ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ԳԻՏԱԿԱՆ ՀԱՂՈՐԴՈՒՄ НАУЧНОЕ СООБЩЕНИЕ

ЕФИ-235(28)-77

С.Г.МАТИНЯН

ВАКУУМ В ИНТЕНСИВНЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЯХ

ԵՐԵՎԱՆ 1977 ЕРЕВАН

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Научное сообщение ЕФИ-235(28)-77

С.Г.МАТИНЯН

ВАКУУМ В ИНТЕНСИВНЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЯХ

Ереван 1977

§ 1. Введение

Обнаружение асимптотической свободы неабелевых калибровочных полей [1] ознаменовало собой важный шаг в развитии наших представлений о взаимодействии частиц на малых расстояниях. Существующая до этого альтернатива, связанная с картиной полной экранировки голого заряда и приводящая к известной трудности с нулем заряда [2] , как мы теперь знаем, обязана абелевости рассматриваемых полей.

Поведение теории на малых расстояниях определяется поляризацией вакуума квантами поля с большими квадратами импульса.

Вместе с тем, в квантовой электродинамике (к.э.д.) – –этой наиболее заслуженной абелевой теории поля – уже сравнительно давно [3,4] было обнаружено, что поляризация вакуума фотонами больших квадратов виртуальных импульсов с логарифмической точностью ведет себя так же, как поляризация вакуума, вызванная интенсивным внешним электромагнитным полем. Последняя имеет давнюю историю и восходит к известной нелинейной поправке Гайзенберга-Эйлера к лагранжиану для постоянного электромагнитного поля, учитывающей изменение этим внешним полем движения вакуумных электронов [5]

Как показано В.И.Ритусом [4] , эта связь между поляризацией вакуума фотонами с большими квадратами импульсов и поляризацией вакуума интенсивным электрическим (магнитным) полем прослеживается с логарифмической точностью и в следующей за поправкой Гейзенберга-Эйлера поправке к лагранжиану постоянного поля,учитывающей изменения внешним полем радиационного взаимодействия между вакуумными электронами (на модном сегодня языке - двухпетлевая поправка).

Это обстоятельство, конечно, не случайно, ибо в калибровочной теории, какой является к.э.д., лагранжевая и поляризационная функции, описывая одно и то же явление, определяются эффективным значением оператора Π^2 ,где $\Pi_\alpha = P_\alpha - eA_\alpha$ (A_α -вектор-потенциал электромагнитного поля), и оно становится порядка $P^2 \gg m^2$ для виртуального кванта и порядка $(eFx)^2 \sim eF \gg m^2$ для интенсивного поля F , ибо в последнем случае лагранжева функция формируется на расстояниях $x \approx (eF)^{-1/2}$ [3,4] , малых по сравнению с комптоновской длиной электрона. Именно из последнего обстоятельства следует важный вывод, что лагранжева функция постоянного поля правильно описывает поляризационные поправки и для переменных полей, если они достаточно интенсивны [3,4] .

Ниже мы приведем еще ряд аргументов в пользу того, что, изучая лагранжиан в пределе сильного поля, мы получаем ту же информацию,что и поляризационная функция поля в пределе большого квадрата импульса,т.е.вычисляя квантовые поправки к лагранжиану интенсивного постоянного поля, мы изучаем поведение теории на малых расстояниях.

Сказанное указывает на несомненный интерес рассмотрения аналогичной проблемы для неабелевого янг-миллсовского поля, чему и посвящена настоящая лекция. Очевидно, что асимптотическая свобода неабелевой теории должна явно проявляться в структуре лагранжевой функции интенсивного постоянного янг-миллсовского поля.

В следующем разделе мы перейдем к исследованию этого вопроса.

§ 2. Общий формализм [6,7]

Мы применим метод вычисления эффективного действия Γ (и эффективного лагранжиана), а также функций Грина во внешнем поле, предложенный в работе Г.К.Саввиди и автора [6] (см. также [8]).

Основой подхода в [6] служил развитый Швингером в к.э.д. [9] явно ковариантный метод получения Γ, основанный на сведении вычислений к динамической задаче для некоторой "частицы", пространственно-временные координаты которой определяются уравнениями движения в собственном времени.

В к.э.д. суммирование однопетлевых вкладов привело в [6] к поправке Гейзенберга-Эйлера, что следует рассматривать как хорошую проверку метода, а в $\lambda\varphi^4$ -теории точный однопетлевой лагранжиан был получен в двух интересных частных случаях: постоянного поля и плоской волны. При этом поляризация вакуума в обоих случаях совпала, тогда как хорошо известно, что в к.э.д. плоская волна, распространяющаяся в электронно-позитронном вакууме, не поляризует его [9] . Здесь мы тем же методом изучим однопетлевые поправки в теории Янга-Миллса (Я.-М.), обусловленные поляризацией вакуума этого поля [7] .

