ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ԳԻՏԱԿԱՆ ՀԱՂՈՐԴՈՒՄ НАУЧНОЕ СООБЩЕНИЕ

ЕФИ—198(44)-76

И.А. БАТАЛИН, С.Г. МАТИНЯН, Г.К. САВВИДИ

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА КАЛИБРОВОЧНЫМ ПОЛЕМ, СВОБОДНЫМ ОТ ИСТОЧНИКОВ

АРУС

ԵՐԵՎԱՆ 1976 ЕРЕВАН

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Научное сообщение ЕФИ-198(44)-76

И.А.БАТАЛИН [ж)], С.Г.МАТИНЯН, Г.К.САВВИДИ

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА КАЛИБРОВОЧНЫМ ПОЛЕМ, СВОБОДНЫМ ОТ ИСТОЧНИКОВ

ж) Физический институт имени П.Н.Лебедева АН СССР

Ереван 1976

1. Введение

В предыдущей работе [1] был предложен метод вычисления эффективного действия Γ и функции Грина во внешнем поле.

Основой подхода служил развитый Швингером в квантовой электродинамике [2] явно ковариантный метод вычисления эффективного действия, основанный на сведении вычислений к динамической задаче для некоторой "частицы", пространственно-временные координаты которой определяются уравнениями движения в собственном времени.

В квантовой электродинамике (к.э.д.) суммирование однопетлевых вкладов привело к хорошо известному лагранжиану Гейзенберга-Эйлера, а в $\lambda\varphi^4$ теории точный однопетлевой лагранжиан был получен в двух случаях: постоянного поля φ и поля плоской волны (см.1). Найдено, что поляризация вакуума в обоих случаях совпадает, тогда как хорошо известно, что в к.э.д. плоская волна, распространяющаяся в электронно-позитронном вакууме, не поляризует его [2].

В настоящей работе тем же методом изучаются однопетлевые поправки в теории Янга-Миллса (Я.-М.), обусловленные поляризацией вакуума этого поля. Рассмотрение проводится в произвольной ковариантной калибровке.

В частном случае ковариантно постоянных полей вычислена однопетлевая поправка $W^{(1)}$ к эффективному действию Γ , аналогичная поправке Гейзенберга – Эйлера в к.э.д. Показано, что в пределе сильного "магнитного" поля Янга–Миллса поляризация логарифмически падает [ж)]. Данный факт является непосредственным проявлением асимптотической свободы теории. В случае же "электрического" поля имеет место сильная нестабильность вакуумного состояния.

2. Общий формализм

Рассмотрим поле Я.–М., соответствующее группе SU (2)[жж)]. Классическое действие имеет вид

$$S_{Y.M}[A] = -\frac{1}{4}\int d^4x\, G^a_{\mu\nu}\, G^a_{\mu\nu}, \tag{2.1}$$

где

$$G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - g\,\varepsilon^{abc} A^b_\mu A^c_\nu \tag{2.2}$$

– тензор напряженности; ε^{abc} – структурные константы $SU(2)$. Действие (2.1) инвариантно относительно инфинитезимальных калибровочных преобразований

$$A^a_\mu \to A^a_\mu + \nabla^{ab}_\mu(A)\,\delta\xi^b, \tag{2.3}$$

ж) Лагранжиан Гейзенберга–Эйлера в к.э.д. в соответствующем случае логарифмически растет с полем.

жж) Настоящее рассмотрение легко обобщается на произвольную группу.

где

$$\nabla_{\mu}^{ab}(A) = \delta^{ab}\partial_{\mu} - g\,\varepsilon^{acb}A_{\mu}^{c} \qquad (2.4)$$

– ковариантная производная, обладающая свойством

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] = -g\,\hat{G}_{\mu\nu}, \qquad (2.5)$$

причем, например, $\hat{G}_{\mu\nu}^{ab} = \varepsilon^{acb} G_{\mu\nu}^{c}$.

