ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ԳԻՏԱԿԱՆ ՀԱՂՈՐԴՈՒՄ НАУЧНОЕ СООБЩЕНИЕ

ЕФИ—199(45)-76

С.Г. АРУТЮНЯН, Х.А. СИМОНЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОПЕРЕЧНОГО ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ ВБЛИЗИ $2Q_r+Q_z=16$ В ЕРЕВАНСКОМ СИНХРОТРОНЕ

АРУС
ԵՐԵՎԱՆ 1976 ЕРЕВАН

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Научное сообщение ЕФИ-199(45)-(76)

С.Г.АРУТЮНЯН, Х.А.СИМОНЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОПЕРЕЧНОГО ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ ВБЛИЗИ РЕЗОНАНСА $2Q_z + Q_r = 16$ В ЕРЕВАНСКОМ СИНХРОТРОНЕ

Ереван 1976

1. При расчете системы медленного вывода электронов из Ереванского синхротрона (АРУС), основанного на резонансной раскачке радиальных колебаний на квадратичном резонансе $3Q_r = 16$ [1,2], в первом приближении полагается, что движение в вертикальной плоскости остается устойчивым в процессе вывода.

Однако, в силу того, что частота на АРУС близка к значению 5.33, то создаваемые для резонанса $3Q_r = 16$ условия являются одновременно и причиной возникновения резонанса связи $2Q_z + Q_r = 16$, который может привести к существенному изменению динамики пучка при выводе, если вертикальные размеры пучка увеличиваются в процессе приближения частоты радиальных колебаний Q_r к резонансному значению $Q_{рез} = 16/3$.

Поскольку используемые на АРУС квадрупольные линзы обеспечивают изменение частоты Q_r на величину $\Delta Q_r = 0.08$, одновременно изменяя частоту Q_z лишь на величину $\Delta Q_z = -0.025$, то частицы возможно оказываются в полосе резонанса $2Q_z + Q_r = 16$. В связи с этим представляет интерес исследование динамики пучка вблизи этого резонанса.

В настоящей работе такое исследование проведено методом фазовой плоскости. Основой исследований являются укороченные уравнения бетатронных колебаний, полученные методом Крылова-Боголюбова.

Найдены условия при которых z -движение частиц устойчиво.

2. Уравнения движения бетатронных колебаний в синхротроне с учетом квадратичных членов по r и z имеют вид [3]

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} + \left(\frac{\ell}{2\pi}\right)^2 \frac{1-n(\theta)}{\rho^2} r = -\left(\frac{\ell}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{H_0 \rho}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial r^2}\right)(r^2 - z^2),$$

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + \left(\frac{\ell}{2\pi}\right)^2 \frac{n(\theta)}{\rho^2} z = \left(\frac{\ell}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{H_0 \rho}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial r^2}\right) r z, \qquad (1)$$

где r – означает горизонтальное, а z – вертикальное отклонение частицы от равновесной орбиты – замкнутой плоской кривой, состоящей из дуг постоянного радиуса ρ в магнитных блоках и отрезков прямой – между блоками; $n(\theta) = -\frac{\rho}{H_0}\frac{\partial H}{\partial r}$ – показатель спадания магнитного поля по радиусу, периодическая функция с периодом 2π; переменная θ изменяется на 2π на длине периода ℓ магнитной структуры кольца; H_0 – поле на орбите. В уравнениях (1) сделаем замену переменных (вариация постоянных [3])

$$r(\theta) = A_r(\theta) F_r(\theta) + A_r^*(\theta) F_r^*(\theta),$$

$$r'(\theta) = A_r(\theta) F_r'(\theta) + A_r^*(\theta) F_r'^*(\theta),$$

$$z(\theta) = A_z(\theta) F_z(\theta) + A_z^*(\theta) F_z^*(\theta), \qquad (2)$$

$$z'(\theta) = A_z(\theta) F_z'(\theta) + A_z^*(\theta) F_z'^*(\theta),$$

где $F_r(\theta)$ и $F_z(\theta)$ – известные функции Флоке решения (1) без правых частей, нормированных условием

$$F_j \frac{dF_j^*}{d\theta} - F_j^* \frac{dF_j}{d\theta} = -2i \qquad (j = r, z). \tag{3}$$

