

ԵՐԵՎԱՆԻ ԲՆԱԿԱՆԱԿԱՆ ԳՐԱԴԱՐԱՆ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

SU 4904098

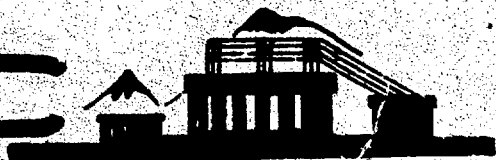
БФН-282(7)-78

Р.П.ГРИГОРЯН

РЕДУКЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ
МУЛЬТИПОЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ

ԱՐՄՍ

ԵՐԵՎԱՆ



ЕРЕВАН

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

БФН-282(7)-78

Р. П. ГРИГОРЯН

РЕДУКЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ
МУЛЬТИПОЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ

Ереван 1978

© *Ереванский физический институт, 1978*

I. Во многих моделях теории поля (калибровочные теории без спонтанного нарушения и со спонтанным нарушением симметрии, модель Фруассара, модель Гейзенберга) появляются дипольные состояния. Поэтому для систем, обладающих дипольными (мультипольными) состояниями представляет интерес развитие формализма в той же степени, в какой это сделано для случая простых полей [1] - построение разложений поля по операторам, удовлетворяющим каноническим коммутационным соотношениям, построение редукционных формул, представление единичного оператора в пространстве состояний через функции Грина и т.д. Это необходимо для доказательства унитарности теории в подпространстве, не включающем мультипольные состояния (в частности, в калибровочных теориях).

Настоящая работа посвящена частичному выполнению такой программы. В п.2 рассмотрена модель дублета скалярных полей $\omega_i(x) = (\varphi_0(x), \varphi_1(x))$; показано, в частности, что дипольное состояние возможно только тогда, когда одно из полей φ_0 и φ_1 соответствует индефинитной метрике.

Построена редукционная формула, найдено представление единичного оператора через функции Грина. Все полученные соотноше-

ния полностью аналогичны соотношениям для случая простого поля $\Psi(x)$ и имеют стандартный вид. В п.3 и 4 в качестве примера построены редукционные формулы для нефизической части поля $\Omega^e = (A_\mu^e, B^e)$ [2] (A_μ^e - калибровочные поля, B^e - скалярные голдстоуновские поля), а также для квантовой электродинамики в произвольной калибровке. В п.5 редукционные формулы, полученные в п.2, обобщаются на случай наличия \mathcal{N} -польных состояний.

2. Рассмотрим свободную теорию, описываемую лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} A \partial_\mu \Psi_0(x) \partial_\mu \Psi_0(x) + B \partial_\mu \Psi_0(x) \partial_\mu \Psi_1(x) + \frac{1}{2} D \partial_\mu \Psi_1(x) \partial_\mu \Psi_1(x) - \frac{1}{2} m^2 (a+A) \Psi_0^2(x) - m^2 (b+B) \Psi_0(x) \Psi_1(x) - \frac{1}{2} m^2 (d+D) \Psi_1^2(x), \quad (I)$$

где $\Psi_0(x)$ и $\Psi_1(x)$ - скалярные поля; A , B , D , a , b и d - числовые параметры, степень произвола которых будет оговорена ниже (коэффициенты в массовых членах выбраны в таком виде для удобства).

Представим лагранжиан (I) в эквивалентной, более удобной форме. Введем для этого дублет скалярных полей

$$\omega_i(x) = \begin{pmatrix} \Psi_0(x) \\ \Psi_1(x) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

через который лагранжиан перепишется в виде:

$$L = \frac{1}{2} \omega_i(x) \Lambda_{ij} \omega_j(x), \quad (3)$$

где



$$\Lambda_{ij} = \begin{pmatrix} -AK - am^2, & -BK - bm^2 \\ -BK - bm^2, & -DK - dm^2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$K \equiv \square + m^2.$$

Пропагатор поля $\omega_i(x)$ имеет вид:

$$\Delta_{ij}^{(0)}(x, y) = i \Lambda_{ij}^{-1} \delta(x-y) = \frac{i}{\det |\Lambda_{ij}|} \begin{pmatrix} -DK - dm^2, & BK + bm^2 \\ BK + bm^2, & -AK - am^2 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Потребуем далее, чтобы $\det |\Lambda_{ij}|$ в точке $\square + m^2 = 0$ был пропорционален величине $(\square + m^2)^2$, что является необходимым условием существования дипольного состояния, т.е. наличия в пропалагаторе (5) полюса второго порядка в точке $p^2 = m^2$. Подобное требование приводит к следующим правилам сумм для коэффициентов:

$$da = b^2,$$

$$Ad + Da = 2bB; \quad (A\mathcal{D} - B^2 \neq 0). \quad (6)$$

С учетом соотношений (6), позволяющих свести число независимых параметров до четырех (A , B , \mathcal{D} и b), уравнения движения для компонент поля $\omega_i(x)$ выглядят следующим образом:

$$(AK + bm^2 \frac{A}{R_{\pm}}) \varphi_0(x) + (BK + bm^2) \varphi_1(x) = 0 \quad (7)$$

$$(BK + bm^2) \varphi_0(x) + (\mathcal{D}K + bm^2 \frac{R_{\pm}}{A}) \varphi_1(x) = 0$$

$$R_{\pm} = B \pm \sqrt{B^2 - A\mathcal{D}}$$

Величина R_{\pm} появляется в результате исключения α и d . Нетрудно проверить, что решения системы (7), соответствующие значениям R_+ и R_- связаны друг с другом линейным преобразованием. Поэтому в дальнейшем ограничимся каким-либо одним значением, например R_+ .