Однопетлевой вклад в эффективное действие $\bar{\Gamma}$ есть [3–5] :

$$\bar{\Gamma}[A,\bar{A}] = S_{(\alpha)}[A,\bar{A}] + \frac{i}{2}\,\mathrm{Sp}\,\ln\left[\frac{\delta^{2}S_{(\alpha)}[A,\bar{A}]}{\delta A\ \delta A}\right] - \qquad (2.6)$$

$$- i\,\mathrm{Sp}\,\ln\left[\nabla_{\mu}(\bar{A})\nabla_{\mu}(A)\right].$$

Здесь, Sp означает полный след операторов, включающий суммирование по лоренцевским и внутренним индексам и интегрирование по четырехмерному пространству. В этом выражении классическое действие $S_{(\alpha)}$ имеет вид

$$S_{(\alpha)}[A,\bar{A}] = S_{Y.M}[A] - \frac{\alpha}{2}\int d^{4}x\left[\nabla_{\mu}^{ab}(\bar{A})(A-\bar{A})_{\mu}^{b}\right]^{2}, \qquad (2.7)$$

где второй член соответствует так называемым ковариантным калибровкам [3,4] ; α – параметр калибровки. Входящее в (2.6) и (2.7) поле $\bar{A}$ рассматривается как "внешнее" при всех функциональных дифференцированиях, после чего оно берется равным A .

Мы будем исследовать эффективное действие $\Gamma(A) = \bar{\Gamma}(A, A)$ для полей A, удовлетворяющих классическим уравнениям движения в отсутствии источников

$$\nabla_\nu^{ab} G^b_{\nu\mu} = 0 . \tag{2.8}$$

Для этого класса полей из тождеств Уорда следует,что функция $\Gamma[A]$ не зависит от калибровочного параметра α [6,7] . Ниже мы сможем явно убедиться в этом факте.

Выполняя в (2,6) функциональное дифференцирование и полагая $\bar{A} = A$, получим

$$\Gamma[A] = S_{Y.M.} + W^{(1)}_{Y.M.} + W^{(1)}_{F.P.} , \tag{2.9}$$

где

$$W^{(1)}_{Y.M.} = \frac{i}{2} S_p \ln [H(\alpha)] , \tag{2.10}$$

$$W^{(1)}_{F.P.} = -i S_p \ln [H_0] \tag{2.11}$$

$$H_{\mu\nu}(\alpha) = g_{\mu\nu} \nabla_\sigma \nabla_\sigma - 2g G_{\mu\nu} + (\alpha - 1) \nabla_\mu \nabla_\nu \tag{2.12}$$

$$H_0 = \nabla_\sigma \nabla_\sigma \tag{2.13}$$

Из (2,5) и (2,12) следует, что

$$\nabla_\mu H_{\mu\nu}(\alpha) = \alpha H_0 \nabla_\nu - g[\nabla_\mu, \hat{G}_{\mu\nu}] \qquad (2.14)$$

Принимая во внимание, что

$$[\nabla_\mu, \hat{G}_{\mu\nu}] \equiv \widehat{\nabla_\mu G_{\mu\nu}},$$

для полей, удовлетворяющих (2.8) получим

$$\nabla_\mu H_{\mu\nu}(\alpha) = \alpha H_0 \nabla_\nu . \qquad (2.15)$$

Используя для (2.10) и (2.11) представление собственного времени [2.1] имеем

$$W^{(1)}_{Y.M.} = -\frac{i}{2}\int_0^\infty ds\, s^{-1} S_p[e^{-iH(\alpha)s}], \qquad (2.16)$$

$$W^{(1)}_{F.P.} = i\int_0^\infty ds\, s^{-1} S_p[e^{-iH_0 s}] \qquad (2.17)$$

С помощь (2.15) представим оператор $e^{-iH(\alpha)s}$ в виде

$$\left(e^{-iH(\alpha)s}\right)_{\mu\nu} = \left(e^{-iH(1)s}\right)_{\mu\nu} +$$

$$+i(1-\alpha)\int_0^s dt \left(e^{-iH(1)(s-t)}\right)_{\mu p} \nabla_p e^{-i\alpha H_0 t} \nabla_\nu . \qquad (2.18)$$

