



AM9800009

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
YEREVAN PHYSICS INSTITUTE

Н.С. АНАНИКЯН, Н.Ш. ИЗМАИЛЯН,

В.А. ПОГОСЯН

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ КАЛИБРОВОЧНЫХ МОДЕЛЕЙ

ПОТТСА И ИХ I/Q - РАЗЛОЖЕНИЕ

29 - 42

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЕФИ

Ереван 1992

**We regret that
some of the pages
in this report may
not be up to the
proper legibility
standards, even
though the best
possible copy was
used for scanning**

Ն.Ս.ԱՆՆԻԿՅԱՆ, Ն.Շ.ԻՋՄԻԻԼՅԱՆ,

Վ.Ա.ԿՈՒՈՍՅԱՆ

ՓՈԹՍԻ ՏՐԱՄԱՉԱՓԱՅԻՆ ՄՈԴԵԼՆԵՐԻ ՏՈԳՈԼՈԳԻԱԿԱՆ

ՏՆՈՒՆԿՑՈՒՆՆԵՐԸ ԵՎ ՆՄԱՆՑ 1/Ձ Ց-ՏՐՈՀՈՒՄԸ

Փոթսի **d**-չափ տրամաչափային մոդելում ըստ դաշտային փոփոխականի զուամարումը փոխարինված է ըստ հիպերգրաֆի զուամարումով՝ վիճակագրական զուամարում, որտեղ առավելագույն օգտագործվում են տոպոլոգիական ինվարիանտներ /Բետտի թվեր/, որոնք հաշվի են առնում ինչպես կողմնորոշվող, այնպես էլ չկողմնորոշվող մակերևույթները: Նուաչափում և քառաչափում անցկացվել է 1/Ձ -տրոհումը: Պաղե մոտարկումների եղանակով ստացված են բարձրակետը/կիզակետը/ և անցման թաքնված ջերմությունը:

Երևանի Ֆիզիկայի ինստիտուտ

Երևան 1992

1. Введение

Изучение калибровочных моделей на решетках - один из основных методов получения физических результатов вне рамок теории возмущения. Калибровочная теория была впервые сформулирована на решетке в 1974г. Вильсоном [1]. Обзор решеточных калибровочных моделей и их применение в КХД был сделан Когутом [2]. В настоящей статье исследована d-мерная калибровочная модель Поттса с числом состояний Q , фактически следующая по простоте после Z_2 -симметричной модели. Изучение таких моделей представляет большой интерес, так как группа $Z(Q)$, являясь центром соответствующей калибровочной группы $SU(Q)$, играет существенную роль в явлении заточения кварков [3,4]. Известно, что в пределе $Q \rightarrow \infty$ эта модель становится точнорешаемой [5,6]. Точное решение для калибровочных моделей, при конечных Q получено только на специальной бесконечномерной решетке Бете [7,8], чего на стандартных решетках пока получить не удалось. Однако различные приближенные вычисления (метод среднего поля, $1/Q$ -разложение) указывают на наличие фазового перехода Грода "конфайнмент" - "деконфайнмент".

В настоящей работе, используя полученное авторами [9] представление для статистической суммы d-мерной калибровочной модели Поттса проведено $1/Q$ -разложение в трех- и четырехмерном пространстве. Показанно, что в четырехмерии такое представление для статистической суммы автоматически учитывает вклад как ориентируемых (S^2 -сфера, тор и т.д.) так и неориентируемых (бутылки Клейна и т.д.) поверхностей.

В разделе 2 кратко определена модель и приведены основные формулы. Вывод соотношения дуальности и $1/Q$ -разложения в трехмерии приведен в разделе 3. Раздел 4 посвящен свойствам модели в четырехмерном пространстве.

2. Модель

Рассмотрим Q -компонентную калибровочную модель Поттса $-Z(Q)$, определенную на d-мерной гиперкубической решетке. Действие такой модели имеет вид

$$S_g = -\frac{K}{Q} \sum_{p1} \sum_{n=1}^Q (R_1 R_2 R_3 R_4)^n \quad (1)$$

где K - температурно-подобный параметр, определяющий флуктуации калибровочных переменных R_i , определенных на ребрах решетки. Первое суммирование в действии ведется по всем плакетам (примитивным двумерным квадратам) на d -мерной решетке, $R_1 R_2 R_3 R_4$ - произведение переменных R_i вокруг одного плакета. Каждая из R_i принимает одно из Q - значений корней

Q -й степени из единицы ($R_k = \exp(\frac{2\pi i}{Q} k)$)

Поскольку $\frac{1}{Q} \sum_{n=1}^Q (R_1 R_2 R_3 R_4)^n = \delta_{R_1 R_2 R_3 R_4, 1}$, то статистическая

сумма для калибровочной модели Поттса ($Z(Q) = \sum_g e^{-S_g}$) запишется в виде

$$Z_g = \sum_{\{R_i\}} \sum_{p1} (1 + v \delta_{R_1 R_2 R_3 R_4, 1}) \quad (2)$$

где $v = e^K - 1$ и суммирование ведется по всевозможным конфигурациям калибровочных переменных $\{R_i\}$.