Рассмотрим поле Я.-М., соответствующее группе $SU(2)$. Классическое действие имеет вид:

$$S_{Y.M.}[A] = -\frac{1}{4}\int d^4x\, G_{\mu\nu}^a\, G_{\mu\nu}^a , \qquad (2.1)$$

где

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g\varepsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \qquad (2.2)$$

– тензор напряженности поля Я.-М.; ε^{abc} –структурные константы $SU(2)$ [1]. Действие (2.1) инвариантно относительно инфинитезимальных калибровочных преобразований

$$A_\mu^a \to A_\mu^a + \nabla_\mu^{ab}(A)\delta\xi^b, \tag{2.3}$$

где

$$\nabla_\mu^{ab}(A) = \delta^{ab}\partial_\mu - g\varepsilon^{acb}A_\mu^c \tag{2.4}$$

–ковариантная производная, обладающая свойством:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] = -g\hat{G}_{\mu\nu}, \tag{2.5}$$

причем, например, $\hat{G}_{\mu\nu}^{ab} = \varepsilon^{acb}G_{\mu\nu}^c$. Из-за инвариантности относительно калибровочных преобразований (2.3) действие (2.1) сингулярно. Поэтому к нему необходимо добавить слагаемое, фиксирующее калибровку, которое в свою очередь приводит к появлению фиктивных частиц Фейнмана, Фадеева-Попова [10-12].

Прежде, чем переходить к вычислению однопетлевого вклада в эффективное действие или в эффективный лагранжиан, остановимся на общей идеологии, связанной с эффективными лагранжианами.

---

1) Настоящее рассмотрение легко обобщается на произвольную группу.

Эффективный лагранжиан, по определению, включает в себя радиационные поправки и записывается в терминах эффективных констант связи, зависящих от внешних полей. В этом смысле он очень приспособлен для задачи, о которой говорилось во введении (п.1) и которая связана со стремлением внешнего поля к бесконечности. Мы уже приводили аргументы в пользу того, что при этом имеется связь с проблемой малых расстояний.

Добавим, что эта связь следует также из того, что зависимость эффективных констант связи от полей повторяет зависимость соответствующих констант связи от импульсов. Это можно оправдать рассмотрением фейнмановских диаграмм: большие значения внешних полей, как и большие значения внешних импульсов, обрезают малые виртуальные импульсы, т.е. подавляют вклад в интегралы от больших расстояний.

Иными словами, формализм эффективного действия обеспечивает возможность изучать свойства теории на малых расстояниях в терминах эффективных констант связи, входящих в обычные лагранжианы.

С более общей точки зрения эта проблема связана с определением эффективного действия как производящего функционала одночастично неприводимых вершинных функций.

Можно указать и на другие преимущества использования формализма эффективного действия (см., например, [13]): сравнительная простота рассмотрения области импульсов порядка масс, что создает определенные трудности при использовании метода ренормализационной группы; простота условий нормировки, которые здесь определяют перенормированные константы связи как эффективные константы связи, взятые при значениях внешних полей, равных их вакуумным значениям.

Впервые эффективное определение заряда в зависимости от внешнего поля использовалось, по-видимому, в хорошо известной работе С.Коулмена и Э.Вайнберга[14].

Сделаем еще одно общее замечание, связанное с калибровочной инвариантностью эффективного действия. Иногда говорят, что эффективное действие (и соответствующий ему эффективный потенциал) определено вне массовой поверхности, стало быть, оно не связано непосредственно с наблюдаемыми величинами и, поэтому, не обязательно требовать его независимости от калибровки. Но надо помнить, что эффективный потенциал в произвольной стационарной точке определяет среднюю плотность энергии стационарного (или квазистационарного) вакуума, и это обязывает нас обеспечить независимость эффективного потенциала от калибровки. Всюду ниже мы будем проводить вычисления явно калибровочно инвариантным способом.

§ 3. Однопетлевый вклад в эффективный лагранжиан поля Я.-М. [7] .

Вернемся к однопетлевому вкладу в эффективное действие $\bar{\Gamma}$. Оно имеет вид [12,15,16] :

$$\bar{\Gamma}[A,\bar{A}] = S_{(\alpha)}[A,\bar{A}] + \frac{i}{2} Sp\, \ln\left[\frac{\delta^2 S_{(\alpha)}[A,\bar{A}]}{\delta A\, \delta A}\right] - i\, Sp \ln\left[\nabla_\mu(\bar{A})\, \nabla_\mu(A)\right]. \tag{3.1}$$

Здесь, Sp означает полный след операторов, включающий суммирование по лоренцовским и внутренним индексам и интегрирование по четырехмерному пространству. В этом выражении классическое действие $S_{(\alpha)}$ имеет вид:

$$S_{(\alpha)}[A,\bar{A}] = S_{Y.M.}[A] - \frac{\alpha}{2}\int d^4x \left[\nabla_\mu^{ab}(\bar{A}) \cdot (A-\bar{A})_\mu^b\right]^2, \tag{3.2}$$

где второй член соответствует так называемым ковариантным калибровкам [12,15]; α -параметр калибровки. Входящее в (3.1) и 3.2) поле $\bar{A}$ рассматривается как "внешнее" при всех функциональных дифференцированиях, после чего оно берется равным A .

