения ($\sim 1 - 10^2 \text{ ГэВ/м}$) [2].

К основным механизмам возбуждения сильных полей и релятивистского ускорения заряженных частиц в плазме относятся механизм волны биений, серфатронный механизм, а также механизм кильватерных волн. В последнем случае плазменные поля создаются сгустками заряженных частиц, "выстреливаемых" в плазму. В случае ультрарелятивистских скоростей сгустков, как было показано в [3,4]

возможно получение необычно высоких амплитуд кильватерных волн $E \sim m c \omega_{pe} \sqrt{\gamma} / e$, где γ - релятивистский фактор сгустка.

В настоящей работе исследуется вопрос о возбуждении кильватерных полей ограниченным в направлении распространения и безграничным в поперечных направлениях сгустка электронов в неоднородной плазме. При этом рассматриваются квазистационарные решения для продольных волн, а параметры сгустка полагаются неизменными. Вначале рассмотрена более простая линейная задача, для которой физическая картина наиболее прозрачна. Сложнее выглядят решения для нелинейного релятивистского случая. Однако, и в этом случае удается проследить связь существенных для целей ускорения параметров кильватерной волны (ее амплитуда и длина) с характеристиками сгустка и плазмы. Приведены также оценки параметров ускоренных частиц.

1. Линейная теория

Рассмотрим вначале линейную задачу. Пусть в направлении оси Z в плазме распространяется со скоростью U_g сгусток электронов шириной d и неограниченный в поперечных направлениях. Плотность электронов сгустка n_g , а также U_g и d - заданные константы. Кроме того, выберем в начальный момент на задней границе сгустка $Z = 0$.

Исходная линеаризованная система гидродинамических уравнений для продольных колебаний электрического поля имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 4\pi e (n_e + n_e - n_0), \\ \frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial (v_e n_0)}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial v_e}{\partial t} = \frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{array} \right. \quad (I.1)$$

где n_0 - плотность ионов, считающихся неподвижными, n_e и v_e - соответственно плотность и скорость электронов плазмы, φ - потенциал электрического поля. Положим, что плотность плазмы слабо меняется вдоль оси z на протяжении длины возбуждаемой сгустком волны λ . Т.е. $\lambda/L_n \equiv \epsilon \ll 1$, где L_n - пространственный масштаб изменения плотности плазмы.

Рассматривая квазистационарные колебания введем $z = Z - v_g t$. Кроме того, согласно теории возмущений введем "медленную" координату $\xi = \epsilon Z$ [5]. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} = -v_g \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad (I.2)$$

φ , n_e , v_e являются функциями z и ξ , а $n_0 = n_0(\xi)$. Разлагая теперь φ , n_e , v_e в ряд по ϵ , используя (I.2), в нулевом приближении получим следующую систему (для удобства, значок (\circ) опускаем)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 4\pi e (n_e + n_e - n_0), \quad (I.3)$$

$$-v_g \frac{\partial n_e}{\partial z} + n_0 \frac{\partial v_e}{\partial z} = 0, \quad -v_g \frac{\partial v_e}{\partial z} = \frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Из (I.3) для φ имеем уравнение осциллятора

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 \quad (I.4)$$

с потенциалом

$$U = \frac{\kappa^2 \varphi^2}{2} - \alpha \varphi, \quad \kappa^2 \equiv \frac{4\pi n_0 e^2}{m v_E^2} = \left(\frac{\omega_{pe}}{v_E}\right)^2, \quad \alpha \equiv 4\pi e n_0.$$

На дне потенциальной ямы $\varphi \equiv \varphi_c = \alpha/\kappa^2$, $U \equiv U_c = -\alpha^2/2\kappa^2$.

Кроме того, при выводе (I.4) полагалось, что $\varphi = 0$ при $v_E = 0$.

Обычно, в задачах о распространении волн в неоднородных средах неизвестные величины находятся из условий разрешимости уравнений в следующем приближении по малому параметру. В рассматриваемой нами задаче речь идет о возбуждении кильватерных волн ступком в данной области плазмы с локальной плотностью $n_0(\xi)$. Неизвестные медленные переменные находятся из условий непрерывности φ и $\partial\varphi/\partial z$, и надобности в уравнениях следующего приближения нет.