Подставляя (2.18) в (2.16), найдем

$$W^{(1)}_{Y.M} = -i/2 \int_0^{\infty} ds\ s^{-1}\ S_p\, U(s) +$$

$$+ \frac{1-\alpha}{2} \int_0^{\infty} \frac{ds\,dt}{\alpha s + t}\ S_p \left\{ U(s) \nabla U_0(t) \nabla \right\}, \qquad (2.19)$$

где

$$U(s) = e^{-iH(1)s} \qquad (2.20)$$

$$U_0(s) = e^{-iH_0 s}\ . \qquad (2.21)$$

Из (2.15) и (2.20) следует, что

$$\nabla U(s) = U_0(S) \nabla\ . \qquad (2.22)$$

После чего, производя во втором слагаемом (2.19) циклическую перестановку и используя (2.22), можно увидеть, что оно сводится к постоянному члену

$$i/2\ \ \ln\alpha\ S_p\, 1\,.$$

Тем самым, с точностью до тривиального слагаемого, независящего от поля, явно доказана независимость эффективного действия Γ от калибровочного параметра α.

Итак, имеем

$$W^{(1)}_{YM} = -i/2 \int_0^{\infty} \frac{ds}{S}\ S_p\ U(S)\ . \qquad (2.23)$$

$$W^{(1)}_{F.P.} = i\int\limits_0^\infty \frac{ds}{s}\, Sp\, U_0(s)\,. \qquad (2.24)$$

Приведем также выражения для операторов, обратных H_0 и $H(\alpha)$: в последнем явно выделена калибровочная зависимость с помощью соотношения (2.15)

$$\mathcal{D} \equiv \frac{1}{H_0 - i\varepsilon} = i\int\limits_0^\infty ds\; U_0(s)\,, \qquad (2.25)$$

$$\Delta \equiv \frac{1}{H(\alpha) - i\varepsilon} = i\int\limits_0^\infty ds\, U(s) \, +$$

$$+ \frac{\alpha - 1}{\alpha}\int\limits_0^\infty ds\, dt\; U(s)\,\nabla\, U_0(t)\,\nabla \qquad (2.26)$$

Таким образом, задача вычисления однопетлевого лагранжиана и функций Грина определяется формулами (2.23) - (2.26), и для ее решения необходимо знание матричных элементов операторов (2.20) и (2.21). Основой для этого может служить метод Швингера[2], использованный в[1] для $\lambda\varphi^4$ теории.

3. Ковариантно постоянное поле

Простейшим нетривиальным решением (2.8) является ковариантно-постоянное поле, для которого

$$\nabla_\rho^{ab}\, G^b_{\mu\nu} = 0\,. \qquad (3.1)$$

Уравнение (3.1) является естественным обобщением постоянного однородного поля электродинамики ($\partial_\rho F_{\mu\nu} = 0$).

Действуя коммутатором $[\nabla_\lambda\,,\ \nabla_\rho]^{ab}$ на $G_{\mu\nu}$ и используя (2.5), (3.1), получим

$$\varepsilon^{abc}\, G^{b}_{\mu\nu}\, G^{c}_{\lambda\rho} = 0 . \tag{3.2}$$

Из (3.2) следует, что

$$G^{a}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}\, n^{a} , \tag{3.3}$$

где n^{a} -некоторый изотопический вектор .

Если (по напрашивающейся аналогии с электродинамикой) искать общее решение (3.1) в виде

$$A^{a}_{\mu} = -\frac{1}{2} G^{a}_{\mu\nu} x^{\nu} + a^{a}_{\mu} , \tag{3.4}$$

то подставляя (3.4) в уравнения (3.1) и используя (3.2), найдем

$$\left(\delta^{ab}\partial_{\rho} - g\,\varepsilon^{acb} a^{c}_{\rho}\right) G^{b}_{\mu\nu} = 0 . \tag{3.5}$$

Кроме того, используя (3.2) и (3 .5) , из (2.2) имеем

$$\partial_{\mu} a^{b}_{\nu} - \partial_{\nu} a^{b}_{\mu} - g\,\varepsilon^{bcd} a^{c}_{\mu} a^{d}_{\nu} = 0 . \tag{3.6}$$

Из (3.6) следует, что

$$\hat{a}_{\mu} = -g^{-1} S^{-1} \partial_{\mu} S, \tag{3.7}$$

где S - произвольная матрица из присоединенного представления группы.