Из системы (7) следует, что поля $\Psi_0(x)$ и $\Psi_1(x)$ в отдельности удовлетворяют однородным уравнениям второго порядка $\text{по } k^2 = \square + m^2$. Естественно поэтому их фурье-разложение искать в виде

$$\Psi_0(x) = \int \frac{dk \sqrt{2k_0}}{()^{3/2}} \left\{ [C_k \delta(k^2 - m^2) + C_{1k} \delta'(k^2 - m^2)] \theta(k_0) e^{-ikx} + \text{э.с.} \right\}$$

$$\Psi_1(x) = \int \frac{dk \sqrt{2k_0}}{()^{3/2}} \left\{ [d_k \delta(k^2 - m^2) + d_{1k} \delta'(k^2 - m^2)] \theta(k_0) e^{-ikx} + \text{э.с.} \right\} \quad (8)$$

$$\delta'(k^2 - m^2) \equiv \frac{1}{2k_0} \frac{\partial}{\partial k_0} \delta(k^2 - m^2),$$

где C_k , C_{1k} , d_k и d_{1k} - некоторые операторы. Наличие уравнений (7) приводит к связям между ними. С их учетом разложения (9) принимает вид:

$$\Psi_0(x) = \int \frac{dk \sqrt{2k_0}}{()^{3/2}} \left\{ [C_k \delta(k^2 - m^2) + \mu \nu \left(\frac{A}{R} C_k + d_k \right) \delta'(k^2 - m^2)] \theta(k_0) e^{-ikx} + \text{э.с.} \right\} \quad (9)$$

$$\Psi_1(x) = \int \frac{dk \sqrt{2k_0}}{()^{3/2}} \left\{ [d_k \delta(k^2 - m^2) + \nu \left(\frac{A}{R} C_k + d_k \right) \delta'(k^2 - m^2)] \theta(k_0) e^{-ikx} + \text{э.с.} \right\},$$

где

$$R \equiv R_+ = B + \sqrt{B^2 - AD}; \quad \mu = - \frac{m^2 (B + \sqrt{B^2 - AD})}{A \sqrt{B^2 - AD}};$$

$$\nu = \frac{m^2}{\sqrt{B^2 - AD}}. \quad (10)$$

Выясним свойства операторов C_k и d_k .

Используя правила канонического квантования для рассматриваемой теории, находим следующие коммутационные соотношения для операторов $C_{\vec{k}}$ и $d_{\vec{k}}$:

$$\begin{aligned} [C_{\vec{k}}, C_{\vec{p}}^{\dagger}] &= \frac{\mathcal{D}}{A\mathcal{D} - B^2} \delta(\vec{k} - \vec{p}) \\ [d_{\vec{k}}, d_{\vec{p}}^{\dagger}] &= \frac{A}{A\mathcal{D} - B^2} \delta(\vec{k} - \vec{p}) \\ [C_{\vec{k}}, d_{\vec{p}}^{\dagger}] &= -\frac{B}{A\mathcal{D} - B^2} \delta(\vec{k} - \vec{p}). \end{aligned} \quad (II)$$

Покажем теперь, что требование наличия полюса второго порядка в пропагаторе приводит к определенному знаку у величины $A\mathcal{D} - B^2$. Покажем кроме того, что дипольное состояние возможно только тогда, когда одно из полей Ψ_0 и Ψ_1 (или один из операторов $C_{\vec{k}}$ и $d_{\vec{k}}$) соответствует индефинитной метрике.

Введем для этого в рассмотрение новые поля Φ_0 и Φ_1 посредством соотношений

$$\Psi_0 = \Phi_0, \quad \Psi_1 = \gamma \Phi_0 + \Phi_1, \quad (I2)$$

и перепишем лагранжиан (I) в терминах полей Φ_0 и Φ_1 (значение γ выбирается из условия образования в нуль члена, пропорционального $\partial_{\mu} \Phi_0 \partial_{\mu} \Phi_1$):

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} A_1 \partial_{\mu} \Phi_0 \partial_{\mu} \Phi_0 + \frac{1}{2} \mathcal{D}_1 \partial_{\mu} \Phi_1 \partial_{\mu} \Phi_1 - \\ & - \frac{1}{2} m^2 (a_1 + A_1) \Phi_0^2 - m^2 b_1 \Phi_0 \Phi_1 - \frac{1}{2} m^2 (d_1 + \mathcal{D}_1) \Phi_1^2, \end{aligned} \quad (I3)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 = A - \frac{B^2}{\mathcal{D}}; \quad a_1 = -\frac{d}{\mathcal{D}} \left(A - \frac{B^2}{\mathcal{D}} \right); \\ \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}; \quad d_1 = d; \quad b_1 = b - d \frac{B}{\mathcal{D}}; \end{aligned} \quad (I4)$$