Из (I.4) имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \pm \sqrt{2(U_* - U)}, \quad (I.5)$$

где $U_* = U_*(\xi)$ — неизвестная медленная переменная, связанная с амплитудой электрического поля соотношением

$$E_m = \sqrt{2U_* + (\alpha/\kappa)^2}.$$

Точки отражения осциллятора (I.4) находятся из уравнения $U = U_*$:

$$\varphi_{1,2} = \varphi_c \mp \sqrt{\varphi_c^2 + 2U_*/k^2} = \varphi_c \mp E_m/k.$$

Интегрируя теперь (1.5) получаем

$$\varphi = \varphi_c \pm (E_m/k) \sin [k(z-\chi)], \quad (1.6)$$

где $\chi(\xi)$ - вторая неизвестная величина, а знак " \pm " соответствует знаку $\partial\varphi/\partial z$, т.е. движению от φ_1 к φ_2 и обратно. Заметим, что (1.6) описывает поле как внутри сгустка, так и за ним.

Перед сгустком поле отсутствует: $\varphi = 0$, $\partial\varphi/\partial z = 0$. Тогда, внутри сгустка $\varphi = 0$ - точка отражения, и т.к. $\varphi_{c\beta} > 0$, то $\varphi_{1\beta} = 0$ (здесь и далее значки β и ρ относятся соответственно к сгустку и плазме за ним. А из непрерывности φ и $\partial\varphi/\partial z$ на передней границе сгустка получим систему для определения неизвестных $E_{m\beta}$ и χ_β :

$$\begin{cases} 0 = \varphi_c \pm (E_{m\beta}/k) \sin [k(d+\chi_\beta)], \\ 0 = E_{m\beta} \cos [k(d+\chi_\beta)]. \end{cases} \quad (1.7)$$

Отсюда $E_{m\beta} = k\varphi_{c\beta} = m\upsilon_\beta\omega_{pe}\alpha/e$, ($\alpha \equiv n_\beta/n_0$), $\chi_\beta = (\pi/2k) - d$, а в (1.6) нужно брать " $-$ ". Таким образом, внутри сгустка

$$\varphi_\beta = \varphi_{c\beta} \{1 - \cos [k(d-z)]\}, \quad E_\beta = E_{m\beta} \sin [k(z-d)]. \quad (1.8)$$

За сгустком решение (1.6) содержит неизвестные $E_{m\rho}$ и χ_ρ

которые находятся из условия непрерывности φ и $\partial\varphi/\partial z$ на задней границе сгустка (при этом $\alpha = \varphi_{cp} = 0$)

$$\begin{cases} \mp E_{mp} \sin(kx_p) = E_{m\beta} [1 - \cos(kd)], \\ \pm E_{mp} \cos(kx_p) = -E_{m\beta} \sin(kd). \end{cases}$$

Отсюда $x_p = d/2$, $E_{mp} = 2E_{m\beta} |\sin(kd/2)|$, и

$$\varphi_p = \pm \frac{E_{mp}}{k} \sin\left[k\left(z - \frac{d}{2}\right)\right], \quad E_p = \mp E_{mp} \cos\left[k\left(z - \frac{d}{2}\right)\right],$$

а знак " \pm " определяется из условия $E_\beta(z=0) = E_p(z=0)$.

Как видим, максимум амплитуды электрического поля за сгустком $E_{mp} = 2E_{m\beta}$ достигается при ширине сгустка $d = (N + 1/2)\lambda$ ($\lambda = 2\pi v_\beta / \omega_{pe}$, $N = 0, 1, 2, \dots$), а при $d = N\lambda$ поле за сгустком отсутствует.

Аналогично можно вычислить поле за несколькими сгустками. В общем случае это выглядит довольно громоздко. Отметим лишь для примера случай S сгустков одинаковой плотности в однородной плазме. Максимальное значение амплитуды кильватерной волны за S -ым сгустком достигается при условии, что ширина сгустков и промежутки между ними отличаются от $\lambda/2$ на целое число λ . При этом

$$E_{mps} = (m v_\beta \omega_{pe} / e) \cdot 2s\alpha."$$

2. Нелинейная релятивистская теория

Наиболее интересным с точки зрения возбуждения сильных кильватерных волн и ускорения частиц этими волнами является релятивистский случай. При этом продольные волны описываются системой (I.1) с заменой уравнения движения на релятивистское

$$d(\nu_e \gamma_e)/dt = (e/m) \partial \varphi / \partial z \quad . \quad \text{Вводя } z = Z - \nu_e t, \quad \xi = \varepsilon Z,$$

в неоднородной плазме, для квазистационарных волн, аналогично линейной теории, в нулевом приближении по ε , получим следующую систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 4\pi e (n_e + n_g - n_0), \\ (\beta_e - \beta) \frac{\partial n_e}{\partial z} + n_e \frac{\partial \beta_e}{\partial z} = 0, \\ (\beta_e - \beta) \frac{\partial (\beta_e \gamma_e)}{\partial z} = \frac{e}{mc^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