Мы будем исследовать эффективное действие $\Gamma(A)=\bar{\Gamma}(A,A)$ для полей A , удовлетворяющих классическим уравнениям движения в отсутствии источников:

$$\nabla_\nu^{ab} G_{\nu\mu}^{b} = 0 \tag{3.3}$$

Для этого класса полей из тождеств Уорда следует, что функция $\Gamma[A]$ не зависит от калибровочного параметра α [17,18] . Ниже мы сможем явно убедиться в этом факте.

Выполняя в (3.1) функциональное дифференцирование и полагая $\bar{A} = A$, получим:

$$\Gamma[A] = S_{Y.M.} + W^{(1)}_{Y.M.} + W^{(1)}_{F.P.} , \tag{3.4}$$

где

$$W^{(1)}_{Y.M.} = \frac{i}{2} Sp \ln [H(\alpha)] , \tag{3.5}$$

$$W^{(1)}_{F.P} = - i Sp \ln [H_c] . \tag{3.6}$$

$$H_{\mu\nu}(\alpha) = g_{\mu\nu} \nabla_\sigma \nabla_\sigma - 2g\, G_{\mu\nu} + (\alpha - 1) \nabla_\mu \nabla_\nu$$

$$H_c = \nabla_\sigma \nabla_\sigma$$

Из (2,5) и (3,7) следует, что

$$\nabla_\mu H_{\mu\nu}(\alpha) = \alpha H_0 \nabla_\nu - g\,[\nabla_\mu, \hat{G}_{\mu\nu}] \tag{3.9}$$

Принимая во внимание

$$[\nabla_\mu,\ \hat{G}_{\mu\nu}] = \nabla_\mu \hat{G}_{\mu\nu}\ ,$$

для полей, удовлетворяющих (3,3), получим:

$$\nabla_\mu H_{\mu\nu}(\alpha) = \alpha H_0 \nabla_\nu\ . \tag{3.10}$$

Используя для (3.5) и (3.6) представление собственного времени [9], имеем

$$W^{(1)}_{Y.M.} = -\frac{i}{2}\int_0^\infty \frac{ds}{s}\, Sp\left[e^{-iH(\alpha)s}\right], \tag{3.11}$$

$$W^{(1)}_{F.P.} = i\int_0^\infty \frac{ds}{s}\, Sp\left[e^{-iH_0 s}\right]. \tag{3.12}$$

С помощью (3.10) представим оператор $e^{iH(\alpha)s}$ в виде:

$$\left(e^{-iH(\alpha)s}\right)_{\mu\nu} = \left(e^{-iH(1)s}\right)_{\mu\nu} +$$

$$+ i(1-\alpha)\int_0^s dt \left(e^{-iH(1)(s-t)}\right)_{\mu\rho} \nabla_\rho\, e^{-i\alpha H_0 t}\,\nabla_\nu\ . \tag{3.13}$$

Подставляя (3.13) в (3.11), найдем

$$W^{(1)}_{\text{У.М.}} = -\frac{i}{2}\int_0^\infty \frac{ds}{s}\, Sp\, U(s) +$$

$$+(1-\alpha)/2 \int_0^\infty \frac{ds\,dt}{\alpha s + t}\, Sp\left\{U(s)\nabla U_0(t)\nabla\right\},$$

(3.14)

где

$$U(s) = e^{-iH(1)s} \tag{3.15}$$

$$U_0(s) = e^{-iH_0 s} \tag{3.16}$$

Из (3.10) и (3.15) следует, что

$$\nabla U(S) = U_0(S)\nabla. \tag{3.17}$$

После чего, производя во втором слагаемом (3.17) циклическую перестановку и используя (3.17), можно увидеть, что оно сводится к постоянному члену

$$i/2 \ln\alpha\, Sp\, 1.$$

Тем самым, с точностью до тривиального слагаемого, независящего от поля, явно доказана независимость эффективного действия Γ от калибровочного параметра α (см.также [19]).

Итак, имеем:

$$W^{(1)}_{Y.M.} = -\frac{i}{2}\int_0^\infty \frac{ds}{s}\, Sp\, U(s) \qquad (3.18)$$

$$W^{(1)}_{F.P.} = i\int_0^\infty \frac{ds}{s}\, Sp\, U_0(s) \qquad (3.19)$$

Приведем также выражения для операторов, обратных H_0 и $H(\alpha)$; в последнем явно выделена калибровочная зависимость с помощью соотношения (3.10).

$$\mathcal{D} \equiv \frac{1}{H_0 - i\varepsilon} = i\int_0^\infty ds\, U_0(s)\,, \qquad (3.20)$$

$$\Delta \equiv \frac{1}{H(\alpha) - i\varepsilon} = i\int_0^\infty ds\, U(s) + \frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^\infty ds\,dt\, U(s)\nabla U_0(t)\nabla\,. \qquad (3.21)$$

Таким образом, задача вычисления однопетлевого лагранжиана и функций Грина определяется формулами (3.18) - (3.21), и для ее решения необходимо знание матричных элементов операторов (3.15) и (3.16). Основой для этого может служить метод Швингера [9], использованный в [6] для $\lambda\varphi^4$-теории.