Соответствие полей ϕ_0 и ϕ_1 одинаковой метрике выражается условием

$$A_1 D_1 > 0. \quad (15)$$

Аналоги правила сумм (6) для лагранжиана (13) имеют вид

$$a_1 d_1 = b_1^2 \quad (16)$$

$$d_1 A_1 + D_1 a_1 = 0$$

из которых следует соотношение

$$-A_1 d_1^2 = D_1 b_1^2. \quad (17)$$

Из выражений (15) и (17) видно, что при $A_1 \neq 0$, $D_1 \neq 0$ они совместны только при условии

$$d_1 = b_1 = 0 \quad (18)$$

или же, с учетом соотношений (14) и (16),

$$a = b = d = 0. \quad (19)$$

Обратившись теперь к выражению (5) для пропагатора и принимая во внимание (19) и равенство

$$\det |A_{ij}| = (AD - B^2) K^2, \quad (20)$$

находим, что поле второго порядка отсутствует. Таким образом, одинаковость метрик обоих полей исключает возможность существования дипольного состояния.

Если же поля ϕ_0 и ϕ_1 соответствуют разным метрикам, то имеем условие

$$A_1 D_1 < 0, \quad (21)$$

совместное с правилами сумм (16), которое в прежних обозначениях имеет вид

$$AD - B^2 < 0. \quad (22)$$

В дальнейшем будем рассматривать только этот случай.

Введем теперь в рассмотрение операторы рождения $a_{\vec{k}}^+$, $b_{\vec{k}}^+$ и уничтожения $a_{\vec{k}}$, $b_{\vec{k}}$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{p}}^+] = \xi_1 \delta(\vec{k} - \vec{p}), [b_{\vec{k}}, b_{\vec{p}}^+] = \xi_2 \delta(\vec{k} - \vec{p}), [a_{\vec{k}}, b_{\vec{p}}^+] = 0 \quad (23)$$

$$\xi_1^2 = \xi_2^2 = 1.$$

С помощью определений

$$u_i(\vec{k}) = \begin{pmatrix} c_{\vec{k}} \\ d_{\vec{k}} \end{pmatrix}, \quad S_i(\vec{k}) = \begin{pmatrix} a_{\vec{k}} \\ b_{\vec{k}} \end{pmatrix} \quad (24)$$

наиболее общее разложение операторов $c_{\vec{k}}$ и $d_{\vec{k}}$ по операторам $a_{\vec{k}}$ и $b_{\vec{k}}$ записывается в виде:

$$u_i(\vec{k}) = P_{ij} S_j(\vec{k}) \equiv N_{ij} M_{je} S_e(\vec{k}), \quad (25)$$

где N_{ij} - матрица, осуществляющая частное разложение и равная

$$N_{ij} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \quad (26)$$

с действительными матричными элементами

$$x_1 = \sqrt{-\frac{D\xi_1}{B^2 - AD}}, \quad x_2 = \sqrt{-\frac{B^2\xi_1}{D(B^2 - AD)}}, \quad y_2 = \sqrt{\frac{\xi_2}{D}}; \quad (27)$$

$$\xi_1 = \text{sign}(-D), \quad \xi_2 = \text{sign} D,$$

а M_{je} - матрица наиболее общего вида, оставляющая инвариантными соотношения коммутаций (23):

$$M_{je} = \begin{pmatrix} \sqrt{1+\rho^2} e^{-i\varphi} & \rho e^{i\varphi} \\ \rho e^{-i\varphi} & \sqrt{1+\rho^2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} e^{i\varphi}, \quad (28)$$

где ρ , φ , ψ и ϕ - действительные произвольные параметры. Проинтегрировав по K_0 в формулах (9) и воспользовавшись обозначениями (24), (26), (28) и равенством (25), получим окончательно разложение поля $\omega_i(x)$ по операторам рождения и уничтожения:

$$\omega_i(x) = \int d\vec{k} \left\{ f_{\vec{k}}^{(0)}(x) P_{ie} S_e(\vec{k}) + f_{\vec{k}}^{(1)}(x) T_{ij} P_{jm} S_m(\vec{k}) \right\} + \text{э.с.} \quad (29)$$

Здесь

$$f_{\vec{k}}^{(0)}(x) = \frac{e^{-ikx}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2K_0}}; \quad f_{\vec{k}}^{(1)}(x) = \frac{e^{-ikx}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2K_0}} \left(\frac{1}{4K_0^2} + \frac{it}{2K_0} \right), \quad (30)$$

матрица T задается выражением:

$$T = \mathcal{O} \begin{pmatrix} \mu \frac{A}{R}, & \mu \\ \nu \frac{A}{R}, & \nu \end{pmatrix}, \quad (31)$$

а величины μ , ν , R - равенствами (10).

