ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ԳԻՏԱԿԱՆ ՀԱՂՈՐԴՈՒՄ НАУЧНОЕ СООБЩЕНИЕ

ЕФИ—200(46)-76

SU7704294

С.Г. АРУТЮНЯН, Х.А. СИМОНЯН

ВЛИЯНИЕ РЕЗОНАНСА $2Q_z+Q_r=K$ НА МЕДЛЕННЫЙ ВЫВОД ЧАСТИЦ ИЗ УСКОРИТЕЛЯ

ԵՐԵՎԱՆ 1976 ЕРЕВАН

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Научное сообщение ЕФИ-200(46)-(76)

С.Г.АРУТЮНЯН Х.А.СИМОНЯН

ВЛИЯНИЕ РЕЗОНАНСА $2Q_z+Q_r=K$ НА МЕДЛЕННЫЙ ВЫВОД ЧАСТИЦ ИЗ УСКОРИТЕЛЯ

Ереван 1976

Введение

При медленном выводе частиц из ускорителя методом резонансной раскачки радиальных колебаний на квадратичном резонансе $3Q_r = K$ появляется опасность попадания в полосу резонанса $2Q_z + Q_r = K$, который обусловлен той же нелинейностью магнитного поля.

Предварительная сдвижка частоты Q_z с тем, чтобы выйти из полосы резонанса $2Q_z + Q_r = K$ практически не всегда осуществима.

В связи с этим возникает вопрос исследования движения частиц при одновременном действии резонансов $3Q_r = K$ и $2Q_z + Q_r = K$ с целью нахождения условий, при которых резонанс связи не вносит существенных изменений в процесс медленного вывода.

В настоящей работе такой анализ проведен для укороченных уравнений методом фазовой плоскости.

Найдены условия, которым должны удовлетворять расстояния до резонансов при трех различных подходах к задаче.

При одновременном действии резонансов $2Q_z + Q_r = K$ и $3Q_r = K$ уравнения движения частиц могут быть получены методом, аналогичным изложенному в работе [1], и имеют вид

$$\frac{da_r}{d\varphi} = -\gamma_1 a_r^2 \sin 3\psi_r + \gamma_2 a_z^2 \sin(2\psi_z + \psi_r);$$

$$\frac{d\psi_r}{d\varphi} = -\gamma_1 a_r \cos 3\psi_r + \gamma_2 \frac{a_z^2}{a_r} \cos(2\psi_z + \psi_r) - \delta_1;$$

$$\frac{da_z}{d\varphi} = 2\gamma_2 a_r a_z \sin(2\psi_z + \psi_r); \qquad (1)$$

$$\frac{d\psi_z}{d\varphi} = 2\gamma_2 a_r \cos(2\psi_z + \psi_r) - \delta_r,$$

где кроме обозначений работы [1] введены обозначения

$$\gamma_2 = \gamma,$$

$$\delta_1 = K/3 - Q_r, \quad \delta_2 = K/3 - Q_z$$

$$b_K = |b_K| e^{i\alpha_K} = \frac{1}{2\pi M} \int_0^{2\pi M} \frac{1}{2i} \left(\frac{\ell}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{H_0 \rho} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial r^2}\right) f_r^{*3} e^{-i\frac{K}{M}\theta} d\theta,$$

$$\psi_r = \chi_r - \delta_1 \varphi - \alpha_K/3 + \pi/6,$$

$$\psi_z = \chi_z - \delta_2 \varphi + \alpha_K/6 - \beta_K/2 + \pi/6,$$

$$\gamma_1 = |b_K| M/2 |F_z|_{max},$$

(при выводе уравнений (1) использовано предположение

$$|F_r|_{max} = |F_z|_{max}).$$

Уравнения (1) отличаются от уравнений (7) работы [1] дополнительными членами с γ_1, δ_1, обязанными резонансу $3Q_r = K$. Уравнения (1) при $\gamma_2 = 0$, $\delta_2 = 0$ хорошо изучены и применяются для медленного резонансного