В полученной системе уравнений оставляя члены, дающие резонанс $2Q_z + Q_r = K$ (K -целое) имеем

$$\begin{aligned} \frac{dA_r}{d\theta} &= C_K A_z^{*2} e^{i\Delta\theta} \\ \frac{dA_z}{d\theta} &= 2C_K A_r^* A_z^* e^{i\Delta\theta}, \end{aligned} \tag{4}$$

где введены обозначения

$$\Delta = \frac{K - 2Q_z - Q_r}{M}$$

$$C_K \equiv |C_K| e^{i\beta_K} = \frac{1}{2\pi M} \int_0^{2\pi M} \frac{1}{2i} \left(\frac{\ell}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{H_0\rho} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial r^2}\right) f_z^{*2} f_r^* e^{-i\frac{K}{M}\theta} d\theta$$

$$f_j = F_j e^{-i\frac{Q_j}{M}} \qquad (j = r, z)$$

M -число периодов ℓ магнитной структуры на кольце. Если теперь перейдем к реальным амплитудам и фазам по формуле [3]

$$A_j = \frac{a_j}{2|F_j|_{max}} e^{i\chi_j} \qquad (j = r, z) \tag{5,6}$$

(предполагая $|F_r|_{max} = |F_z|_{max}$)
и к переменной $\varphi = \theta / M$, то уравнения (4) примут вид:

$$\frac{da_r}{d\varphi} = \gamma a_z^2 \sin(2\psi_z + \psi_r),$$

$$\frac{d\psi_r}{d\varphi} = \gamma \frac{a_z^2}{a_r} \cos(2\psi_z + \psi_r),$$

$$\frac{da_z}{d\varphi} = 2\gamma a_r a_z \sin(2\psi_z + \psi_r), \tag{7}$$

$$\frac{d\psi_z}{d\varphi} = 2\gamma a_r \cos(2\psi_z + \psi_r) - \delta,$$

где

$$\delta = \frac{K}{2} - Q_z - \frac{Q_r}{2},$$

$$\psi_r = \chi_r + \frac{\pi}{6},$$

$$\psi_z = \chi_z - \delta\varphi - \frac{\beta_K}{2} + \frac{\pi}{6},$$

$$\gamma = \frac{|C_K|\, M}{2|F_z|_{max}}.$$

Система (7) имеет два интеграла движения. Первый из них имеет вид:

$$2a_r^2 - a_z^2 = B = const. \tag{8}$$

Для нахождения второго интеграла введем обозначение $\Phi = 2\psi_z + \psi_r$. Используя (8), систему (7) можно записать в виде:

$$\frac{da_r}{d\varphi} = \gamma(2a_r^2 - B)\sin\Phi$$

$$\frac{d\Phi}{d\varphi} = -2\delta + \gamma\left(4a_r + \frac{2a_r^2 - B}{a_r}\right)\cos\Phi. \tag{9}$$

Если теперь обозначить $y = \cos\phi$, то систему (9) можно записать в виде

$$\frac{dy}{da_\tau} + \frac{6a_\tau - B}{a_\tau(2a_\tau^2 - B)} - \frac{2\delta}{\gamma(2a_\tau^2 - B)} = 0 \tag{10}$$

откуда следует второй интеграл движения

$$a_\tau(2a_\tau^2 - B)\cos\phi - \frac{\delta}{\gamma}a_\tau^2 = C = \text{const}. \tag{11}$$

Исследование системы (9) удобно проводить на фазовой плоскости

$$\begin{aligned} p &= a_\tau \cos\phi \\ q &= a_\tau \sin\phi . \end{aligned} \tag{12}$$