Нетрудно убедиться, что формула, обратная (29) есть:

$$S_i(\vec{k}) = i P_{ie}^{-1} \int d\vec{x} \left\{ F_{en}^{(0)*}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \omega_e(x) + F_{en}^{(1)*}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 K \omega_e(x) \right\}, \quad (32)$$

где

$$F_{en}^{(0)*}(x) = \begin{pmatrix} f_{\vec{k}}^{(0)*}(x), & \\ 0, & f_{\vec{k}}^{(0)*}(x) \end{pmatrix}; \quad F_{en}^{(1)*}(x) = \begin{pmatrix} f_{\vec{k}}^{(1)*}(x), & 0 \\ 0, & f_{\vec{k}}^{(1)*}(x) \end{pmatrix} \quad (33)$$

$$K F_{en}^{(1)*}(x) = F_{en}^{(0)*}(x).$$

Предположим теперь, что рассмотренное выше поле $\omega_i(x)$ является асимптотическим пределом ($\omega \in$ - пределом) некоторого гейзенбергова (интерполирующего) поля $\bar{\omega}_i(x)$. Тогда, сле-

для известной схеме свертывания [1], с помощью формулы (33) можно выразить матричные элементы рассеяния через матричные элементы интерполирующего поля (редукционные формулы):

$$\begin{aligned}
 \langle \text{out}; B, \omega_i / A, \text{in} \rangle &= \langle \text{out}; B / S_i^{(\text{out})}(\vec{k}) / A; \text{in} \rangle = \\
 &= i P_{ie}^{-1} \int d\vec{x} [F_{en}^{(0)*}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 + F_{en}^{(1)*}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 K] \langle \text{out}; B | \omega_n(x) / A; \text{in} \rangle = \\
 &= i P_{ie}^{-1} \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \int d\vec{x} [F_{en}^{(0)*}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 + F_{en}^{(1)*}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 K] \langle | \bar{\omega}_n(x) | \rangle = \quad (34) \\
 &= i P_{ie}^{-1} \left\{ \int d\vec{x} \frac{\partial}{\partial x_0} [F_{en}^{(0)*}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 + F_{en}^{(1)*}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 K] \langle | \bar{\omega}_n(x) | \rangle + \right. \\
 &\quad \left. + \lim_{x_0 \rightarrow -\infty} \int d\vec{x} [F_{en}^{(0)*}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 + F_{en}^{(1)*}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 K] \langle | \bar{\omega}_n(x) | \rangle \right\} = \\
 &= i P_{ie}^{-1} \int d\vec{x} F_{\vec{k}; en}^{(1)*}(x) K^2 \langle | \bar{\omega}_n(x) | \rangle + \langle \text{in}; B / S_i^{(\text{in})}(\vec{k}) / A; \text{in} \rangle.
 \end{aligned}$$

В последнем выражении уже в принципе построена редукционная формула (здесь мы редуцировали пока только "частицу" ω_i).

Однако кажется более естественным представление её в несколько иной форме *):

$$\begin{aligned}
 \langle \text{out}; B, \omega_i / A; \text{in} \rangle &= i P_{ie}^{-1} \int d\vec{x} F_{\vec{k}; en}^{(1)*}(x) K^2 \Lambda_{nm}^{-1} \Lambda_{mk} \langle | \bar{\omega}_k(x) | \rangle = \\
 &= i P_{ie}^{-1} \int d\vec{x} F_{\vec{k}; en}^{(1)*}(x) (K^2 \Lambda_{nm}^{-1}) \Lambda_{mk} \langle | \bar{\omega}_k(x) | \rangle = \quad (35) \\
 &= i \int d\vec{x} W_{\vec{k}; im}^*(x) \Lambda_{mk} \langle | \bar{\omega}_k(x) | \rangle,
 \end{aligned}$$

где $W_{\vec{k}; im}^*(x)$ определяется равенством

$$W_{\vec{k}; im}^*(x) = P_{ie}^{-1} \cdot F_{\vec{k}; en}^{(1)*}(x) (K^2 \Lambda_{nm}^{-1}), \quad (36)$$

*)) в последующих формулах матричный элемент единичного оператора будет опускаться.

а Λ_{nm} , в свою очередь, задается равенством (4).

Отметим, что величина $K^2 \Lambda_{nm}^{-1}$ представляет собой локальный оператор, а интегрирование по частям возможно благодаря наличию оператора Λ_{mk} : оно обеспечивает отсутствие полюсов. Явный расчет величины $Q_{\vec{k}; em}^*(x)$, определяемой как

$$Q_{\vec{k}; em}^*(x) = F_{\vec{k}; em}^{(1)*}(x) \left(K^2 \Lambda_{nm}^{-1} \right), \quad (37)$$

приводит к следующему выражению:

$$Q_{\vec{k}; em}^*(x) = \frac{1}{\mathcal{D}} \left[\begin{pmatrix} \mathcal{D} & -B \\ -B & A \end{pmatrix} f_{\vec{k}}^{(0)*}(x) + b_m^2 \begin{pmatrix} R & -1 \\ -1 & A/R \end{pmatrix} f_{\vec{k}}^{(1)*}(x) \right] \quad (38)$$

$$\mathcal{D} = B^2 - AD$$

Величину

$$W_{\vec{k}; im}^*(x) = P_{ie}^{-1} Q_{\vec{k}; em}^*(x) \quad (39)$$

по аналогии со случаем "простого" поля назовем матрицей поляризации, строки которой будут соответствовать векторам поляризации состояний, порождаемых операторами $a_{\vec{k}}$ и $b_{\vec{k}}$.