где $\beta_e = \nu_e/c$, $\gamma_e = (1 - \beta_e^2)^{-1/2}$, $\beta = \nu_g/c$, $\varphi = \varphi(z, \xi)$,

$$n_e = n_e(z, \xi), \quad \nu_e = \nu_e(z, \xi), \quad n_0 = n_0(\xi).$$

Из (2.1) имеем уравнение нелинейного осциллятора для

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial U(\Phi)}{\partial \Phi} = 0, \quad (2.2)$$

$$U = \mu [(\gamma^2 - \alpha)\Phi - \beta\gamma^2 \sqrt{\Phi^2 - \gamma^2}], \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}, \quad \mu = (\omega_{pe}/c)^2.$$

Из условия положительности U получаем: $\Phi \geq \gamma^{-1}$. Приведем также необходимые далее параметры потенциала $U(\Phi)$, смысл которых ясен из рис. 1

$$\Phi_{\min} = \frac{1}{\gamma}, \quad \Phi_{\max} = \frac{(\gamma^2 - \alpha)^2 + \beta^2 \gamma^4}{\gamma \Gamma}, \quad \Phi_c = \frac{U_m}{\gamma U_c},$$

$$U_m = \frac{\mu(\gamma^2 - \alpha)}{\gamma}, \quad U_c = \frac{\mu \sqrt{\Gamma}}{\gamma}, \quad \Gamma \equiv (\gamma^2 - \alpha)^2 - \beta^2 \gamma^4 =$$

$$= \gamma^2 \nu + \alpha^2, \quad \nu \equiv 1 - 2\alpha, \quad \alpha \leq (1 + \beta)^{-1}.$$

Точки отражения Φ_1 и Φ_2 связаны с максимальным значением потенциала U_* при конкретных параметрах задачи следующим образом

$$\Phi_{1,2} = \frac{1}{\Gamma} \left\{ \frac{U_*}{\mu} (\gamma^2 - \alpha) \mp \beta \gamma \sqrt{\left(\frac{\gamma U_*}{\mu} \right)^2 - \Gamma} \right\}. \quad (2.3)$$

Из (2.2) получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \pm \sqrt{2(U_* - U)}, \quad (2.4)$$

а максимально возможная амплитуда возбуждаемых волн равна

$$E_{\max} = \frac{mc^2}{e} \sqrt{2(U_m - U_c)} = \frac{mc\omega_{pe}}{e} \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \sqrt{\gamma^2 - \alpha - \sqrt{\Gamma}}.$$

За ступком ($\alpha=0$) $E_{\max} = (mc\omega_{pe}/e) \sqrt{2(\gamma-1)}$, что для однородной плазмы в случае $\gamma \gg 1$ совпадает с известным из [3] выражением. Последняя формула указывает на возможность возбуждения ультрарелятивистскими ступками электронов волн с амплитудами существенно больше обычного поля опрокидывания. Нетрудно видеть, что полученная зависимость E_{\max} от γ является следствием учета релятивизма колеблющихся электронов плазмы.

Интегрирование (2.4) удобнее провести для $U(\Phi)$. В итоге получим неявную формулу

$$\pm \frac{(\gamma U_c)^2}{\sqrt{2}\mu} (z - \chi) = (\gamma^2 - \alpha) (\sqrt{U_* - U_c} - \sqrt{U_* - U}) \pm \frac{\beta \gamma^2 U_c}{\sqrt{U_* + U_c}} [2\Pi(\varphi, k^2, k) - F(\varphi, k)], \quad (2.5)$$

$$\varphi = \alpha z c \operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{(U_* + U_c)(U - U_c)}{(U_* - U_c)(U + U_c)}}, \quad k = \sqrt{\frac{U_* - U_c}{U_* + U_c}},$$

$F(\varphi, k)$ и $\Pi(\varphi, k^2, k)$ - эллиптические интегралы, соответственно, первого и третьего рода, знак " \pm " соответствует знаку "скорости" осциллятора $\partial\Phi/\partial z$, а знак " \pm " описывает колебания, соответственно, справа и слева от Φ_c . $U_*(\xi)$ и

$\chi(\xi)$ - неизвестные медленные переменные. Заметим также, что из (2.5), используя (2.4) и $E = -(mc^2/e) \partial\Phi/\partial z$, нетрудно получить неявную формулу для напряженности электрического поля.