Для этих переменных из (9) имеем

$$\begin{aligned} \frac{dq}{d\psi} &= -2\delta p - \gamma B + 2\gamma(q^2 + 3p^2) \\ \frac{dp}{d\psi} &= 2\delta p - 4\gamma pq \end{aligned} \tag{13}$$

с интегралом движения

$$p^2 + q^2 = \frac{B}{2}\left(1 + \frac{\frac{C}{B} + \frac{\delta}{2\gamma}}{p - \frac{\delta}{2\gamma}}\right). \tag{14}$$

Характер движения частицы существенно зависит от величины константы B .

А. При $B > 2(\delta/2\gamma)^2$ система (13)обладает особыми точками, координаты которых есть

$$A_1\left(q_1=0;\ P_1=\frac{\delta}{6\gamma}+\sqrt{\left(\frac{\delta}{6\gamma}\right)^2+\frac{B}{6}}\right),$$

$$A_2\left(q_2=0;\ P_2=\frac{\delta}{6\gamma}-\sqrt{\left(\frac{\delta}{6\gamma}\right)^2+\frac{B}{6}}\right),$$

$$B_1\left(q_3=-\sqrt{\frac{B}{2}-\left(\frac{\delta}{2\gamma}\right)^2};\quad P_3=-\frac{\delta}{2\gamma}\right), \qquad (15)$$

$$B_2\left(q_4=-q_3;\quad P_4=P_3\right).$$

Б. При $2(\delta/2\gamma)^2 > B > -(2/3)(\delta/2\gamma)^2$ таких точек две:

$$A_1\left(q_1=0;\quad P_1=\frac{\delta}{6\gamma}+\sqrt{\left(\frac{\delta}{6\gamma}\right)^2+\frac{B}{6}}\right),$$

$$A_2\left(q_2=0;\quad P_2=\frac{\delta}{6\gamma}-\sqrt{\left(\frac{\delta}{6\gamma}\right)^2+\frac{B}{6}}\right). \qquad (16)$$

В. При $-(2/3)(\delta/2\gamma)^2 > B$ особых точек нет. Фазовые траектории в случаях А и Б приведены соответственно на рис.1 и 2. Заметим, что все фазовые траектории на плоскости (P, q) лежат вне круга $P^2+q^2 < \frac{B}{2}$.

Как видно из рисунков 1 и 2 устойчивое движение частиц при резонансе $2Q_z+Q_r=K$ возможно в случае Б, что на фазовой плоскости соответствует кольцеобразной области заключенной между окружностью $P^2+q^2=\frac{B}{2}$ и сепаратрисой - кривой отделяющей область устойчивых колебаний от области неустойчивых колебаний.

Устойчивые фазовые траектории соответствуют следующим приблизительным ограничениям на амплитуды a_z и a_r.

$$a_z < 2a_r$$
$$a_r < \frac{|\delta|}{2\gamma} . \qquad (17)$$

3. На Ереванском синхротроне для медленного вывода создается шестнадцатая гармоника магнитного поля $K=16$. Параметр $\gamma = \frac{|C_{16}|\, M}{2|F_z|_{max}} \sim 0{,}002 \text{см}^{-1}$ и $a_r \sim 2$ см, т.е. устойчивость вертикального движения будет обеспечена, если

$$|\delta| > 0{,}008 . \qquad (18)$$

Поскольку при медленном выводе частота Q_z сдвигается от значения 5,33, очень близкого к резонансному, на величину $\Delta Q_z = -0.025$, то условие (18) выполняется и резонанс $2Q_z + Q_r = 16$ на Ереванском синхротроне не опасен, и тем самым первое приближение в расчетах медленного вывода является достаточным.