Легко проверить, что она удовлетворяет соотношению

$$W_{\vec{k}; im}^*(x) \Lambda_{mn}^{-1} = 0. \quad (40)$$

Представляет интерес вычисление единичного оператора в одночастичном подпространстве полного пространства состояний. Для этого предварительно вычислим функцию Вайтмана $\Delta_{ij}^+(x-y)$, определяемую как

$$\Delta_{ij}^+(x-y) = \langle 0 | \omega_i(x) \omega_j(y) | 0 \rangle. \quad (41)$$

Пользуясь разложением (29) для поля $\omega_i(x)$, а также записью коммутационных соотношений (23) в виде

$$[S_e(\vec{k}), S_n^+(\vec{p})] = \eta_{en} \delta(\vec{k} - \vec{p}), \quad (42)$$

где

$$\eta_{en} = \xi_1 \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}; \quad \xi_2 = -\xi_1 \quad (43)$$

представим функцию $\Delta_{ij}^+(x-y)$ в виде

$$\begin{aligned} \Delta_{ij}^+(x-y) = & \int \frac{\sqrt{2k_0} \sqrt{2p_0}}{(2\pi)^3} dk dp \theta(k_0) \theta(p_0) \delta(\vec{k} - \vec{p}) e^{-ikx + ipy} \left\{ \lambda_{ij} \delta(k^2 - m^2) \right. \\ & \times \delta(p^2 - m^2) + T_{ie} \lambda_{ej} \delta'(k^2 - m^2) \delta(p^2 - m^2) + \lambda_{ie} T_{ej} \delta'(p^2 - m^2) \times \\ & \left. \times \delta(k^2 - m^2) + T_{ie} \lambda_{en} T_{nj}^+ \delta'(p^2 - m^2) \delta'(p^2 - m^2) \right\}. \quad (44) \end{aligned}$$

Здесь введено обозначение

$$\lambda_{ij} = P_{im} \eta_{me} P_{ej}^+ = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} -\alpha, & B \\ B, & -A \end{pmatrix}; \quad (45)$$

Пользуясь далее соотношениями

$$\Lambda T^+ = T \Lambda^+, \quad T \Lambda T^+ = 0 \quad (46)$$

справедливость которых легко установить, используя явный вид матриц, а также равенством:

$$\int \frac{\sqrt{2k_0} \sqrt{2p_0}}{(2\pi)^3} dk dp \theta(k_0) \theta(p_0) \delta(\vec{k} - \vec{p}) e^{-ikx + ipy} \left\{ \delta(k^2 - m^2) \delta'(p^2 - m^2) + \right.$$

$$\left. + \delta'(k^2 - m^2) \delta(p^2 - m^2) \right\} = \int \frac{dx}{(2\pi)^3} \theta(k_0) \delta'(k^2 - m^2) e^{-ik(x-y)} \quad (47)$$

представим функцию $\Delta_{ij}^+(x-y)$ окончательно в виде:

$$\Delta_{ij}^+(x-y) = -\frac{i}{2\pi} \left[\begin{pmatrix} \mathcal{D} & -B \\ -B & A \end{pmatrix} \mathcal{D}^+(x-y) + \epsilon m^2 \begin{pmatrix} R & -1 \\ -1 & R \end{pmatrix} E^+(x-y) \right] \quad (48)$$

(ср. с (38)). В выражении (48) подставлено значение матрицы Λ из (45) и введены обозначения:

$$\mathcal{D}^+(x-y) = \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \theta(k_0) \delta(k^2 - m^2) e^{-ik(x-y)} \quad (49)$$

$$E^+(x-y) = \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \theta(k_0) \delta'(k^2 - m^2) e^{-ik(x-y)}.$$

Перейдем теперь к вычислению единичного оператора \hat{I}_1 в одночастичном подространстве.

Он определяется как

$$\hat{I}_1 = \int d\vec{k} |s^i(\vec{k})\rangle \eta_{ij} \langle s^j(\vec{k})| = \int d\vec{k} s_i^*(\vec{k}) |0\rangle \eta_{ij} \langle 0| s_j(\vec{k}).$$

Действительно, если определить вектор одночастичного состояния как

$$\psi_i = \alpha_i a^+ |0\rangle + \beta_i b^+ |0\rangle,$$

то нетрудно проверить выполнение равенства

$$\hat{I}_1 \psi_i = \psi_i$$

в то время как

$$\hat{I}_1 \psi_n = 0 \quad n \neq 1$$

(ψ_n - вектор n -частичного состояния в полном пространстве состояний).

Используя редукционную формулу (35), представим выражение для единичного оператора в виде:

$$\hat{I}_1 = \int dx dy (\bar{\omega}_e(x) \bar{\Lambda}_{ba}) |0\rangle \langle 0| (\Lambda_{cd} \bar{\omega}_d(y)) \int d\vec{k} W_{\vec{k}; ai}(x) \eta_{ij} W_{\vec{k}; je}^*(y).$$

Учитывая соотношение (39), (38), а также равенство

$$(P^{-1})^+ \eta P^{-1} = \lambda^{-1}$$

(λ^{-1} - матрица, обратная к матрице (45)), после несложных преобразований интеграла по импульсам найдем

$$\int d\vec{k} W_{\vec{k}; ai}(x) \eta_{ij} W_{\vec{k}; jc}^*(y) = \Delta_{ac}^+(x-y).$$

Таким образом, для \hat{I}_1 окончательно получается выражение

$$\hat{I}_1 = \int dx dy (\bar{\omega}_e(x) \bar{\Lambda}_{ba}) |0\rangle \Delta_{ac}^+(x-y) \langle 0| (\Lambda_{cd} \bar{\omega}_d(y)). \quad (50)$$

Полученные формулы полностью аналогичны формулам для случая "простого" поля. Поскольку эти формулы имеют стандартный вид, то и все соотношения, которые можно получить при дальнейшем развитии формализма, в частности, системы зацепляющихся уравнений для τ - и ν - функций [1], также будут иметь стандартный вид.

