Препринт ЕрФИ 1576(1)-2002

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
YEREVAN PHYSICS INSTITUTE

М. Б. МИРУМЯН

ФЕРМИОННАЯ МОДЕЛЬ УЙМИНА-ЛАЯ-САЗЕРЛЭНДА СПИНА 1

ЕРЕВАН 2002

Ույմինի – Լայի - Սազերլենդի սպին -1 ֆերմիոնային մոդելը

Երևանի ֆիզիկայի ինստիտուտ,
Ալիխանյան եղբայրների փող. 2, Երևան,
Հայաստանի հանրապետություն

Անոտացիա

Աշխատանքում դիտարկված է Ույմինի-Լայի-Սազարլենդի մոդելը սպին 1-ի համար: Հանրահաշվական Բետեի անզացի մոքոդով գտնված են համակարգի թրանսֆեր մատրիցայի սեփական վեկտորներն ու սեփական արժեքները:

1. Введение

Точно-решаемые модели статистической физики и теории поля, относящиеся к малому числу измерений (d=0,1,2), давно находятся в сфере пристального внимания физиков-теоретиков. В последнее время интерес к ним сильно возрос в связи с многочисленными приложениями к физике твёрдого тела. Так как развитие современных наноструктурных технологий позволяет рассматривать экспериментально проблемы в нольмерных (квантовые точки), одномерных (квантовые нити) и двухмерных (эффект Холла, высакотемпературная сверхпроводимость) мерных моделях. Известная одномерная решеточная модель Гейзенберга спина 1/2 с гамильтонианом

$$H = \sum_{i=1}^{N} \overline{\sigma_i \sigma_{i+1}} \qquad (1)$$

была впервые решена Бете в 1931 г. [1], с помощью подстановки, носяшей сейчас его имя (анзатц Бете). В течение последних 25 лет этот метод развился в мощный формализм под названием “квантовый метод обратной задачи рассеяния” (***КМОЗР***) [2,3] или алгебраический анзатц Бете (***ААБ***). Метод позволяет найти полное множество собственных значений и собственных векторов интегрируемой системы. На квантовом уровне интегрируемость модели обеспечивается требованием выполнения уравнений Янга-Бакстера, которые эквивалентны существованию бесконечного числа законов сохранения. Затем с помощью алгебраического анзатца Бете может быть найден энергетический спектр модели [4,5]. Так как фермионное пространство Фока конечномерно, то применение ***ААБ*** в матричной формулировке намного упрощается. Обеспечивающая интегрируемость модели система уравнений, которые впоследствии были названы уравнениями Янга-Бакстера, впервые были выведены в работе Янга [2]. Как покозал Бакстер [3], они эквивалентны наличию бесконечного числа законов сохранений для интегрируемой модели. Надо отметить, что техника ***ААБ*** в основном была развита в применениях к спиновой решеточной модели ***XXZ***, а его применение к моделям, изначально сформулированными при помощи антикоммутирующих операторов, оказалось сложнее. Например, для модели Хаббарда, которая изначально была решена методом координатоного анзатца Бете, применение ААБ оказалось возможным недавно [6], после существенных работ Шастри [7,8,9], в которых было использовано преобразование Йордана-Вигнера для перехода от фермионных операторов к спиновым с целью применения ***КМОЗР*** в матричной формулировке. В посленее время интерес к спиновым решеточным моделям, сформулированными посредством ферми-операторов с использованием преобразования Йордана-Вигнера [15], а также некоторых новых методов, развытых в работах [5,6,7], повысился.

Оказалось, что явное построение интегрируемых моделей и

применение ***КМОЗР*** в терминах ферми-операторов становится сравнительно легкой задачей. Так как пространство Фока фермиона конечномерно, то изучение полного набора собственных векторов и собственных значений трансфер матрицы упрощается. Известно, что тривиальное обобщение модели Гейзенберга на высшие спины неинтегрируемо [13]. Первая интегрируемая модель спина *s* была сформулирована Г. Уймином (G. Uimin)[8], Дж. К. Лайем(J. K. Lai)[9] и Б. Сазерлэндом (B. Sutherland)[10]. Ими была иследована модель с гамильтонианом

$$H = J\sum_{i=1}^{N}\left(Id_{i,i+1} + P_{i,i+1}\right) \qquad \left(N+1=1\right) \tag{2}$$

где $P_{i,i+1}$ -оператор перестановки сосотояний в узлах *i* и *i + 1*, а $Id_{i,i+1}$ - единичный оператор. Они показали интегрируемость и решили ее с помощью координатого анзатца Бете.