Если в правой части (2) перемножить все биномы между собой, то получим сумму членов типа $v^f \delta_{R_1, 1} \dots \delta_{R_1, 1}$. Каждому такому члену поставим в соответствие гиперграф $G_f[10]$, образованный f - гранями, входящими в δ -символы данного члена. Тогда, как показано в работе [9], статистическую сумму модели Поттса можно записать в виде

$$Z_g(Q, v) = \sum_{G_f \subseteq G} v^{f(G_f)} Q^{F - f(G_f) + R_2^2(G_f)} \quad (3)$$

где суммирование ведется по всем гиперграфам G_f решетки G , F - полное число плакетов решетки G , $R_2^2(G_f)$ - второе число Бетти по модулю 2. Нами выбраны гомологии по модулю 2 с целью учета и неориентируемых поверхностей, которые могут возникнуть в четырехмерных калибровочных моделях. Для высших размерностей $d > 4$ учет чисел Бетти по модулю 2 оказывается недостаточным для описания гиперграфов G_f , построенных из плакетов на гиперкубической решетке, вследствие

возникновения групп $Z_p(p \geq 2)$ во второй группе гомологии гиперграфа G_f .

В трехмерии статистическую сумму калибровочной модели Поттса можно выразить полностью через топологические инварианты (числа Бетти) используя теорему Эйлера - Пуанкаре [11] для ориентируемых поверхностей

$$\sum_{n=0}^2 (-1)^n R_n(G_f) = \sum_{n=0}^2 (-1)^n \alpha_n(G_f) \quad (4)$$

где $R_n(G_f)$ - n -ое число Бетти гиперграфа G_f , а $\alpha_n(G_f)$ - n -симплекс гиперграфа G_f . Поскольку гиперграф G_f содержит все вершины (N) и ребра решетки (E), то Эйлеровская характеристика равна $\chi(G_f) = N - E + f(G_f)$. Отметим также, что $R_0(G_f) = 1$. Таким образом статистическую сумму (3) можно записать в виде

$$Z_{\#}(Q, v) = Q^{3N} \left(\frac{v}{Q} \right)^{2N+1} \sum_{G_f \subseteq G} v \frac{R_2(G_f) - R_1(G_f)}{Q} \frac{R_1(G_f)}{Q} \quad (5)$$

где использовано, что полное число ребер (E) равно полному числу плакетов (F) на трехмерной решетке и $E = 3N$. На примере трех- и четырехмерных калибровочных моделей Поттса мы показали, что используя только топологические инварианты (числа Бетти) можно выразить статистическую сумму. Представление статистической суммы в виде (3) и (5) оказывается удобным при проведении низко-, высокотемпературных и $1/Q$ -разложений.

3. Трехмерная калибровочная модель Поттса.

Обратимся теперь к $1/Q$ -разложению трехмерной калибровочной модели. Действие этой модели дается формулой (1). Интересно отметить, что истинным параметром в скрытой теплоте перехода I рода, в этом случае является величина $1/Q^{1/3}$. Известно, что калибровочная модель Поттса в трехмерии является дуальной к спиновой модели Поттса, действие которой имеет вид

$$S = -\beta \sum_{\langle i,j \rangle} \delta_{\sigma_i \sigma_j} \quad (6)$$

где спиновая переменная σ_i , определенная в узлах решетки, принимает значения $0, 1, \dots, Q-1$, и сумма в (6) берется по ближайшим соседям на трехмерной решетке.