В заключение отметим, что при $B = \bar{b} = 0$ поля φ_0 и φ_1 "расцепляются" (см.(I)).

3. Известно, что в общей калибровочной теории со спонтанным нарушением симметрии по самому построению появляются ℓ нефизических полей B^e , а ℓ компонент калибровочного поля A_μ^e

приобретает массу.^[3] При этом поля B^e и A_μ^e необходимо рассматривать как компоненты единого поля $\Omega_\rho^e = (A_\mu^e, B^e)$. В работе [2] была исследована структура нефизических частиц в такой теории. Как было показано, точный пропагатор $\mathcal{D}_{\rho\rho'}^{ee'}$ поля Ω_ρ^e помимо полюса в точке $\rho^2 = M^e$ (M - точная масса физических состояний поля A_μ^e) имеет также полюс второго порядка в точке $\rho^2 = m^2$ (m - точная масса нефизических частиц, соответствующих полям B^e и продольным компонентом полей A_μ^e). Здесь мы займемся построением редуцированных формул для нефизической части поля Ω_ρ^e . Ситуация во многом сходна с рассмотренной в пункте 2.

Разложение асимптотического поля Ω_ρ^e по операторам рождения и уничтожения имеет вид^[2] (изотопические индексы опущены):

$$A_\mu(x) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} [\mathcal{E}_\mu^e d_{\vec{k}}^e e^{-ikx} + \text{э.с.}] + \frac{\beta}{m^2} \partial_\mu \Psi(x) \quad (51)$$

$$\Psi(x) = \sqrt{-B_1} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2K_0}} \left\{ [a_{\vec{k}} + s(a_{\vec{k}} - b_{\vec{k}})T] e^{-ikx} + \text{э.с.} \right\}$$

$$B(x) = \sqrt{-B_1} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2K_0}} \left\{ [(1-\gamma)a_{\vec{k}} + \gamma b_{\vec{k}} + s(a_{\vec{k}} - b_{\vec{k}})T] e^{-ikx} + \text{э.с.} \right\} \quad (52)$$

где введены обозначения:

$$S = -\frac{A}{B_1}, \quad \gamma = 1 - \frac{B_2}{B_1}, \quad T = \frac{1}{4k_0^2} + \frac{it}{2K_0} \quad (53)$$

Здесь ϵ_μ^e и $d_{\vec{k}}^e$ - векторы поляризации и операторы уничтожения трех физических состояний поля A_μ , $\omega_k^2 = \vec{k}^2 + M^2$; операторы $a_{\vec{k}}$ и $b_{\vec{k}}$ - операторы уничтожения нефизических состояний полей A_μ и B , удовлетворяющие коммутационным соотношениям:

$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{p}}^\dagger] = -\delta(\vec{k} - \vec{p}); [b_{\vec{k}}, b_{\vec{p}}^\dagger] = \delta(\vec{k} - \vec{p}), \quad (54)$$

$K_0^2 = \vec{k}^2 + m^2$; A, B_1, B_2 - постоянные величины, $B_1 < 0$;

β - калибровочный параметр.

Используя разложения (51) и (52) легко установить следующие соотношения

$$t(x) \equiv \partial_\mu A_\mu + \beta B = \frac{\sqrt{-B_1} \beta (s - \gamma m^2)}{m^2} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2K_0}} \left\{ (a_{\vec{k}} - b_{\vec{k}}) e^{-iKx} + \text{э.с.} \right\} \quad (55)$$

$$KB(x) = \sqrt{-B_1} s \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2K_0}} \left\{ (a_{\vec{k}} - b_{\vec{k}}) e^{-iKx} + \text{э.с.} \right\} \quad (56)$$

и как их следствие

$$KB(x) = \frac{sm^2}{\beta(s - \gamma m^2)} t(x). \quad (57)$$

Разрешая соотношения (52) и (56) относительно операторов $a_{\vec{k}}$ и

$b_{\vec{k}}$, получаем для последних

$$a_{\vec{k}} = \frac{i}{\sqrt{-B_1}} \int d\vec{x} \left\{ f_{\vec{k}}^{(0)*}(\vec{x}) \overleftrightarrow{\partial}_0 B(x) + f_{\vec{k}}^{(1)*}(\vec{x}) \overleftrightarrow{\partial}_0 KB(x) + \frac{\gamma}{s} f_{\vec{k}}^{(2)*}(\vec{x}) \overleftrightarrow{\partial}_0 KB(x) \right\},$$

$$b_{\vec{k}} = \frac{i}{\sqrt{-B_1}} \int d\vec{x} \left\{ f_{\vec{k}}^{(0)*}(\vec{x}) \overleftrightarrow{\partial}_0 B(x) + f_{\vec{k}}^{(1)*}(\vec{x}) \overleftrightarrow{\partial}_0 KB(x) + \frac{\gamma-1}{s} f_{\vec{k}}^{(2)*}(\vec{x}) \overleftrightarrow{\partial}_0 KB(x) \right\}, \quad (58)$$