В данной рабрте исследована решеточная модель Уймина-Лая-Сазеленда спина *1*. Методом ***ААБ*** найдены спектр трансфер-матрицы исследуемой модели и система трансцендентных уравнений Бете.

2. Фермионное представление модели

Для исследования модели Уймина-Лая-Сазеланда спина 3/2 на языке фермионных операторов, нам необходимо построить представление алгебры *su(2)* в пространстве операторов рождения и уничтожения фермионов двух сортов. Как известно, алгебра *su(2)* определяется следующими коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned}&\left[S^{+};S^{-}\right]=2S;\\&\left[S;S^{\pm}\right]=\pm S^{\pm}.\end{aligned} \tag{17}$$

Как показано в [14], представление алгебры *su(2)* в кольце операторов рождения и уничтожения двух сортов фермионов имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&S^{+}=\left(1-n_{1}\right)c_{2}+\left(1-n_{2}\right)c_{1}^{+};\\
&S^{-}=\left(1-n_{2}\right)c_{1}+\left(1-n_{1}\right)c_{2}^{+};\\
&S=n_{1}-n_{2},
\end{aligned}
\tag{19}
$$

где $c_i^+, c_i (i=1,2)$ операторы рождения и уничтожения соответствующих фермионов: $\left\{c_i^+;c_i\right\}=\delta_{ij}$, а $n_i=c_i^+c_i$.

А само представление алгебры ***su(2)*** спина *1* в пространстве Фока двух фермионов определяется на векторах:

$$
\left|+\right\rangle=\left|1\right\rangle\left|0\right\rangle;\left|0\right\rangle=\left|0\right\rangle\left|0\right\rangle;\left|-\right\rangle=\left|0\right\rangle\left|1\right\rangle,
\tag{20}
$$

где мы отбрасываем вектор $\left|1\right\rangle\left|1\right\rangle$.

Индесы градуировки векторов следующие:

$$
\begin{aligned}
&p\left(\left|+\right\rangle\right)=p\left(\left|-\right\rangle\right)=1;\\
&p\left(\left|0\right\rangle\right)=0.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Для оператора Казимира C алгебры *su(2)* имеем:

$$
\begin{aligned}
&C=S^{+}S^{-}+S^{-}S^{+}+S^{2};\\
&\left[C;S^{a}\right]=0.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Легко проверить, что оператор определенный как

$$
\begin{aligned}
&\Delta=\frac{1}{2}C=1-n_{1}n_{2};\\
&\Delta^{2}=\Delta.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

проектирует 4-мерное пространство состояний Фока двух фермионов на 3-мерное подпространство V с базисом (20), причем $\ker K=\ker S=\ker S^{\pm}$. Таким образом, получили, что

$$
F\otimes F\otimes F=V\oplus\ker K,
\tag{24}
$$

где $V\subset F\otimes F\otimes F$.

Для спина *1* оператор Хаббарда имеет вид:

$$
\begin{aligned}
X_{im}^{k}=\left|m\right\rangle_{i},\left\langle k\right|&=\begin{pmatrix}\left|-\right\rangle\left\langle -\right| & \left|-\right\rangle\left\langle 0\right| & \left|-\right\rangle\left\langle +\right|\\ \left|0\right\rangle\left\langle -\right| & \left|0\right\rangle\left\langle 0\right| & \left|0\right\rangle\left\langle +\right|\\ \left|+\right\rangle\left\langle -\right| & \left|+\right\rangle\left\langle 0\right| & \left|+\right\rangle\left\langle +\right|\end{pmatrix}_{i}=\\
&=\begin{pmatrix}\left(1-n_{1}\right)n_{2} & \left(1-n_{1}\right)c_{2}^{+} & c_{2}^{+}c_{1}\\ \left(1-n_{1}\right)c_{2} & \left(1-n_{1}\right)\left(1-n_{2}\right) & \left(1-n_{2}\right)c_{1}\\ c_{1}^{+}c_{2} & \left(1-n_{2}\right)c_{1}^{+} & n_{1}\left(1-n_{2}\right)\end{pmatrix}_{i}
\end{aligned}
\tag{25}
$$