Соотношения (3.4) и (3.7) задают общее калибровочно инвариантное решение уравнения (3.1). Выбирая калибровку $a = 0$, из (3.4), (3.3) и (3. 5) имеем:

$$A^{a}_{\mu} = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} x_{\nu}\, n^{a}, \tag{3.8}$$

где $F_{\mu\nu}$ и n^a не зависят от x, причем $n^a n^a = 1$. Таким образом, ковариантно постоянное поле Я.-М. фактически сводится к абелеву тензору $F_{\mu\nu}$.

Условие ковариантного постоянства (3.1), записанное в виде

$$[\nabla_\rho, \hat{G}_{\mu\nu}] = 0, \tag{3.9}$$

дает для оператора (2.20) факторизацию

$$U(s) = \exp\{2ig\hat{G}s\} U_0(s). \tag{3.10}$$

Соотношение (3.10) сводит задачу вычисления величин (2.23) - (2.26) к нахождению матричного элемента оператора $U_0(s)$, вычисление которого, как уже неоднократно отмечалось, эквивалентно решению динамической задачи для некоторой "частицы" [1,2]. Соответствующий результат имеет вид:

$$(x'|U_0(s)|x'') = -\frac{i}{(4\pi)^2} s^{-2} \exp\{-\frac{i}{4}(x'-x'')\hat{K}(s)(x'-x'') + \frac{i}{2}x'\hat{N}x'' - \hat{L}(s)\}, \tag{3.11}$$

где

$$\hat{N} = ig\hat{G}$$

$$\hat{K}(s) = \hat{N}\,\mathrm{cth}(\hat{N}s)$$

$$\hat{L}(s) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\ln[(\hat{N}s)^{-1}\mathrm{sh}(\hat{N}s)]; \tag{3.12}$$

символ tr здесь и в дальнейшем означает след по лоренцевским индексам.

Раскрывая в (2.23), (2.24) полный след операторов

$$Sp = tr\,\hat{tr}\int d^4x \tag{3.13}$$

и используя (3.11), для однопетлевого лагранжиана получим

$$\mathcal{L}^{(1)} = -\frac{1}{32\pi^2}\int_0^\infty \frac{ds}{s^3}\, tr\,\hat{tr}\, exp\{2\hat{N}s - \hat{L}(s)\} + \frac{1}{16\pi^2}\int_0^\infty \frac{ds}{s^3}\,\hat{tr}\, exp\{-\hat{L}(s)\}, \tag{3.14}$$

причем $\hat{tr}$ означает след по изотопическим индексам. Вычисление следов в (3.14) производится с помощью собственных значений матриц F и $\hat{n}$:

$$F_{(1)}^2 = -\mathcal{F} - (\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2)^{1/2} \tag{3.15}$$

$$F_{(2)}^2 = -\mathcal{F} + (\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2)^{1/2} \tag{3.16}$$

$$n = 0, \pm i, \tag{3.17}$$

где

$$\mathcal{F} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \qquad \mathcal{G} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^*_{\mu\nu},$$

В результате получим

$$\mathcal{L}^{(1)}=-\frac{2}{(4\pi)^2}\int_0^\infty\frac{ds}{s^3}\frac{gF_{(1)}s\;gF_{(2)}s}{sh(gF_{(1)}s)sh(gF_{(2)}s)}\Big[ch(2gF_{(1)}s)+$$

$$+ch(2gF_{(2)}s)-1\Big]=$$

$$=-2\frac{1}{16\pi^2}\int_0^\infty\frac{ds}{s^3}\frac{gF_{(1)}s\quad gF_{(2)}s}{sh(gF_{(1)}s)\,sh(gF_{(2)}s}-$$