где функции $f_{\vec{k}}^{(0)*}(x)$ и $f_{\vec{k}}^{(1)*}(x)$ определяются из формул (30).
 Введем далее определения

$$S_i(\vec{k}) = \begin{pmatrix} a_{\vec{k}} \\ b_{\vec{k}} \end{pmatrix}, \quad \omega_i(x) = \frac{1}{\sqrt{-B_1}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} t(x) \\ B(x) \end{pmatrix}. \quad (59)$$

Уравнение движения для поля $\omega_i(x)$ имеет вид

$$\Lambda_{ij} \omega_j(x) = 0; \quad \Lambda_{ij} = \begin{pmatrix} K, & 0 \\ -\frac{sm^2}{s-\gamma m^2}, & K \end{pmatrix}. \quad (60)$$

С учетом определений (59) и соотношения (57) формулы (58) перепишутся в виде:

$$S_i(\vec{k}) = i \int d\vec{x} R_{\vec{k}; ij}(x) \vec{\partial}_0 \omega_j(x) \quad (61)$$

с выражением для $R_{\vec{k}; ij}(x)$, равным

$$R_{\vec{k}; ij}(x) = \begin{pmatrix} \frac{m^2}{s-\gamma m^2} \left[\gamma f_{\vec{k}}^{(0)*}(x) + s f_{\vec{k}}^{(1)*}(x) \right], & f_{\vec{k}}^{(0)*}(x) \\ \frac{m^2}{s-\gamma m^2} \left[(\gamma-1) f_{\vec{k}}^{(0)*}(x) + s f_{\vec{k}}^{(1)*}(x) \right], & f_{\vec{k}}^{(0)*}(x) \end{pmatrix}. \quad (62)$$

Для построения редуционных формул воспользуемся формулой (61).
 Кроме того, для удобства представим оператор Λ_{ij} в виде:

$$\Lambda_{ij} = \delta_{ij} K + \tau_{ij}, \quad \tau_{ij} = \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ -\frac{sm^2}{s-\gamma m^2}, & 0 \end{pmatrix}. \quad (63)$$

Тогда, опуская матричный элемент единичного оператора, имеем:

$$\langle out; B, S_i/A; in \rangle = \langle out; B/S_i(\vec{k})/A; in \rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= i \int d\vec{x} R_{\vec{k}; ij}(x) \hat{\partial}_0 \langle \text{out}; B/\omega_j(x)/A; \text{in} \rangle = \\
&= i \int dx [R_{\vec{k}; ij}(x) K \langle / \bar{\omega}_j(x) / \rangle - R_{\vec{k}; ij}(x) \bar{K} \langle / \bar{\omega}_j(x) / \rangle] = \\
&= i \int dx \{ R_{\vec{k}; ie}(x) (\delta_{ej} K + \tau_{ej}) \langle / \bar{\omega}_j(x) / \rangle - R_{\vec{k}; ie}(x) (\delta_{ej} \bar{K} + \tau_{ej}) \langle / \bar{\omega}_j(x) / \rangle = \\
&= i \int dx \{ R_{\vec{k}; ie}(x) \Lambda_{ej} \langle / \bar{\omega}_j(x) / \rangle - R_{\vec{k}; ie}(x) \bar{\Lambda}_{ej} \langle / \bar{\omega}_j(x) / \rangle.
\end{aligned} \tag{64}$$

Здесь через $\bar{\omega}_j(x) = \frac{1}{\sqrt{-B}} \left(\frac{1}{B} \bar{t}(x), \bar{B}(x) \right)$ обозначено интерполирующее поле, асимптотическим пределом которого является поле $\omega_j(x)$. Пользуясь явными выражениями для $R_{\vec{k}; ie}(x)$ и Λ_{ej} легко убедиться в выполнении равенства

$$R_{\vec{k}; ie}(x) \bar{\Lambda}_{ej} = 0. \tag{65}$$

Таким образом, окончательно имеем:

$$\langle \text{out}; B, S_i/A; \text{in} \rangle = i \int dx R_{\vec{k}; ie}(x) \Lambda_{ej} \langle \text{out}; B/\bar{\omega}_j(x)/A; \text{in} \rangle.$$

Назовем матрицу $R_{\vec{k}; ie}(x)$ матрицей поляризации; строки этой матрицы будут представлять собой векторы поляризаций состояний, порождаемых операторами $\alpha_{\vec{k}}$ и $\beta_{\vec{k}}$.

4. В качестве следующего примера построим редукционные формулы для квантовой электродинамики.

Пусть перенормированный гейзенберговский оператор электромагнитного поля $\bar{A}_\nu(x)$ удовлетворяет уравнению

$$[\square g_{\mu\nu} - (\alpha + 1) \partial_\mu \partial_\nu] \bar{A}_\nu(x) = j_\mu(x) \quad (66)$$

(α - перенормированный калибровочный параметр). Оно может быть получено варьированием лагранжиана

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + \frac{\alpha}{2} (\partial_\mu \bar{A}_\mu(x))^2 + L_{int}, \quad (67)$$

где

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \bar{A}_\nu(x) - \partial_\nu \bar{A}_\mu(x), \quad (68)$$

а функция $\alpha/2 (\partial_\mu \bar{A}_\mu(x))^2$ представляет собой функцию, фиксирующую калибровку (ковариантная калибровка).