где индекс *i* означает *i*-ый узел решетки. Для R-матрицы имеем (см. например [10]):

$$
\breve{R}(u)_{ms}^{kq}=\delta_{m}^{k}\delta_{s}^{q}+u\delta_{s}^{k}\delta_{m}^{q};\left(k,m,s,q=\pm,0\right).
\tag{26}
$$

Согласно (13), оператор Лакса имеет следующий вид:

$$
L_{i}(u)=\begin{pmatrix}\mathrm{u}-(1-\mathrm{n}_{1})(1-\mathrm{n}_{2}) & (1-\mathrm{n}_{1})c_{2}^{+} & -c_{1}^{+}c_{2}\\ \left(1-n_{1}\right)c_{2} & \mathrm{u}+(1-\mathrm{n}_{1})\mathrm{n}_{2} & c_{1}^{+}n_{2}\\ c_{1}^{+}c_{2} & c_{1}n_{2} & 1-n_{1}n_{2}\end{pmatrix}_{i}.
\tag{27}
$$

Согласно формулам (19,20,27) порождающим вектором является вектор млдащего веса представления - $\left|-\right\rangle_{i}$.

Уравнения Янга-Бэкстера имеют вид [14]:

$$
\begin{aligned}
&L_{m}^{k}(u)L_{s}^{q}(v)+\left(u-v\right)(-1)^{p(m)p(q)+P(k)p(q)+p(m)p(k)}L_{s}^{k}(u)L_{m}^{q}(v)=\\
&=L_{m}^{k}(u)L_{s}^{q}(v)+\left(u-v\right)(-1)^{p(q)p(s)+P(m)p(q)+p(s)p(m)}L_{m}^{q}(v)L_{s}^{k}(u),
\end{aligned}
\tag{28}
$$

По определению, матрица монодромии $T(u)$ есть произведение *N* операторов Лакса (27), и является матрицой 3×3. Обозначим ее как

$$
T(u)=\begin{pmatrix}A(u) & D_{1}(u) & D_{2}(u)\\ D_{1}^{+}(u) & B(u) & F(u)\\ D_{2}^{+}(u) & F^{+}(u) & G(u)\end{pmatrix}.
\tag{29}
$$

Можно показать, что

$$T(u)|\Omega\rangle=\begin{pmatrix}\alpha(u)|\Omega\rangle & 0 & 0\\ * & \beta(u)|\Omega\rangle & 0\\ * & 0 & \gamma(u)|\Omega\rangle\end{pmatrix},$$

где *-ой обозначены некоторые ненулевые состояния а

$$|\Omega\rangle=\prod_{j=1}^{N}|-\rangle_j,\alpha(u)=\gamma(u)=u^N,\beta(u)=(u+1)^N.$$

По определению трансфер-матрицы, имеем

$$\tau(u)=str_a T(u)\equiv(-1)^{p(j)}T_j^j(u)=$$
$$=B(u)-A(u)-G(u), \tag{30}$$
$$\tau(u)|\Omega\rangle=\left((u+1)^N-u^N\right)|\Omega\rangle$$

В соответствие с методом Бете, собственные векторы трансфер-матрицы будем искать в виде

$$\begin{aligned}|v_1\cdots v_n\rangle_{sym}&=f^{(a_1\cdots a_n)}D^+_{a_1}(v_1)\cdots D^+_{a_n}(v_n)|\Omega\rangle\\ |v_1\cdots v_n\rangle_{asym}&=f^{[a_1\cdots a_n]}D^+_{a_1}(v_1)\cdots D^+_{a_n}(v_n)|\Omega\rangle'\end{aligned}\tag{31}$$

где

$$f^{(a_1\cdots a_n)}\equiv\frac{1}{n!}\left(f^{a_1\cdots a_n}+(-1)^{p(a_1)p(a_2)}f^{a_2a_1\cdots a_n}+\cdots\right),$$

$$f^{[a_1\cdots a_n]}\equiv\frac{1}{n!}\left(f^{a_1\cdots a_n}-(-1)^{p(a_1)p(a_2)}f^{a_2a_1\cdots a_n}+\cdots\right)$$

соответственно симметричные и антисимметричные тензоры. Воспользуясь уравнениями Янга-Бэкстера можно показать, что

$$\tau(u)|v_1\cdots v_n\rangle_{sym}=\Lambda_s^{(n)}(u,v_1\cdots v_n)|v_1\cdots v_n\rangle_{sym} \tag{32}$$