Статистическая сумма этой модели имеет вид [12]

$$Z_D^{\text{spin}}(Q, \beta) = \sum_{D' \subseteq D} \vartheta^{b(D')} Q^{R_0(D')} \quad (7)$$

где $\vartheta = e^{\beta} - 1$, а суммирование проводится по всем подграфам D' , состоящих из всевозможного набора ребер основной решетки D , $b(D')$ - число ребер в D' , $R_0(D')$ - нулевое число Бетти, равное числу компонент связности. Следует отметить, что в двумерии, где спиновая модель Поттса является самодуальной, Бакстер в 1973 [10] используя полученное им это представление для статистической суммы сумел получить точное решение этой модели в критической точке. Используя теорему Эйлера - Пуанкаре статистическую сумму (7) можно выразить через топологические инварианты

$$Z_D^{\text{spin}}(Q, \beta) = \vartheta^N \sum_{D' \subseteq D} \vartheta^{R_1(D') - R_0(D')} Q^{R_0(D')} \quad (8)$$

где $R_1(D')$ - первое число Бетти, равное числу петель подграфа D' . Используя тот факт, что сумма Эйлеровских характеристик графа D' и дуального к нему гиперграфа G_f равна 0 ($\chi(D') + \chi(G_f) = 0$) а также, что $R_0(D') = R_2(G_f)$, легко получить из (8) и (5) соотношение дуальности спиновой и калибровочной моделей Поттса в трехмерии

$$Z_D^{\text{spin}}(\vartheta, Q) = \left(\frac{\vartheta}{Q} \right)^{3M} Z_G^g(v, Q) \quad (9)$$

где $v\vartheta = Q$.

Заметим, что модель не самодуальна, и следовательно критическую температуру можно найти различными приближенными методами. Мы это сделаем используя $1/Q$ -разложение. $1/Q$ -разложение для спиновой и калибровочной моделей эффективно в высокотемпературной области ($v \ll 1$). Используя выражение (5) для статистической суммы калибровочной модели Поттса получим следующее $1/Q$ -разложение для свободной энергии, приходящейся на один плакет.

$$\begin{aligned}
-K F_g^{h.t.} = & 3 \ln Q + 3 \frac{v}{Q} - \frac{3}{2} \frac{v^2}{Q^2} + \frac{v^3}{Q^3} - \frac{3}{4} \frac{v^4}{Q^4} + \frac{v^5}{Q^5} \left(\frac{3}{4} + v \right) - \\
& - \frac{v^6}{Q^6} \left(\frac{3}{2} + 6v \right) + \frac{v^7}{Q^7} \left(\frac{45}{7} + 21v \right) - \frac{v^8}{Q^8} \left(\frac{171}{8} + 56v \right) + \\
& + \frac{v^9}{Q^9} \left(\frac{169}{3} + 129v + 3v^2 \right) + \dots
\end{aligned} \quad (10)$$

Аналогично для спиновой модели, используя формулу (8) получим для свободной энергии в $1/Q$ -разложении следующее выражение

$$\begin{aligned}
-\beta F_{\text{spin}}^{h.t.} = & \ln Q + 3 \frac{v}{Q} - \frac{3}{2} \frac{v^2}{Q^2} + \frac{v^3}{Q^3} (1+3v) - \frac{v^4}{Q^4} \left(\frac{15}{4} + 12v \right) + \\
& + \frac{v^5}{Q^5} (18v^2 + 52v + \dots) + \dots
\end{aligned} \quad (11)$$

На языке свободной энергии соотношение дуальности (9) примет вид

$$-\beta F_{\text{spin}} = 3 \ln \frac{v}{Q} - K F_g \left(v = \frac{Q}{v} \right) \quad (12)$$

Легко видеть, что из этого соотношения можно получить низкотемпературные ($v \gg 1$) разложения.

Сшивая (11) и (12) мы можем получить критическую точку v_c .

$$\begin{aligned}
v_c = & Q \left(1 + z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{3} z^4 - z^5 + \frac{20}{9} z^6 - \frac{4}{9} z^7 - \right. \\
& \left. - 8z^8 + \frac{1985}{81} z^9 + \dots \right)
\end{aligned} \quad (13)$$

где $z = Q^{-1/3}$.

Скрытую теплоту перехода можно получить вычитая друг от друга производные по температуре от свободных энергий (11) и (12) в критической точке. Эти результаты совпадают с полученными в работах [5], [6], где параметр разложения для свободной энергии выбирается из других соображений, а именно проводится рескейлинг температуры.

Применяя же теорию суммирования по графам и

гиперграфам, используя при этом топологические инварианты (числа Бетти), нет необходимости в проведении рескейлинга температуры.

4. Четырехмерная калибровочная модель Поттса.

d -мерные модели Поттса и в частности четырехмерная модель были исследованы при помощи $1/Q$ -разложений в гамильтоновом подходе [13]. Лагранжева формулировка $1/Q$ -разложения для калибровочной модели ($d=4$) приведена в [6], но при этом подходе не учитывается вклад неориентируемых поверхностей, а также необходимо переопределение температурного параметра.