Длина волны, согласно (2.5) равна

$$\lambda = \frac{4\sqrt{2} v_B}{\omega_{pe}} \left(\frac{\sqrt{\Gamma}}{\gamma} \right) \frac{2\Pi(\pi/2, k^2, k) - F(\pi/2, k)}{\sqrt{(U_* + U_c)/\mu}} =$$

$$= \frac{4\sqrt{2} v_B \gamma^2}{\omega_{pe} \Gamma} \sqrt{(U_* + U_c)/\mu} \left[E(k) - \frac{U_c}{U_* + U_c} F(k) \right],$$

где $F(k)$ и $E(k)$ - полные эллиптические интегралы I-го и 2-го рода.

Рассмотрим поле внутри сгустка. При $z=d$ имеем: $\partial\Phi/\partial z = 0$ и $\Phi = I$. Следовательно, точка $\Phi = I$ является точкой отражения (как можно видеть из (2.3) - левой; тогда, слева в (2.5) нужно брать "+", а справа "-", $U_{*B} = U(\Phi_{1B} = 1) = \mu(1-\alpha)$, $\Phi_{2B} = (\gamma^2 + \alpha^2 - 2\alpha)/\Gamma$. Амплитуда электрического поля внутри сгустка равна:

$$E_{TB} = \frac{mc^2}{e} \sqrt{2(U_{*B} - U_{cB})} = \frac{mc\omega_{pe}}{e} \left[2\left(1-\alpha - \frac{\sqrt{\Gamma}}{\gamma}\right) \right]^{1/2}.$$

Неизвестная χ_B определяется из

$$\frac{(\gamma U_{cB})^2}{\sqrt{2}\mu} (d - \chi_B) = (\gamma^2 - \alpha) \sqrt{U_{*B} - U_{cB}}.$$

$$-\frac{\beta\gamma^2 U_{cB}}{\sqrt{U_{*B} + U_{cB}}} [2\Pi(\pi/2, k^2, k) - F(\pi/2, k)].$$

Полученные U_{*B} и χ_B , будучи подставлены в (2.5), дают точное решение (в нулевом по ϵ приближении) задачи о поле внутри сгустка.

Аналогично можно найти решение (2.5) за сгустком, беря $\alpha=0$. Медленные переменные χ_p и U_{*p} находятся из условия непрерывности Φ и $\partial\Phi/\partial z$ на задней границе сгустка.

Рассмотрим случай $d = N\lambda/2$. При четных N , как нетрудно видеть, поле за сгустком отсутствует. Для нечетных N на задней границе сгустка $\Phi = \Phi_{2B}$ и $\partial\Phi/\partial z = 0$. Тогда,

$$U_{*p} = U_p(\Phi_{2B}) = \mu\gamma^2 [(1-\alpha)^2 + \alpha^2\beta^2]/\Gamma,$$

$$E_{mp} = \frac{mc\omega_{pe}}{e} \cdot \frac{2\alpha\beta\gamma}{\sqrt{\Gamma}}.$$

Т.к. E_{mp} не может превышать E_{max} , то на α имеем известное [3,5] ограничение $\alpha \leq (2 + \gamma^{-1})^{-1}$, которое при $\gamma \gg 1$ практически совпадает с менее строгим универсальным неравенством $\alpha \leq (1 + \beta)^{-1}$. В этом случае Φ_B не превышает 2γ . Заметим, что при распространении сгустка в неоднородной плазме, ограничения на α могут нарушаться, и, полученные здесь решения не имеют силы.

В случае

$$\Phi_0 \equiv \Phi_{\text{в}}(z=0) = \Phi_{\text{св}}, \quad (\partial\Phi/\partial z)_{z=0} = (\partial\Phi/\partial z)_{\text{мв}},$$

получаем

$$U_p(z=0) = U_p(\Phi_{\text{св}}) = \mu \frac{\gamma(1-\alpha)}{\sqrt{\Gamma}},$$

$$U_{*p} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} \right)_{\text{мв}}^2 + U_p(\Phi_{\text{св}}) = \mu \left[(1-\alpha) \left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\Gamma}} \right) - \frac{\sqrt{\Gamma}}{\gamma} \right],$$

$$E_{\text{mp}} = \frac{mc\omega_{\text{pe}} \sqrt{2}}{e} \left[\frac{\gamma}{\sqrt{\Gamma}} - \frac{\sqrt{\Gamma}}{\gamma} - \alpha \left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\Gamma}} \right) \right]^{1/2}.$$

При $\gamma \gg 1$ максимально возможное значение амплитуды $E_{\text{mp}} \approx (mc\omega_{\text{pe}}/e) \sqrt{\gamma}$ достигается при $\alpha \rightarrow 1/2$, что совпадает с результатом [3]. При этом $\lambda_p \approx 4c\sqrt{2}\gamma/\omega_{\text{pe}}$

Неизвестная χ_p находится из (2.5) при $z=0$ и $\alpha=0$ подстановкой $U = U_p(\Phi = \Phi_0)$ и $U_* = U_{*p}$. Длину волны в общем случае можно оценить с помощью $\Phi_2 - \Phi_1 \sim (\lambda/2) E_m$.