и

$$\tau(u)|v_1\cdots v_n\rangle_{asym}=\Lambda_a^{(n)}(u,v_1\cdots v_n)|v_1\cdots v_n\rangle_{asym}, \tag{33}$$

если выполнены следующие системы уравнений Бете:

$$\frac{(v_i+1)^N}{v_i^N}=\prod_{i=1}^{N}\frac{v_i-v_j-1}{v_i-v_j+1} \tag{34}$$
$$v_i\neq v_j, i\neq j,(i=1,\ldots,n)$$

для симметричного и

$$(v_i+1)^N=v_i^N,v_i\neq v_j,i\neq j, \tag{35}$$

для антисимметричного случая соответсвенно, а для собственных значений в (32,33) имеем

$$\begin{aligned}\Lambda_s^{(n)}(u,v_1\cdots v_n)&=(u+1)^N\prod_{k=1}^{N}\frac{u-v_k-1}{u-v_k}+u^N\left(\prod\frac{u-v_k+1}{u-v_k}-1\right),\\ \Lambda_a^{(n)}(u,v_1\cdots v_n)&=u^N+\left((u+1)^N-u^N\right)\prod_{k=1}^{N}\frac{u-v_k-1}{u-v_k}\end{aligned}\tag{36}$$

Список литературы

[1] H.Bethe - **Z.Phys** ***79 (1931)*** 205

[2] C.N.Yang - **Phys.Rev. 168 (1968)** 1920,

[3] R.J.Baxter-**Ann.of Phys. 70 (1972)**193, **Ann.of Phys. 70** (1972)323, **Ann.of Phys. 76 (1972)** 1, **Ann.of Phys. 76 (1972)** 25,

[4] L.Faddeev,L.Takhtajian-**Russian Math.Surveys 34:5 (1979)**11, V.Korepin, N.M.Bogoliubov, A.Izergin-Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions-Cambridge Univ.Press-1993. Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фаддеев-Гамильтонов подход в теории солитонов-Москва наука-1986

[5] T.Hakobyan and A.Sedrakyan **-Phys.Lett. 377B (1996)**250

[6] A.Avakyan, T.Hakobyan and A.Sedrakyan **-Nucl.Phys. 490B [FS] (1997)** 633; J.Ambjorn, A.Avakyan, T.Hakobyan, A.Sedrakyan-**Mod.Phys.Let. A 13(1998)** 495; J.Ambjorn, A.Avakyan, T.Hakobyan, A.Sedrakyan-Bethe Ansatz and Thermodinamic Limit of Affine Quantum Group Invariant

Extensionsof the t-J Model; Cond-Mat/9802128. to be published inJ. Math.Phys,

[7] F.Gohmann, Sh. Murakami-**J. Phys.A:Math.Gen 31 (1998)**7729,

[8] G.Uimin- **JETP Lett. 12 (1970)** 225,

[9] J.K.Lai- **J.Math.Phys. 15 (1974)** 1675,

[10] B.Sutherland- **Phys.Rev. B12 (1975)** 3795,

[11] F.H.L.Essler, V.Korepin-**Phys.Rev. 46B (1992)** 9247,

[12] V.Korepin, F.H.L.Esler-Excatly Solvable of Strongly Correlated Elactrons-Word Scientific-(1994), P.Sutherland-**Phys.Rev. 12B (1987)** 5177, C.K.Lai – **J. Math. Phys. 15 (1974)** 167, S.Sarkar – **J. Phys. 24A (1991)** 5775, P.A.Bares, G.Blatter, M. Otaga – **Phys. Rev. 44B(1991)** 130, D. Forster – **Phys. Rev. Lett. 63(1989)** 2140,

[13] F. D. M. Haldain – **J. Phys. C14(1981)** 2585,

[14] J. Ambjorn, D. Karakhanyan, M. Mirumyan, A. Sedrakyan– **Nucl.Phys. B599 (2001)** 547-560,

[15] P. Dargis, Z. Maassarani – **Nucl. Phys. 535B(1998)** 681

Технический редактор А. С. Абрамян
Подписано в печать 06.05.2002 Формат 60x84/16
Офсетная печать. Уч.изд. л. 0.8 Тираж 100
Зак. Тип. 220

Отпечатано в Ереванском Физическом Институте
Ереван-36, ул. Братьев Алиханян, 2.