Представление для статистической суммы четырехмерной калибровочной модели (3) автоматически учитывает как ориентируемые так и неориентируемые поверхности, ввиду того, что были использованы гомологии по модулю 2, которые являются нечувствительными к ориентации поверхности.

Четырехмерная калибровочная модель Поттса самодуальна (плакет дуален плакете). Эта модель имеет несколько общих черт с точно решаемой двумерной спиновой моделью Поттса. Обе они самодуальны и кроме того имеют схожий вид статистических сумм (3) и (7), хотя до конца не ясен физический смысл симметрии лежащий в основе самодуальности.

Представление (3) для статистической суммы, где суммирование по калибровочным переменным заменено на суммирование по поверхностям очень удобно для вывода соотношения дуальности. Учитывая связь между числом плакетов гиперграфа G_f и дуального ему гиперграфа D_f ($f(D_f) = F - f(G_f)$), а также используя обобщенную теорему двойственности Пуанкаре [9] ($R_2^2(D_f) = R_2^2(G_f) - f + \frac{F}{2}$) соотношение дуальности можно записать в виде

$$Z_G^g(Q, A) = Q^{-\frac{F}{2}} Z_0^g(Q, v) \quad (14)$$

где $Qv = Q$

Это же соотношение для свободной энергии

$$-\beta f^g = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \ln Z_G^g \text{ имеет вид}$$

$$-\beta f^g(v) = -\beta f(v) + \ln(v / \sqrt{Q}) \quad (15)$$

Нетрудно заметить, что это соотношение можно использовать и как связь между низкотемпературным и высокотемпературным режимами данной модели, которые совпадают, как это видно из (15), в критической точке $v_c = \sqrt{Q}$. Таким образом в самодуальной четырехмерной калибровочной модели критическая температура вычисляется точно.

d-мерные модели Поттса и в частности четырехмерная модель были исследованы при помощи $1/Q$ -разложений как в гамильтоновом [13] так и в лагранжевом [6] подходах. При этом если в гамильтоновом подходе параметр разложения не зависел от размерности пространства и был равен $1/Q$, то в лагранжевом формализме параметр разложения менялся в зависимости от размерности пространства, что требовало в каждом случае переопределения температурного параметра. Кроме того, в обоих случаях не учитывался вклад неориентируемых поверхностей. Используя же представление (3) для d-мерной калибровочной модели Поттса нетрудно провести $1/Q$ -разложение не требующего переопределения температурного параметра в лагранжевом формализме. Приведем несколько первых членов такого разложения для свободной энергии четырехмерной модели

$$-\beta f^g = \ln Q + \frac{v}{Q} - \frac{1}{2} \frac{v^2}{Q^2} + \frac{1}{3} \frac{v^3}{Q^3} - \frac{1}{4} \frac{v^4}{Q^4} + \frac{v^5}{Q^5} \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3}v \right) - \frac{v^6}{Q^6} \left(\frac{5}{6} + 4v \right) + \frac{v^7}{Q^7} \left(\frac{29}{7} + 14v \right) - \frac{v^8}{Q^8} \left(\frac{113}{8} + \frac{112}{3}v \right) + \dots \quad (16)$$

Отметим, что такое разложение соответствует высокотемпературной фазе ($v \ll 1$).

Рассмотрим теперь критические явления в $Z(Q)$ калибровочной модели Поттса ($d=4$). Наличие фазового перехода "конфайнмент" - "свободные заряды" в $Z(Q)$ модели, автоматически приводят к аналогичному фазовому переходу в $SU(Q)$ -калибровочной теории [14]. В зависимости от величины

Q фазовый переход может быть I или II рода. Фазовый переход будет I рода, если при этом выделяется скрытая теплота фазового перехода L .

$$L = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_{l. t.} - \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_{h. t.} \right]_{T=T_c} > 0 \quad (17)$$

где $\left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_{l. t.}$ и $\left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_{h. t.}$ - низко- и высокотемпературные производные свободной энергии в критической точке. Используя соотношение дуальности (15) легко вычислить L зная только высокотемпературное разложение для свободной энергии (16). Дифференцируя (15) по температуре в критической точке ($v=v_c$) получим для $L = 1 - 2\sqrt{Q} (\beta f)'_{v_c} = \sqrt{Q}$ следующее разложение

$$L = 1 - 2x + 2x^2 - 2x^3 - 6x^4 + 54x^5 - 214x^6 + 482x^7 + \\ + 162x^8 - 7694x^9 + 42666x^{10} + \dots \quad (18)$$

где $x = 1/\sqrt{Q}$. Здесь учтены все члены в разложении свободной энергии (16), дающие вклад в скрытую теплоту L вплоть до 10 порядка по x включительно. Следует отметить, что учет даже простейшей неориентируемой поверхности (бутылки Клейна) дает вклад в более высокие порядки разложения в силу того, что для ее конструкции на гиперкубической решетке требуется большое число плакетов, а порядок в $1/Q$ -разложении, как это видно из (3), определяется именно этим.