Оценим теперь энергию, приобретаемую заряженной частицей в возбуждаемых сгустком полях, в наиболее интересном ультрарелятивистском случае ($\beta \approx 1$, $\gamma \gg 1$). Для этого удобнее вычислить энергию частицы вначале в системе отсчета волны. Естественно ожидать наиболее эффективное ускорение для резонансных частиц. Поэтому, положим, что рассматриваемая частица в системе отсчета волны вначале покоилась. Уравнение движения $d(\beta'\gamma')/dt' = cd\Phi'/dz'$ в этом случае для γ - фактора ускоряемого заряда дает: $\gamma'_a = 1 + \Delta\Phi'$ (штрих обозначает величину

ны в системе отсчета волны). Отсюда, с учетом релятивистских преобразований $\phi = \gamma\phi'$ и $\gamma_a \approx \gamma\gamma_a'$, в лабораторной системе отсчета получим:

$$\gamma_a \approx \gamma(1 + \gamma\Delta\phi).$$

Максимальный прирост энергии достигается при $\Delta\phi = \phi_{\max} - \phi_{\min} = 2\beta^2\gamma^3/\Gamma \approx 2\gamma^3/\Gamma$. В этом случае, за ступком имеем $(\gamma_a)_{\max} \approx 2\gamma^3$. Время ускорения легко оценить из уравнения движения: $t_a \sim \gamma^{5/2}/\omega_{pe}$. Длина ускорения $l_a \approx ct_a \sim c\gamma^{5/2}/\omega_{pe}$.
 К примеру, при $\omega_{pe} \approx 10^{11} \text{ с}^{-1}$, $\gamma \approx 10$ имеем $(\gamma_a)_{\max} \approx 2 \cdot 10^3$, $t_a \approx 3 \cdot 10^{-9} \text{ с}$, $l_a \approx 1 \text{ м}$, $\lambda_p \approx 5 \text{ см}$.

В заключение хотелось бы поблагодарить С.С.Элбакяна и Э.В.Сехосяна за обсуждения и полезные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Файнберг Я.Б. Ускорение заряженных частиц волнами плотности заряда в плазме, возбуждаемыми лазерным излучением и релятивистскими электронными пучками. Физика плазмы, 1987, т.13, с.607-625.
2. Robin J.L. Elementary Particle Acceleration in Laser Plasma Interaction. In: Gas Flow and Chem. Lasers. Proc. 6 Int.Symp., Yerusalem, 1986, p. 495-507.
3. Аматуни А.Ц., Сехпосян Э.В., Элбакян С.С. О возможности ускорения заряженных частиц кильватерной волной электронного сгустка в плазме. Труды XIII Международной конференции по ускорителям высоких энергий, Новосибирск, 1986, с.175-180.
4. Аматуни А.Ц., Сехпосян Э.В., Элбакян С.С. Возбуждение сильных продольных волн в плазме электронными сгустками. Физика плазмы, 1986, т.12, с.1145-1147.
5. Аматуни А.Ц., Сехпосян Э.В., Элбакян С.С. Возбуждение нелинейных кильватерных волн в плазме релятивистским сгустком электронов с однородным распределением плотности. Препринт ЕФИ-1365(60)-91, Ереван, 1991.

Рукопись поступила 8 октября 1991 г.

А. Г. ХАЧАТРЯН

К ТЕОРИИ КИЛЬВАТЕРНЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

Редактор Л. П. Мукаян

Технический редактор А. С. Абрамян

Подписано в печать 25/ХП-91

Офсетная печать. Уч. изд. л. 0.7

Зак. тип. № 156

Формат 60x84/16

Тираж 299 экз. Ц. Юж.

Индекс 3649

Отпечатано в Ереванском физическом институте

Ереван 36, ул. Братьев Аликханян, 2

**The address for requests:
Information Department
Yerevan Physics Institute
Alikhanian Brothers 2,
Yrevan, 375036
Armenia, USSR**

ИНДЕКС 3649



ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