§ 4. Ковариантно-постоянное поле [7].

Простейшим нетривиальным решением (3.3) является ковариантно-постоянное поле, для которого

$$\nabla_\rho^{ab}\, G^b_{\mu\nu} = 0 \qquad (4.1)$$

Уравнение (4.1) является естественным обобщением постоянного однородного поля электродинамики ($\partial_\rho F_{\mu\nu}=0$)

Действуя коммутатором $[\nabla_\lambda, \nabla_\rho]^{ab}$ на $G^b_{\mu\nu}$ и используя (2.5), (4.1), получим

$$\varepsilon^{abc} G^b_{\mu\nu} G^c_{\lambda\rho} = 0 \tag{4.2}$$

Из (4.2) следует, что

$$G^a_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} n^a, \tag{4.3}$$

где n^a -некоторый изотопический вектор.

Если (по напрашивающейся аналогии с электродинамикой) искать общее решение (4.1) в виде:

$$A^a_\mu = -\frac{1}{2} G^a_{\mu\nu} x^\nu + a_\mu{}^a, \tag{4.4}$$

то подставляя (4.4) в уравнения (4.1) и используя (4.2), найдем:

$$(\delta^{ab}\partial_\rho - g\varepsilon^{acb} a_\rho{}^c) G^b_{\mu\nu} = 0 \tag{4.5}$$

Кроме того, используя (4.2) и (4.5), из (2.2) имеем

$$\partial_\mu a^b_\nu - \partial_\nu a_\mu{}^b - g\varepsilon^{bcd} a^c_\mu a^d_\nu = 0 \tag{4.6}$$

Из (4.6) следует, что

$$\hat{a}_\mu = -g^{-1} S^{-1} \partial_\mu S, \tag{4.7}$$

где S -произвольная матрица из присоединенного представления группы.

Соотношения (4.4) и (4.7) задают общее калибровочно-инвариантное решение уравнения (4.1). Выбирая калибровку $a = 0$, из (4.4), (4.3) и (4.5) имеем:

$$A_\mu^a = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} x^\nu n^a , \tag{4.8}$$

где $F_{\mu\nu}$ и n^a не зависят от x, причем $n^a n^a = 1$
Таким образом, ковариантно постоянное поле Я.-М. фактически сводится к абелеву тензору $F_{\mu\nu}$.

Условие ковариантного постоянства (7.1), записанное в виде

$$[\nabla_\rho , \hat{G}_{\mu\nu}] = 0 , \tag{4.9}$$

дает для оператора (3.15) факторизацию:

$$U(s) = exp\left\{2ig\hat{G}s\right\} U_0(s) . \tag{4.10}$$

Соотношение (4.10) сводит задачу вычисления величин (3.18) - (3.21) к нахождению матричного элемента оператора $U_0(s)$, вычисление которого, как уже неоднократно отмечалось, эквивалентно решению динамической задачи для некоторой "частицы" [9].
Соответствующий результат имеет вид:

$$(x'|U_0(s)|x'') = -\frac{i}{(4\pi)^2} s^{-2} exp\left\{-\frac{i}{4}(x'-x'')\hat{K}(s)(x'-x'') + \right.$$

$$\left. + \frac{i}{2} x'\hat{N}x'' - \hat{L}(s)\right\} , \tag{4.11}$$

где

$$\hat{N} = ig\hat{G}$$
$$\hat{K}(s) = \hat{N} cth(\hat{N}s)$$
$$\hat{L}(s) = \frac{1}{2} tr\, ln[(\hat{N}s)^{-1} sh(\hat{N}s)] ; \tag{4.12}$$

символ tr здесь и в дальнейшем означает след по лоренцовским индексам.

Раскрывая в (3.18), (13.19) полный след операторов

$$Sp \equiv tr\,\hat{tr}\int d^4x \tag{4.13}$$

и используя (4.11), для однопетлевого лагранжиана получим:

$$\mathcal{L}^{(1)} = -\frac{1}{32\pi^2}\int_0^\infty \frac{ds}{s^3}\, tr\,\hat{tr}\, \exp\{2\hat{N}s - \hat{L}(s)\} + \frac{1}{16\pi^2}\int_0^\infty \frac{ds}{s^3}\,\hat{tr}\,\exp\{-\hat{L}(s)\}, \tag{4.14}$$

причем $\hat{tr}$ означает след по изотопическим индексам. Вычисление следов в (4.14) производится с помощью собственных значений матриц F и $\hat{n}$:

$$F_1^2 = -\mathcal{F} - (\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2)^{1/2} \tag{4.15}$$

$$F_2^2 = -\mathcal{F} + (\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2)^{1/2} \tag{4.16}$$

$$n = 0, \pm i, \tag{4.17}$$

где $\mathcal{F} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$, $\mathcal{G} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$,