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty\frac{ds}{s^3}\,gF_{(1)}s\;gF_{(2)}s\Big[\frac{sh(gF_{(1)}s}{sh(gF_{(2)}s)}+$$

$$+\frac{sh(gF_{(2)}s)}{sh(gF_{(1)}s)}\Big]. \tag{3.18}$$

Первый интеграл в правой части (3.18) с точностью до коэффициента 2 совпадает с выражением для однопетлевого лагранжиана скалярной электродинамики [2] . Удвоение этого выражения связано с увеличением фазового объёма из-за присутствия изотопической степени свободы. Второй интеграл в (3.18) обусловлен "спиновым" вкладом ж) $2g\hat{G}$ оператора $H(1)$.

Выбирая жж) контур интегрирования так, чтобы обеспечить сходимость интегралов при больших S , представим (3.18) в виде:

ж) В спинорной электродинамике соответствующий вклад происходит от члена $\frac{1}{2}e\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$

жж) Фактически это сводится к замене $S\to-iS$ в первом и третьем слагаемом (3.18)

$$\mathcal{L}^{(1)} = 2\,\frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{S_0}^{\infty}\frac{dS}{S^3}\,\frac{gf_1 S\cdot gf_2 S}{\operatorname{sh}(gf_1 S)\sin(gf_2 S)} +$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{S_0}^{\infty}\frac{dS}{S^3}\; gf_1 S\; gf_2 S\left[\frac{S\operatorname{ch}(gf_1 S)}{\operatorname{sh}(gf_2 S)} - \right. \tag{3.19}$$

$$\left. - \frac{\sin(gf_2 S)}{\operatorname{sh}(gf_2 S)}\right],$$

где f_1 и f_2 вещественны:

$$f_1 = \frac{1}{2}F_{(1)}\,, \qquad f_2 = F_{(2)} \tag{3.20}$$

S_0 – параметр обрезания.

Рассмотрим выражение (3.19), соответствующее чисто "магнитному" полю $\mathcal{G} = 0$, $\mathcal{F} > 0$. В этом случае имеем

$$f_1 = \sqrt{\vec{H}^2} \equiv H\;; \qquad f_2 = 0\,. \tag{3,21}$$

Подставляя (3.21) в (3.19) получим

$$\mathcal{L}^{(1)}(H) = \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{S_0}^{\infty}\frac{dS}{S^3}\,\frac{gHS}{\operatorname{sh}(gHS)} + \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{S_0}^{\infty}\frac{dS}{S^3}\,\frac{gHS}{\sin^{-1}(gHS)}\,. \tag{3.22}$$

Применяя стандартную процедуру перенормировки, в пределе сильного "магнитного" поля получим

$$\mathcal{L}^{(1)}(H) = -\frac{11}{48\pi^2}(gH)^2\,\ln\left(\frac{gH}{\mu^2}\right), \tag{3,23}$$

где μ^2 – произвольная масса, определяющая точку вычитания. Полученный результат есть главный логарифмический вклад однопетлевых диаграмм [ж)].

В хорошо известной работе [8] для получения вклада в асимптотику эффективного лагранжиана при больших полях от всех многопетлевых диаграмм применялся метод ренормализационной группы. Проанализируем выражение (3.23) с этой точки зрения. С этой целью составим отношение однопетлевого вклада в эффективное действие к классическому (см. [8]) и продифференцируем его по t, (t равно $\ln \frac{\varphi}{\mu^2}$, $\ln \frac{eH}{m_e^2}$, $\ln\left(\frac{gH}{\mu^2}\right)$ соответственно в теориях $\lambda\varphi^4$, к.э.д. и Я.-М) для функции Гелл-Манна Лоу получим

$$\beta_{\varphi}^{(1)} = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2}, \quad \beta_{к.э.д.}^{(1)} = \frac{e^3}{12\pi^2}, \quad \beta_{Y.M}^{(1)} = -\frac{11g^3}{24\pi^2}\text{ жж)}. \tag{3.24}$$

Именно отрицательный знак $\beta_{Y.M.}^{(1)}$ и (3.23) обеспечивает асимптотическую свободу теория Я.-М. [9].