вывода частиц из ускорителя, так что члены с γ_2, δ_2 играют роль нежелательных добавок возмущающих "стандартное" движение частиц при медленном выводе.
При $\gamma_2 = 0$, $\delta_2 = 0$ на фазовой плоскости

$$\begin{aligned} u &= a_z \cos\psi_z \\ v &= a_z \sin\psi_z \end{aligned} \qquad (2)$$

устойчивое движение ограничено треугольной сепаратрисой (см.рис.1). Механизм медленного вывода, основанный на резонансе $3Q_z = K$, заключается в том, что при сжатии области устойчивости посредством приближения частоты Q_z к резонансному значению частицы с максимальной амплитудой попадают в неустойчивую область и по одной из выбранных ветвей сепаратрисы удаляясь от равновесной области (центр треугольника) приближаются к септум-магниту. Потери частиц на "ноже" септума пропорциональны отношению толщины "ножа" к шагу раскачки амплитуды z -колебаний вблизи септума. При движении частиц по ветви $u = u_o$ шаг заброса определяется из уравнения

$$\frac{dv}{d\varphi} = \gamma_1 (v^2 - x_o^2), \qquad (3)$$

где $x_o = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\delta_1}{\gamma_1}$; $u_o = \frac{\delta_1}{2\gamma_1}$.

Сделав замену

$$\begin{aligned} p &= a_z \cos\psi_z \\ q &= a_z \sin\psi_z \end{aligned} \qquad (4)$$

преобразуем систему (1) к виду

$$
\begin{aligned}
u' &= \delta_1 v - 2\gamma_1 uv + 2\gamma_2 pq \;, \\
v' &= -\delta_1 u - \gamma_1(u^2 - v^2) - \gamma_2(q^2 - p^2) \\
p' &= \delta_2 q + 2\gamma_2(pv + qu)\;, \\
q' &= -\delta_2 p + 2\gamma_2(pu - qv)\;,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где штрих означает дифференцирование по переменной $\varphi = \theta/M$, с гамильтонианом

$$
H = -\frac{\delta_1}{2}(u^2 + v^2) - \frac{\gamma_1}{3}(u^3 - 3uv^2) -
$$
$$
-\frac{\delta_2}{2}(p^2 + q^2) + \gamma_2(p^2 u - q^2 u - 2pqv)\,. \tag{6}
$$

Первые два члена в (6) соответствуют резонансу $3Q_z = k$, а два других - резонансу $2Q_{\bar z} + Q_z = k$, которые приведут к нарушению зависимости (3) при $\gamma_2 \neq 0$. Опасностью является возможное уменьшение шага заброса, поскольку при резонансе $2Q_{\bar z} + Q_z = k$ с увеличением амплитуды $\bar z$ -колебаний увеличивается и амплитуда z -колебаний (см.формулу (8)) работы [1] .

Из уравнения z -движения

$$
z_0'' + \left(\frac{\ell}{2\pi}\right)^2 \frac{1 - n(\theta)}{\rho^2} z = -\left(\frac{\ell}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{H_0 \rho}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}\right)(z^2 - \bar z^2) \tag{7}
$$

видно, что шаг заброса, обязанный нелинейной правой части, может существенно уменьшиться при одновременном возрастании амплитуд z и $\bar z$ - колебаний.

В связи с этим ставится задача нахождения условий, при которых обеспечивается преобладающее возрастание ζ -амплитуды по сравнению с ξ - амплитудой, в процессе медленного вывода. Из физических соображений возможны, по крайней мере, три подхода к поставленной задаче [2] .

1. Потребуем устойчивости ξ -колебаний в момент, когда скорость возрастания ζ -амплитуды минимальна. На фазовой диаграмме (рис.1) это соответствует тому, что частица находится вблизи вершины треугольника с координатами (X_0 , U_0). Два последних уравнения системы (5) при этом запишутся в виде

$$p' = \delta_2 q + 2\gamma_2 (p x_0 + q u_0) ,$$
$$q' = -\delta_2 p + 2\gamma_2 (p u_0 - q x_0) , \tag{8}$$

или

$$p'' - (A^2 + BC) p = 0 ,$$
$$q'' - (A^2 + BC) q = 0 , \tag{9}$$

где

$$A = 2\gamma_2 x_0 ; \quad B = \delta_2 + 2\gamma_2 u_0 ; \quad C = -\delta_2 + 2\gamma_2 u_0 .$$

Система (9) описывает устойчивое движение, если имеет место условие

$$\delta_2^2 > (2\gamma_2 x_0)^2 + (2\gamma_2 u_0)^2 \tag{10}$$

откуда следует

$$\frac{|\delta_1|\,\gamma_2}{|\delta_2|\,\gamma_1} < \frac{1}{2} . \tag{11}$$

Заметим, что условие (11) соответствует условию (17). работы [1].