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho}.$$

В результате получим

$$\mathcal{L}^{(1)} = -\frac{2}{(4\pi)^2}\int_0^\infty \frac{ds}{s^3}\,\frac{gF_1 s\, gF_2 s}{sh(gF_1 s)\,sh(gF_2 s)}\,\left[ch(2gF_1 s) + ch(2gF_2 s) - 1\right] =$$

$$= -2\,\frac{1}{16\pi^2}\int_0^\infty \frac{ds}{s^3}\,\frac{gF_1 s\quad gF_2 s}{sh(gF_1 s)\,sh(gF_2 s)}$$

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty \frac{ds}{s^3}\,gF_1 s\, gF_2 s\left[\frac{sh(gF_1 s)}{sh(gF_2 s)} + \frac{sh(gF_2 s)}{sh(gF_1 s)}\right].$$

(4.18)

Первый интеграл в правой части (4.18) с точностью до коэффициента 2 совпадает с выражением для однопетлевого лагранжиана скалярной электродинамики [9]. Удвоение этого выражения связано с увеличением фазового объёма из-за присутствия изотопической степени свободы. Второй интеграл в (4.18) обусловлен "спиновым" вкладом [2] $-2gG$ оператора $H(1)$.

---

2) В спинорной электродинамике соответствующий вклад происходит от члена $\frac{1}{2}e\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$.

Выбирая [3] контур интегрирования так, чтобы обеспечить сходимость интегралов при больших S, представим (4.18) в виде:

$$\mathcal{L}^{(1)} = 2\frac{1}{16\pi^2} : \int_{S_0}^{\infty} \frac{ds}{s^3} \frac{gf_1 s \cdot g f_2 s}{sh(gf_1 s)\sin(g f_2 s)} +$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_{S_0}^{\infty}\frac{ds}{s^3}\, gf_1 s\, g f_2 s \left[\frac{\sin(gf_1 s)}{sh(gf_2 s)} -\right.$$

$$\left. - \frac{\sin(g f_2 s)}{sh(gf_1 s)}\right], \qquad (4.19)$$

где f_1 и f_2 вещественны:

$$f_1 = \frac{1}{i} F_1 , \qquad f_2 = F_2 , \qquad (4.20)$$

S_0 - параметр обрезания.

Рассмотрим выражение (4.19), соответствующее чисто "магнитному" полю $\mathcal{G} = 0$, $\mathcal{F} > 0$. В этом случае имеем:

$$f_1 = \sqrt{\vec{H}^2} = H , \qquad f_2 = 0 \qquad (4.21)$$

Подставляя (4.21) в (4.19), получим:

---

[3] Фактически это сводится к замене $S \to -iS$ в первом и третьем слагаемом (4.18)

Применяя стандартную процедуру перенормировки, основанную на общем принципе, требующем обращения в нуль радиационных поправок при выключенном поле, в пределе сильного "магнитного" поля получим:

$$\mathcal{L}^{(1)}(H) \approx -\frac{11}{48\pi^2}(gH)^2 \ln\left(\frac{gH}{\mu^2}\right), \qquad (4.23)$$

где μ -произвольная масса, определяющая точку вычитания [4].

При $\mathcal{G}=0$, $\mathcal{F}<0$ (чисто "электрическое" поле) имеем

$$f_1 = 0, \quad f_2 = \sqrt{E^2} = E,$$

поэтому

$$\mathcal{L}^{(1)}(E) = \frac{1}{8\pi^2}\int_{S_0}^{\infty}\frac{ds}{s^3}\,\frac{gEs}{\sin(gEs)} - \frac{1}{4\pi^2}\int_{S_0}^{\infty}\frac{ds}{s^3}\,gEs\,\sin(gEs)\,. \qquad (4.24)$$

---

4) В к.э.д. выражению (4.23) соответствует асимптотика

$$\mathcal{L}^{(1)}_{к.э.}(H) \approx \frac{(eH)^2}{24\pi^2}\ln\left(\frac{eH}{m_e^2}\right).$$

Интеграл по собственному времени имеет особенности и лагранжиан (4.24) приобретает мнимую часть, вычисление которой дает[5)]

$$2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{L}^{(1)}(E) = \frac{(gE)^2}{4\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{g^2E^2}{48\pi} \qquad (4.25)$$

Поскольку вероятность всех процессов с сохранением вакуумного состояния в объёме V за время T дается величиной

$$\left|exp(i\Gamma)\right|^2 = exp(-2\,\mathrm{Im}\,\Gamma) = exp(-2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{L}\cdot VT) \qquad (4.26)$$

то из (4.25) следует сильная нестабильность вакуумного состояния, если Я.-М. поле осталось безмассовым.

§ 5. Применение ренормализационной группы [10]

В уже упомянутой работе С.Коулмена и Э.Вайнберга [14] метод ренормализационной группы применялся для исследования асимптотики эффективного лагранжиана φ^4 -теории при больших полях.

В этом разделе мы исследуем с этой точки зрения поле Я.-М. Мы увидим, что отрицательный знак в (4.23) отражает как раз асимптотическую свободу теории Я.-М.