В таблице приведены результаты Паде аппроксиманты для скрытой теплоты фазового перехода при различных Q , а также для критического значения Q_c , начиная с которой происходит фазовый переход I рода ($Q > Q_c$).

При $Q \leq Q_c$ фазовый переход II рода, что при $Q = 1$ соответствует перколяции плакетов.

Для сравнения приведены результаты для скрытой теплоты полученные методом Монте-Карло [15]. Необходимо отметить, что полученные нами более высокие, чем в работе [6], порядки Паде-аппроксиманты, лучше согласуются с данными метода Монте-Карло.

В заключение авторы благодарят С.Г.Матиняна, С.Г.Инджяна за полезные обсуждения и З.Т.Погосяна за помощь в работе.

Таблица

	Q_c	X_c	$L(Q=2)$	$L(Q=3)$	$L(Q=10)$	$L(Q=20)$
[3, 3]	1,48	0,8226	0,0970	0,2174	0,5066	0,6294
[4, 3]	1,42	0,8388	0,1043	0,2214	0,5069	0,6295
[3, 4]	1,41	0,8426	0,1055	0,2209	0,5069	0,6295
[4, 4]	1,49	0,8191	0,095	0,2151	0,5063	0,6293
[5, 4]	1,25	0,8929	0,1214	0,2285	0,5073	0,6295
[4, 5]	1,003	0,9986	0,1333	0,2319	0,5074	0,6295
[5, 5]	1,39	0,8488	0,1095	0,2240	0,5072	0,6295
Monte-Karlo			0,124	0,229		

1. Wilson K. Phys. Rev. 1974. v.D10. P.2445.
2. Kogut J. preprint University of Illinois
ILL-(TH)-82-46.
3. Mack G. Phys. Lett. 1978. v.B78. P.263.
4. t Hooft G. Nucl. Phys. 1978. v.B138. P.1.
5. Kogut J. Phys. Rev. 1980. v. D21. P.2316.
6. Ginsparg P. et al. Nucl. Phys. 1980. v.B170. [FS1]
P.409.
7. Akhayan A.Z., Ananikian N.S. J. of Phys. 1992. v.A25.
M11.
8. Ананикян Н.С., Ахелян А.З. ЯФ. 1990. т. 51. с.1770.
9. Ananikian N.S., Izmailyan N.Sh. Phys. Lett. 1985.
v.B151. P.142.
10. Зыков А. А. УМН. 1974. т. 29. с. 89.
11. Фукс А.Б., Фоменко А.Т., Гутенмахер В.Л.
Гомотопическая топология. Москва: МГУ, 1979.
12. Baxter R. J. Phys. 1973. v.C6. P.1445.
13. Kogut J., Sinclair D. preprint University of Illinois
ILL-(TH)-81-39.
14. Frohlich J. Phys. Lett. 1979. v.B83. P.195.
15. Creutz M., Jacobs L. and Rebbi C. Phys. Rev. 1979.
v.D20. P.1915.

Рукопись поступила 23 июля 1992 г.

Н.С.АНАНИКЯН, Н.Ш.ИЗМАИЛЯН, В.А.ПОГОСЯН

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ КАЛИБРОВОЧНЫХ МОДЕЛЕЙ ПОТТСА И
ИХ I/Q - РАЗЛОЖЕНИЕ

Редактор Л.П.Мукаян

Технический редактор А.С.Абрамян

Подписано в печать 3/IX-92

Формат 60x84/16

Офсетная печать. Уч. изд. л. 0.5

Тираж 110 экз. Ц. 7 к.

Зак. тип. № 52

Индекс 3649

Отпечатано в Ереванском физическом институте

Ереван 36, ул. Братьев Алиханян, 2

**The address for requests:
Information Department
Yerevan Physics Institute
Alikhanian Brothers 2,
Yrevan, 375036
Armenia, USSR**



ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