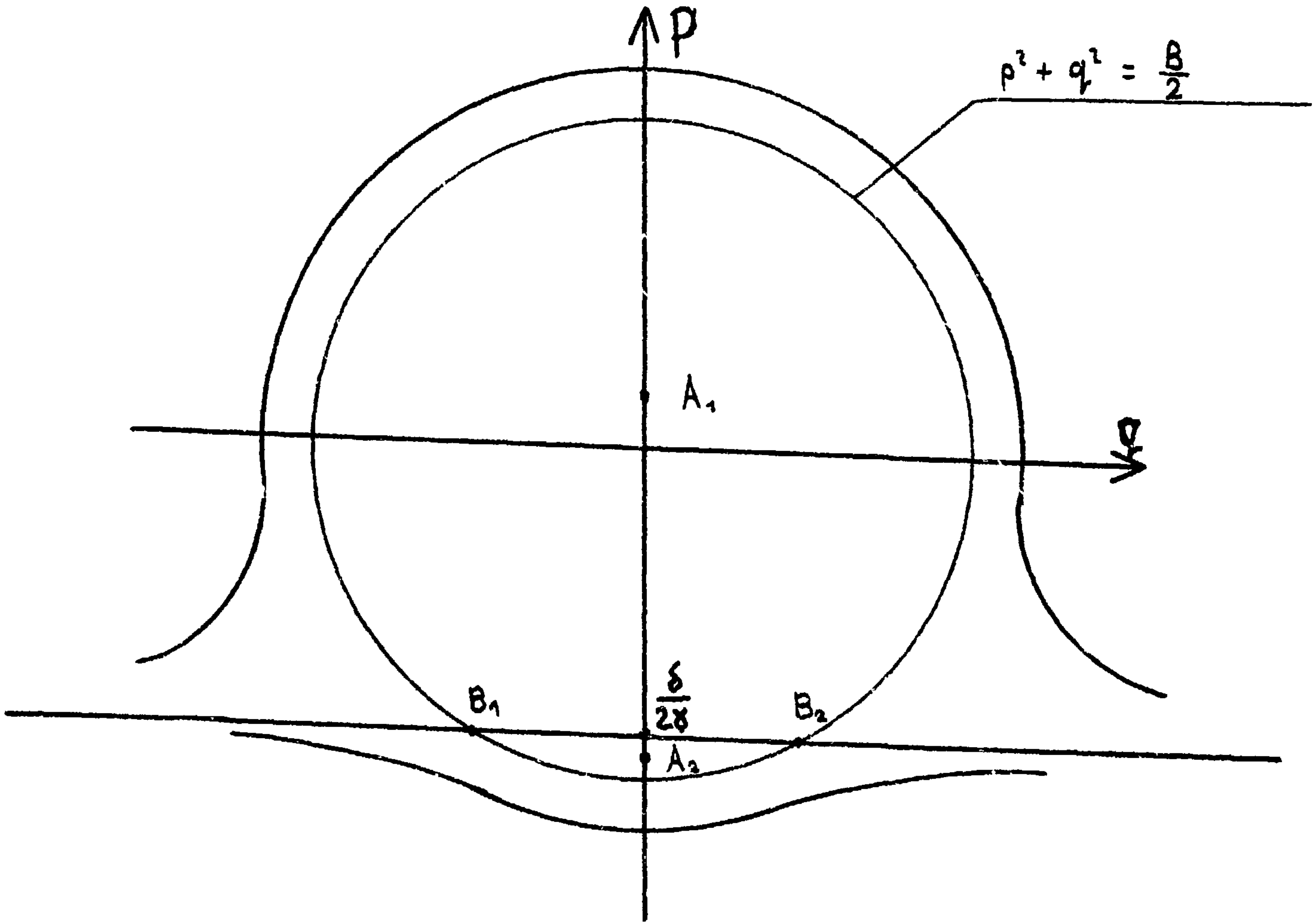

Рис. I

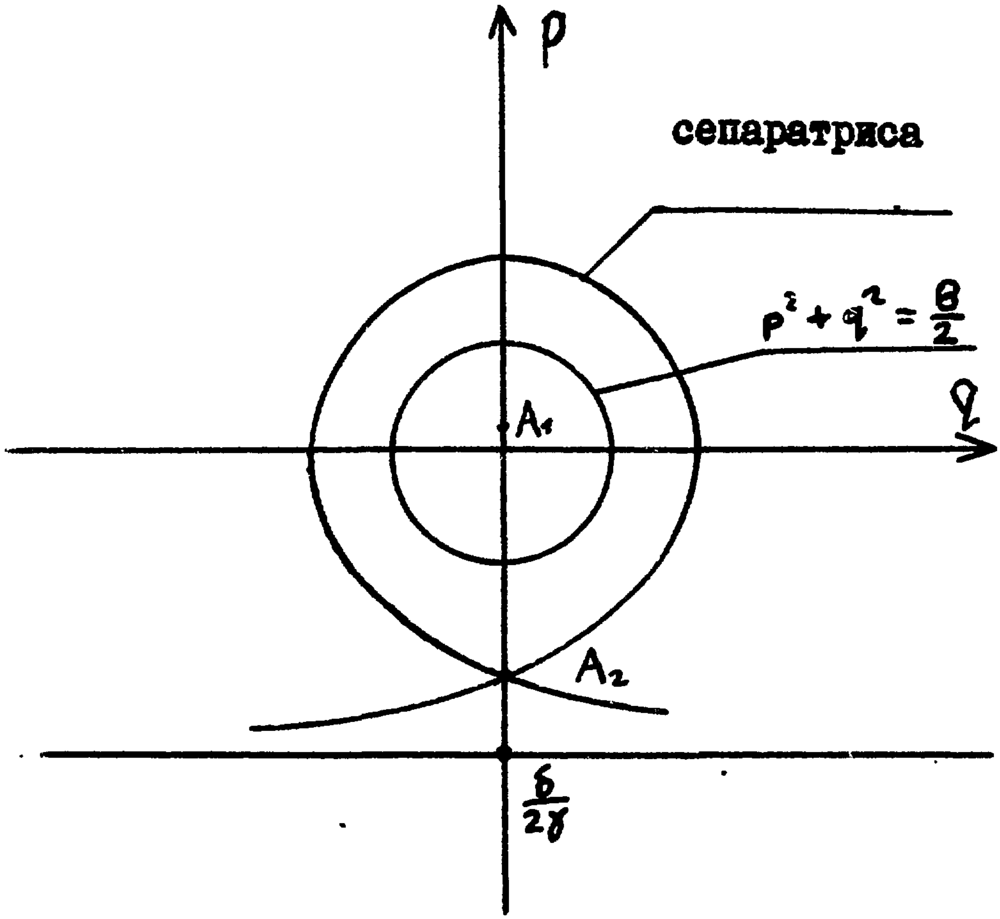

Рис.2

ЛИТЕРАТУРА

1. И.В.Амирханов и др. Сообщение ОИЯИ, 9-8663, Дубна, 1975.
2. Р.О. Абрамян и др. Труды П Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц ,стр.187, Москва, 1972,
3. Х.А.Симонян. Изв.АН Арм.ССР, Х1У, 2, 1961.
4. А.В.Гальчук и др. "Некоторые вопросы резонансной раскачки колебаний при медленном выводе". Труды УШ Международной конференции по ускорителям заряженных частиц, Ереван, 1970.
5. Н.Н.Боголюбов , Ю.А.Митропольский. "Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний" , "Наука," Москва, 1974.

Рукопись поступила 20-го сентября 1976г.

Редактор Л.П.Мукаян

Тех.редактор А.С.Абрамян

Заказ 745 ВФ- 04018 Тираж 299

Подписано к печати 8/ХП-76г. Формат издания 30 х40

1,0 уч.изд.л. Ц.7 к.

Издано Отделом научно-технической информации Ереванского физического института,Ереван 36, пер.Маркаряна 2