5) Выражение (4.27) с точностью до коэффициента 2 совпадает, естественно, с мнимой частью лагранжиана безмассовой частицы спина ноль.

Установим связь между эффективным лагранжианом и β -функцией Гелл-Манна-Лоу, фигурирующей в методе ренормализационной группы, более детально.

Существенным моментом здесь является использование так называемых ковариантных калибровок [12,15,17] (см. формулу (3.2)).

В этих калибровках контр-член имеет универсальный вид:

$$Z \cdot S_{Y.M.} \,, \tag{5.1}$$

причем Z не зависит от вида калибровочной функции.

Из этого следует три важных следствия. Во-первых, между константами перенормировки вершинной и волновой функций имеет место соотношение [12,15,17]

$$Z_1 = Z_3 \,, \tag{5.2}$$

и действие перенормируется как целое.

Во-вторых, Z_1 , Z_3 не зависят от вида калибровочной функции. И, в-третьих, как следствие из первых двух выводов, аномальная размерность поля γ не зависит в этих калибровках от вида калибровочной функции и связана с β -функцией Гелл-Манна-Лоу простым соотношением.

$$\beta = -g\gamma . \tag{5.3}$$

Выбор полей Я.-М.,удовлетворяющих свободным уравнениям движения (3,3), позволяет нам полностью использовать преимущества ковариантных калибровок [12,15,17], обеспечивающих полную калибровочную инвариантность эффективного действия Γ .

При этом соотношение (5,3) имеет место для любых полей, удовлетворяющих (3,3).

Разложим эффективное действие Γ в функциональный ряд Тейлора [21] :

$$\Gamma=\sum_n \frac{1}{n!}\int d^4x_1\ldots d^4x_n\,\Gamma^{(n)\,a_1\ldots a_n}_{\mu_1\ldots\mu_n} A^{a_1}_{\mu_1}\ldots A^{a_n}_{\mu_n},$$

(5.4)

где $\Gamma^{(n)}$ n -частичная одночастично неприводимая вершинная функция, при перенормировках преобразующаяся так:

$$\Gamma^{(n)}_{\tau} = Z_3^{n/2}\,\Gamma^{(n)}_{un} . \qquad (5.5)$$

(5.5), вместе с условиями перенормировки A^a_μ ,

$$(A^a_\mu)_\tau = Z_3^{-1/2}(A^a_\mu)_{un},\ g_\tau = Z_3^{1/2} g_{un}, \qquad (5.5)$$

означает ренорм-групповую инвариантность Γ .

Используя стандартные рассуждения, применяемые обычно при выводе уравнений ренорм-группы [22] и учитывая калибровочную инвариантность, получим следующее уравнение для Γ :

$$\left[\mu^2\frac{\partial}{\partial\mu^2}+\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}+\gamma(g)\int d^4x\,A^a_\mu\frac{\delta}{\delta A^a_\mu}\right]\Gamma=0 \qquad (5.6)$$

Для дальнейших целей необходимо вместо разложения (5.6) по степеням полей A использовать разложение Γ по степеням импульсов, что в координатном пространстве имеет вид

$$\Gamma=\int d^4x\left[\bar{\mathcal{L}}+\tilde{\mathcal{L}}+\tilde{\tilde{\mathcal{L}}}+\ldots\right]. \qquad (5.7)$$

Из соображений калибровочной инвариантности следует, что функция $\bar{\mathcal{L}}$ зависит лишь от инвариантов

$\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, но не содержит производных (ковариантных) от напряженности $G^a_{\mu\nu}$. Функция $\mathcal{L}$ содержит однократное ковариантное дифференцирование и т.д. Функция $\mathcal{L}$ выделена тем, что в нее дают вклад лишь ковариантно постоянные поля (4.1), которые мы изучали детально в п.4.

Поскольку, как уже отмечалось выше, в явно ковариантной формулировке теории Я.-М. происходит перенормировка инвариантного действия как целого, обычные условия перенормировки можно выразить с помощью одной лишь функции $\bar{\mathcal{L}}$:

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \mathcal{F}}\bigg|_{t=0,\ \ \mathcal{G}=0} = -1 \tag{5.8}$$

Подставляя разложение (5.7) в (5.6), получим уравнение, которому удовлетворяет $\bar{\mathcal{L}}$.