Пользуясь методом, развитым в [8], мы можем получить главную логарифмическую (по полю) асимптотику вклада от многопетлевых диаграмм в эффективный лагранжиан

ж) В к.э.д. выражению (3.23) соответствует асимптотика
$$\mathcal{L}_{к.э.д.}^{(1)}(H) = \frac{(eH)^2}{24\pi^2}\ln\left(\frac{eH}{m_e^2}\right).$$

жж) Функция $\beta_{Y.M}^{(1)}$ совпадает с β-функцией Гелл-Манна Лоу, полученной в работе Гросса-Вилчека [9]

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{\text{эфф}}_{\text{Y.M}}}{\partial \mathcal{F}} = - \frac{g^2}{\bar{g}^2} , \qquad (3.25)$$

где
$$\frac{d\bar{g}}{dt} = \beta_{\text{Y.M}}(\bar{g})$$

В соответствующем случае к.э.д. мы имеем

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{к.э.д.}}}{\partial \mathcal{F}} = - \frac{e^2}{\bar{e}^2} ,$$

где

$$\frac{d\bar{e}}{dt} = \beta_{\text{к.э.д.}}(\bar{e}) .$$

При $\mathcal{G} = 0$, $\mathcal{F} < 0$ (чисто "электрическое" поле) имеем

$$f_1 = 0 \qquad f_2 = \sqrt{\vec{E}^2} \equiv E$$

поэтому

$$\mathcal{L}^{(1)}(E) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{S_0}^{\infty} \frac{ds}{s^0} \frac{gEs}{\sin(gEs)} - \frac{1}{4\pi^2} \int_{S_0}^{\infty} \frac{ds}{s^3} \frac{gEs}{\sin^{-1}(gEs} . \qquad (3.26)$$

Интеграл по собственному времени имеет особенности и лагранжиан (3.26) приобретает мнимую часть, вычисление которой дает ж)

$$2 \operatorname{Im} \mathcal{L}^{(1)} = \frac{(gE)^2}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{g^2 E^2}{48\pi} \qquad (3.27)$$

Поскольку вероятность всех процессов с сохранением вакуумного состояния дается величиной

ж) Выражение (3.27) с точностью до коэффициента 2 совпадает, естественно, с мнимой частью лагранжиана безмассовой частицы спина ноль.

$$\left|\exp\left\{i\Gamma\right\}\right|^2 = \exp\left\{-2\,\mathrm{Im}\,\Gamma\right\}, \tag{3.28}$$

то из (3.23) следует сильная нестабильность вакуумного состояния.

ЛИТЕРАТУРА

1. С.Г.Матинян, Г.К.Саввиди. ЯФ 25, № 1, 1977
2. J.Schwinger. Phys.Rev. 82, 664, 1951.
3. B.De Witt. Phys.Rev., 162, 1195, 1239, 1967.
4. J.Honerkamp. Nucl.Phys., B48, 269, 1972.
5. И.А.Баталин, И.В.Тютин. ЯФ, 20, 569, 1974
6. R.Kallosh. Nucl.Phys., B78, 293, 1974.
7. R.Fukuda, T.Kugo. Preprint RIFP-237, 1975.
8. S.Coleman, E.Weinberg. Phys.Rev., D7, 1888, 1973.
9. D.J.Gross, F.Wilczek. Phys.Rev., D8, 3633, 1973.

Рукопись поступила 30-го июля 1976 г.

Редактор Л.П.Мукаян
Тех.редактор А.С.Абрамян

Заказ 730 ВФ-04004 Тираж 299

Подписано к печати 15/XI-76г Формат издания 30х40

1,5 уч.изд.л. Ц.10 к.

Издано Отделом научно-технической информации
Ереванского физического института,Ереван 36, пер.Маркаряна 2