П. Так как вблизи резонанса $2Q_z + Q_r = Kc$ увеличением амплитуды радиальных колебаний обязательно растет и амплитуда вертикальных колебаний, потребуем, чтобы вблизи септума вертикальные колебания нарастали с меньшей скоростью, чем радиальные.

Вблизи септума, который на плоскости (V , U) имеет координаты (X_c , U_o) положим

$$V_c = X_c + \gamma_1 (X_c^2 - X_o^2) \cdot \varphi \tag{12}$$

Последние два уравнения системы (5) запишем в виде

$$\begin{aligned} p' &= \delta_2 q + 2\gamma_2 (p V_c + q u_o), \\ q' &= -\delta_2 p + 2\gamma_2 (p u_o - q V_c). \end{aligned} \tag{13}$$

Система (13) может быть преобразована к виду

$$\begin{aligned} p'' - (A^2 + BC + A') p &= 0, \\ q'' - (A^2 + BC - A') q &= 0, \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$A = 2\gamma_2 V_c; \quad B = \delta_2 + 2\gamma_2 u_o; \quad C = -\delta_2 + 2\gamma_2 U_o.$$

Для того, чтобы скорость роста z -амплитуды вблизи септума была бы меньше скорости роста r - амплитуды необходимо

$$exp\left(\sqrt{A^2 + BC + |A'|}\,\varphi\right) < exp\left(\ell_o \varphi\right), \tag{15}$$

где

$$\ell_0 = \frac{\gamma_1 (X_c^2 - X_0^2)}{X_c}$$

откуда следует

$$\frac{|\delta_1| \gamma_2}{|\delta_2| \gamma_1} < \left(1 - \frac{3}{2}\frac{\gamma_1}{\gamma_2} + \frac{3}{2}\frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} + \right. \tag{16}$$

$$\left. + 3\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\gamma_1}{\gamma_2} - \frac{\gamma_1^2}{4\gamma_2^2}\right)\frac{X_c^2}{X_0^2} - \frac{3}{4}\frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2}\frac{X_0^2}{X_c^2}\right)^{-1/2}.$$

Ш. Потребуем, чтобы амплитуда радиальных колебаний достигла бы септума прежде, чем максимальная амплитуда вертикальных колебаний от значения Z_0 перед началом вывода достигает значения $Z_1 > Z_0$.

Исследование этого вопроса проведем используя явный вид гамильтониана системы (5) . Опять будем исходить из предположения, что в плоскости (V , U) движение происходит по ветви $U = U_0$. При фиксированном $U = U_0$ возможно геометрическое представление гамильтониана H в пространстве (V , p , q). Фазовые поверхности соответствующие гамильтониану H с фиксированной переменной $U = U_0$ будут поверхностями в трехмерном пространстве (V , p , q).

Заметим, что любое сечение по V таких поверхностей есть кривая второго порядка относительно p и q . Уравнение этих кривых есть

$$p^2\left(\frac{\delta_2}{2} - \gamma_2 U_0\right) + q^2\left(\frac{\delta_2}{2} + \gamma_2 U_0\right) + 2\gamma_2 V p q = L, \tag{17}$$

где

$$L = -\frac{2}{3}\delta_1 U_0^2 - H$$

Расстояние от точки фазовой поверхности до оси V имеет смысл амплитуды z -колебаний. Ограниченность z -колебаний поэтому означает, что кривые (17) должны быть эллипсами, т.е.

$$\mathcal{D} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\delta_2}{2} - \gamma_2 u_0 & \gamma_2 V \\ \gamma_2 V & \frac{\delta_2}{2} + \gamma_2 u_0 \end{vmatrix} > 0 \qquad (18)$$

,

где

$$V = const,$$

по крайней мере для, $X_c > V > X_0$.