Рассмотрим опять поля, для которых $\mathcal{G}$ =0. В этом случае уравнение для $\bar{\mathcal{L}}$ имеет вид

$$\left[\mu^2\frac{\partial}{\partial\mu^2}+\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}+2\gamma(g)\mathcal{F}\frac{\partial}{\partial\mathcal{F}}\right]\bar{\mathcal{L}}=0 \tag{5.9}$$

Определим безразмерную величину $\bar{L}$ следующим образом

$$\bar{L}=\frac{\partial\bar{\mathcal{L}}}{\partial\mathcal{F}}\ . \tag{5.10}$$

Поскольку безразмерная величина $\bar{L}$ может зависеть от $\mathcal{F}$ и μ^2 только через отношение $|\mathcal{F}|^{1/2}/\mu^2$, получим

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t}+\bar{\beta}(g)\frac{\partial}{\partial g}+2\bar{\gamma}(g)\right]\bar{L}=0\ , \tag{5.11}$$

где
$$\bar{\beta} = \frac{\beta}{1-\gamma}, \quad \bar{\gamma} = \frac{\gamma}{1-\gamma},$$

$$t = \ln\left(|\mathcal{F}|^{1/2} / \mu^2 \right). \tag{5.12}$$

Из (5.8) и (5.11) следует

$$\bar{\gamma} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{L}}{\partial t} \Big/_{t=0}, \tag{5.13}$$

а с учетом (5.3) и (5.12):

$$\bar{\beta}_{Y.M} = \frac{g}{2} \frac{\partial \bar{L}}{\partial t} \Big/_{t=0}. \tag{5.14}$$

С целью решить уравнения (5.11) определим функцию $\bar{g}(t,g)$ [22], удовлетворяющую уравнению

$$\frac{d\bar{g}}{dt} = \bar{\beta}_{Y.M}(\bar{g}) \tag{5.15}$$

с граничным условием

$$\bar{g}(0, g) = g. \tag{5.16}$$

Тогда решение (5.11) с граничным условием (5.8) запишется в виде

$$\bar{L}(t,g) = -\exp\left\{2\int_0^t \bar{\gamma}(\bar{g}(t',g))\,dt'\right\} \tag{5.17}$$

Интеграл по t' можно легко вычислить, используя (5.3) и (5.15). Окончательно будем иметь

$$\bar{L}_{Y.M.}(t,g) = -g^2/\bar{g}^2 \tag{5.18}$$

Совершенно очевидно, что к к.э.д. применимы все вышеприведенные аргументы, поэтому для нее можно написать:

$$\bar{L}_{к.э.д}(t,e) = -\frac{e^2}{\bar{e}^2} \tag{5.19}$$

где
$$\frac{d\bar{e}}{dt'} = \beta_{к.э.д.}(\bar{e}),$$

$$t' = \ln(eH/me^2). \tag{5.20}$$

Вышеприведенные замечательные формулы (5.18) и (5.19) являются основой той связи между асимптотикой эффективного лагранжиана для интенсивного поля и поведением калибровочной теории на малых расстояниях, задаваемым β -функцией, о которой шла речь во введении. В частности, как видно из (5.19), β -функция определяет плотность энергии вакуума в однородном магнитном поле. $-\bar{L}(t,g)$ можно считать магнитной (диэлектрической) проницаемостью вакуума в магнитном (электрическом) поле.

До сих пор наше рассмотрение не было связано с теорией возмущений. Воспользовавшись теперь результатами однопетлевого приближения для теории Янга-Миллса (см.(4.23)) и к.э.д. (см.сноску 4)) можно написать:

$$\bar{L}^{(1)}_{Y.M.} = -1 - \frac{11g^2}{24\pi^2}t \tag{5.21а}$$

$$\bar{L}^{(1)}_{к.э.д} = -1 + \frac{e^2}{12\pi^2}t'. \tag{5.21б}$$

Для соответствующих β - функций имеем в этом приближении

$$\beta^{(1)}_{Я.М.} = -\frac{11g^3}{48\pi^2}, \quad \beta^{(1)}_{к.э.д} = e^3/24\pi^2. \qquad (5.22)$$

Различие в знаках (5.21а,б) и в (5.22) для теории Я.-М. и к.э.д. есть, конечно, проявление различия между асимптотической свободной и нуль-зарядовой ситуацией этих теорий.

Из (5.21а) и (5.21б) для "магнитной" ("диэлектрической") проницаемости вакуума в случае поля Я.-М. и к.э.д. в однопетлевом приближении ($gH(E) \gg \mu^2$, $eH(E) \gg m_e^2$) можно написать:

$$\mu^{(1)}_{Я.М}\left(\varepsilon^{(1)}_{Я.М.}\right) \approx 1 + \frac{11}{24\pi^2} g^2 \ln\left(\frac{gH(E)}{\mu^2}\right),$$

$$\mu^{(1)}_{к.э.д.}\left(\varepsilon^{(1)}_{к.э.д.}\right) \approx 1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln\left(\frac{eH(E)}{m_e^2}\right).$$

§ 6. Надежды на конфайнмент? [23]

До сих пор мы все время интересовались асимптотикой по полю однопетлевого лагранжиана (4.19) (или (4.22)).

Что можно сказать о поведении его при конечных полях?