Эллиптичность сечений фазовых поверхностей по V для $X_c > V > X_0$ будет выполнена, если

$$\delta_2^2 > \frac{4}{3} \gamma_2^2 X_0^2 + 4 \gamma_2^2 X_c^2 \, . \qquad (19)$$

Предположим для начала, что это так.

Рассмотрим характеристическое уравнение для кривых (17),

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\delta_2}{2} - \gamma_2 u_0\right) - \lambda & \gamma_2 V \\ \gamma_2 V & \left(\frac{\delta_2}{2} + \gamma_2 u_0\right) - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (20)$$

с корнями

$$\lambda_{1,2} = \frac{\delta_2}{2} \pm \gamma_2 \sqrt{u_0^2 + V^2} \, .$$

Поворотом системы координат на определенный угол уравнение кривых (17) может быть записано

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 , \tag{21}$$

где

$$a^2 = -\frac{1}{\lambda_1}\,\frac{A}{D} ; \qquad b^2 = -\frac{1}{\lambda_2}\,\frac{A}{D} ;$$

$$A = \begin{vmatrix} (D) & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & -L \end{vmatrix} = -LD .$$

Эллипсы ограниченные в сечении $V = X_0$ окружностью с радиусом Z_0 найдутся из условия

$$\frac{L}{\lambda_{0\,min}} < Z_0^2 , \tag{22}$$

где

$$\lambda_{0\,min} = \begin{cases} \delta_2/2 - \gamma_2\sqrt{u_0^2 + x_0^2} & \delta_2 \geq 0 \\ \delta_2/2 + \gamma_2\sqrt{u_0^2 + x_0^2} & \delta_2 < 0 \end{cases}$$

которое соответствует предположению, что амплитуда вертикальных колебаний ограничена значением Z_0 .
Из (22) имеем

$$-\frac{2}{3}\delta_1 u_0^2 - z_0^2\left|\lambda_{0\,min}\right| < H < -\frac{2}{3}\delta_1 u_0^2 + z_0^2\left|\lambda_{0\,min}\right| \tag{23}$$

Аналогично в сечении $V = X_c$ кривая (17) будет ограничена окружностью с радиусом z_1, если будет выполняться

$$\frac{L_1}{\lambda_{1\,min}} < z_1 \,, \tag{24}$$

где $$\lambda_{1\,min} = \begin{cases} \delta_2/2 - \gamma_2\sqrt{U_0^2 + X_c^2} & \delta_2 \geq 0 \\ \delta_2/2 + \gamma_2\sqrt{U_0^2 + X_c^2} & \delta_2 < 0 \,. \end{cases}$$

Из совместного анализа условий (22) и (24) следует, что физическое требование Ш осуществится, если верно

$$\frac{|\delta_1|}{|\delta_2|}\,\frac{\gamma_2}{\gamma_1} < \frac{z_1^2 - z_0^2}{\sqrt{1 + 3\frac{X_c^2}{X_0^2}} - 2} \,. \tag{25}$$

Отсюда непосредственно видно, что условие на расстройку тем жестче, чем меньше должна измениться амплитуда z -колебаний в процессе медленного вывода, т.е. чем ближе к единице отношение z_0 / z_1 .

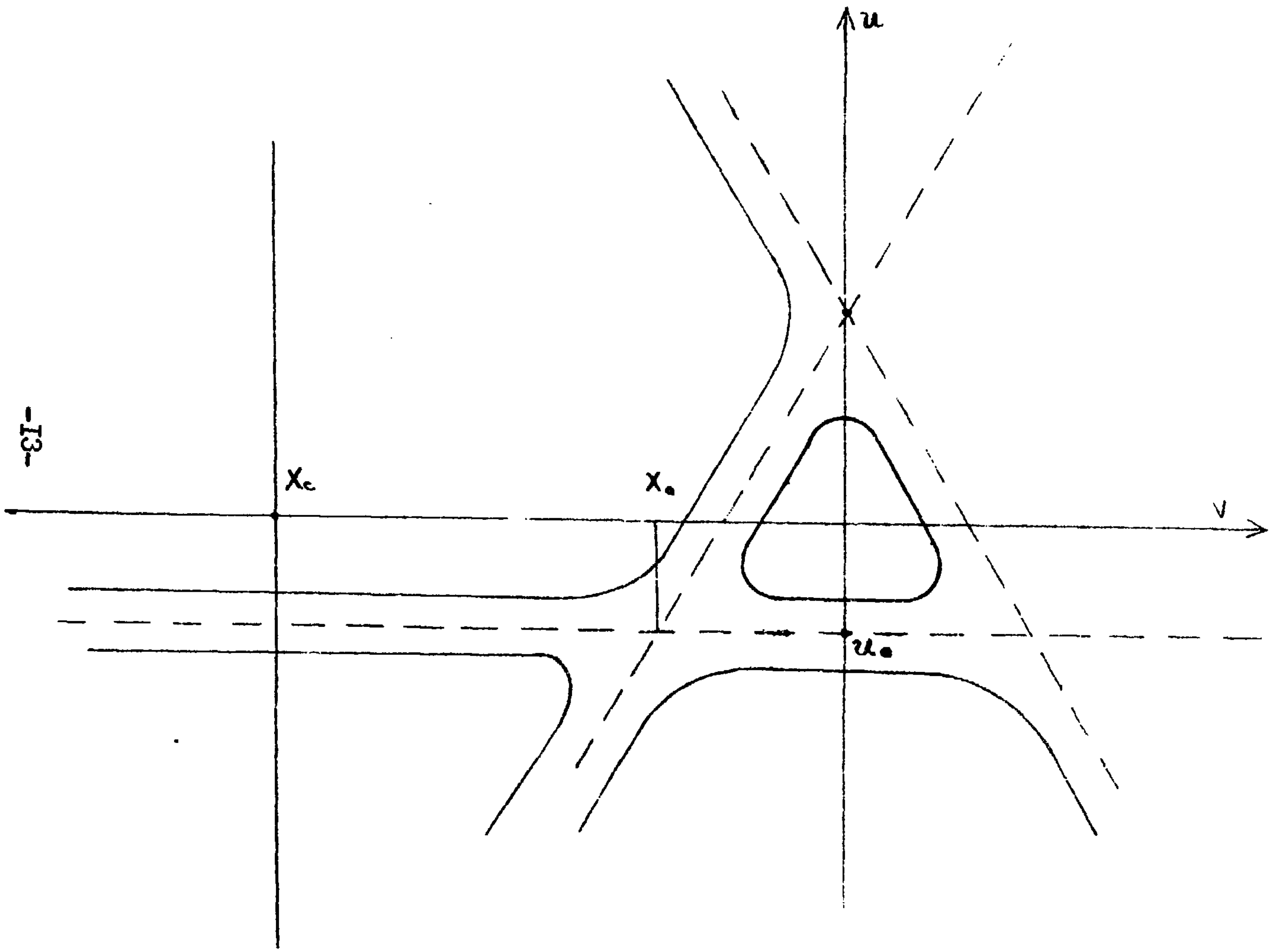

Рис.I

ЛИТЕРАТУРА

1. С.Г.Арутюнян, Х.А.Симонян. Научное сообщение - ЕФИ-199(45)-(76)

2. А.Машке, К.Саймон. Труды по Всесоюзному совещанию по ускорителям заряженных частиц", 1 , Москва, 1970

3. Н.Н.Боголюбов,Ю.А.Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний."Наука", Москва,1974.

Рукопись поступила 20-го сентября 1976 г.

Редактор Л.П.Мукаян

Тех.редактор А.С.Абрамян

Заказ 746 ВФ-04019 Тираж 299

Подписано к печати 8/XII-76г. Формат издания 30х40

1,0 уч.изд.л. Ц. 7 к.

Издано Отделом научно-технической информации Ереванского физического института, Ереван 36, пер.Маркаряна 2