Рассмотрим, например, (4.22), который подробно исследовал Г.К.Саввиди [23]

Воспользовавшись при перенормировке условиями (5.1) и (5.8), интеграл (4.22) можно свести к следующему виду [23]:

$$\mathcal{L}^{(1)}(H) = \bar{\mathcal{L}}^{(1)}(H) =$$

$$= \mu^4 \frac{g^2}{8\pi^2}\left\{\int_0^\infty \frac{dx}{x^3}\left[\frac{ax}{sh\,ax} - 1 - \frac{a^2x}{2}\left(\frac{1}{shx} - \frac{x\,chx}{sh^2x}\right)\right] +\right.$$

$$\left. + 2\int_0^\infty \frac{dx}{x^3}\left[ax\sin ax - \frac{a^2x}{2}(\sin x + x\cos x)\right]\right\},$$

где $a = H/\mu^2$

Интегрируя это выражение, получим для конечных

$$\bar{\mathcal{L}}^{(1)}(H) = -\frac{11}{48\pi^2} g^2H^2\left[\ln\frac{H}{\mu^2} + 1/22\right]$$

Таким образом, для плотности энергии вакуума, находящегося в постоянном "магнитном" янг-миллсовском поле будем иметь [23] :

$$W(H) = \frac{H^2}{2} + \frac{11}{48\pi^2}(gH)^2\left[\ln\frac{H}{\mu^2} + \frac{1}{22}\right]. \qquad (6.1)$$

Эта формула по своей структуре похожа на формулу (3.10) (или (4.5)) статьи С.Коулмена и Э.Вайнберга [14], описывающую динамическое нарушение симметрии за счет радиационных поправок в φ^4 -теории.

Так же как и в этой формуле, в (6.1) минимум энергии вакуума в "магнитном" поле Я.-М. достигается при конечных $H > 0$. Таким образом, однопетлевое рассмотрение позволяет надеяться на то, что за счет обмена глюонами Я.-М. поля можно получить невылетание кварков, и это связано с асимптотической свободой теории. Формула (5.18) и результат по двухпетлевой поправке к $\beta_{Y.M}$ [24] делают правдоподобным, что многопетлевые поправки не приведут к исчезновению минимума энергии вакуума, поляризованного глюонами Я.-М. поля. При этом, конечно, необходимо решить ряд фундаментальных вопросов, например, вопрос о динамическом возникновении масс у глюонов, связанный с ним вопрос о смысле параметра инфракрасного обрезания μ^2 во всех наших выражениях, например, в (6.1) и т.п.

В заключение я искренне благодарю Г.К. Саввиди, совместно с которым опубликован ряд статей, составивших содержание данной лекции, за многочисленные интересные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. D.J.Gross, F.Wilczek, Phys.Rev.Lett.30, 1343,1973; H.D.Politzer, ibid,30,1346,1973
2. Л.Д.Ландау, И.Я.Померанчук. ДАН СССР, 102, 489, 1955.
   Е.С.Фрадкин. ЖЭТФ, 28, 750, 1955.
3. А.Б.Мигдал. ЖЭТФ, 62, 1621, 1972.
4. В.И.Ритус . ЖЭТФ, 69, 1517, 1975.
5. W.Heisenberg, H.Euler, Zs.Phys.,98,714,1936
6. С.Г.Матинян, Г.К.Саввиди, ЯФ, 25, 218, 1977.
7. И.А.Баталин, С.Г.Матинян, Г.К.Саввиди. Препринт ЕФИ-198(44), 1976; ЯФ, 26,1,1977,
8. M.R.Brown, M.T.Duff, Phys.Rev.D11,2124,1975
9. J.Schwinger, Phys.Rev.,82,664,1951
10. R.P.Feynman.Acta Phys.Polon.,24,697,1963
11. L.D.Faddeev, V.N.Popov, Phys.Lett.,25B,29, 1967
12. B.de Witt, Phys.Rev.,162, 1195,1239,1967
13. А.А.Ансельм, Д.И.Дьяконов. ЖЭТФ, 71, 1268, 1976.
14. S.Coleman, E.Weinberg, Phys.Rev. D7,1888, 1973
15. J.Honerkamp, Nucl.Phys.B48,269,1972
16. И.А.Баталин, И.В.Тютин. ЯФ, 20, 569, 1974.
17. R.Kalosh, Nucl.Phys.,B78,293,1974

18. R.Fukuda, T.Kugo,Preprint RIFP-237,1975

19. Г.К.Саввиди. Известия АН Арм.ССР, Физика, 12, 72, 1977 .

20. S.G.Matinyan,G.K.Savvidy,Preprint EFI, 172(18)-76

21. G.Jonna-Lassinio, Nuovo Cim.,34, 1790, 1964

22. C.G.Callan,Phys.Rev.,D2, 1541, 1970
K.Symanzik, Comm.Math.Phys.,68,227, 1970.

23. Г.К.Саввиди. Препринт ЕФИ, 214(6)-77.

24. W.E.Caswell, Phys.Lett.,33,244, 1974.

Рукопись поступила 3-го мая 1977 г.

Редактор Л.П.Мукаян

Тех. редактор А.С.Абрамян

Заказ 1060 ВФ-03329 Тираж 299

Подписано к печати 2д/УП-77г. Формат издания 30х40

2.0 уч.изд.л. Ц.14 к.

Издано Отделом научно-технической информации Ереванского физического института, Ереван-36, пер.Маркаряна 2

индекс 3624