Уравнения движения для асимптотического предела поля $\bar{A}_\mu(x)$ (обозначим его через $A_\mu(x)$), очевидно, будут

$$\Lambda_{\mu\nu} A_\nu \equiv (\square g_{\mu\nu} - (\alpha + 1) \partial_\mu \partial_\nu) A_\nu(x) = 0, \quad (69)$$

а соответствующий пропагатор выразится формулой

$$D_{\mu\nu}(x, y) = i \Lambda_{\mu\nu}^{-1}(x, y) = \left(\frac{g_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square}}{\square} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\alpha \square^2} \right) \delta(x-y), \quad (70)$$

из которой видно, что при всех α , кроме $\alpha = -1$, присутствует дипольное состояние.

Для написания фурье-разложения поля $A_\mu(x)$ введем в рассмотрение полные наборы функций $\{f_{\mu, \vec{k}}^a(x)\}$ и $\{h_{\mu, \vec{k}}^a(x)\}$, которые определяются следующим образом:

$$f_{\mu, \vec{k}}^e(x) = \xi_{\mu}^e(\vec{k}) f_{\vec{k}}^{(0)}(x) \quad (71)$$

$$h_{\mu, \vec{k}}^e(x) = \xi_{\mu}^e(\vec{k}) f_{\vec{k}}^{(1)}(x),$$

где вектора $\xi_{\mu}^e(\vec{k})$ удовлетворяют равенству

$$\xi_{\mu}^e(\vec{k}) \xi^{m, \mu}(\vec{k}) = g^{em}, \quad (72)$$

а функции $f_{\vec{k}}^{(0)}(x)$ и $f_{\vec{k}}^{(1)}(x)$ определяются выражениями (30).

Для функций $f_{\mu, \vec{k}}^e(x)$ и $h_{\mu, \vec{k}}^e(x)$ выполняются соотношения

$$\square h_{\mu, \vec{k}}^e(x) = f_{\mu, \vec{k}}^e(x); \quad \square f_{\mu, \vec{k}}^e(x) = 0;$$

$$i \int d\vec{x} f_{\mu, \vec{k}}^{m*}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{\vec{p}}^{\mu, e}(x) = g^{me} \delta(\vec{k} - \vec{p}); \quad (73)$$

$$\int d\vec{k} d\vec{x} f_{\mu, \vec{k}}^{m*} \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{\vec{p}}^{\mu, e*}(x) = \int d\vec{k} d\vec{x} f_{\mu, \vec{k}}^m(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{\vec{p}}^{\mu, e}(x) = 0.$$

Разложение поля $A_{\mu}(x)$ записывается в виде:

$$A_{\mu}(x) = \int d\vec{k} \left\{ [f_{\mu, e; \vec{k}}^{(0)}(x) a_{\vec{k}}^e + h_{\mu, e; \vec{k}}(x) b_{\vec{k}}^e] + \text{э. с.} \right\}. \quad (74)$$

Операторы $a_{\vec{k}}^e$ и $b_{\vec{k}}^e$ не являются независимыми. Наличие уравнений движения приводит к следующей связи между ними:

$$b_{\vec{k}}^e = \frac{2k^e}{d-1} (\alpha+1) K_{\nu} \xi_{\nu}^e a_{\vec{k}}^e. \quad (75)$$

Выражение из операторов $a_{\vec{k}}^e$ через поле $A_{\mu}(x)$ задается формулой:

$$a_{\vec{k}}^e = i \int d\vec{x} \left\{ f_{\mu, \vec{k}}^e(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 A^{\mu}(x) + h_{\mu, \vec{k}}^e(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \square A^{\mu}(x) \right\}. \quad (76)$$

При выводе последнего соотношения мы воспользовались определением:

$$f_{\mu, \vec{k}}^e(x) = g^{em} f_{\mu, m; \vec{k}}(x); h_{\mu, \vec{k}}^e(x) = g^{em} h_{\mu, m; \vec{k}}(x). \quad (77)$$

Отметим, что соответствующим выбором векторов $\xi_{\mu}^e(\vec{k})$ можно добиться, чтобы операторы $Q_{\vec{k}}^e$ удовлетворяли каноническим коммутационным соотношениям.

Формула (76) является исходной для построения редуцированной формулы. Построение проводится аналогично тому, как это было сделано в пункте 2. Опуская несложные вычисления, приведем окончательную формулу:

$$\begin{aligned} \langle \text{out}; B, \alpha^e/H; \text{in} \rangle &= \langle \text{out}; B/\alpha_{\vec{k}}^e/A; \text{in} \rangle = \\ &= i \int dx \left[f_{\vec{k}}^{\nu, e*}(x) - \frac{\alpha+1}{\alpha} \gamma^{\nu} \partial_{\mu} h_{\vec{k}}^{\mu, e*}(x) \right] \Lambda_{\nu\lambda} A^{\lambda}(x), \end{aligned} \quad (78)$$

где оператор $\Lambda_{\nu\lambda}$ определяется из выражения (69).

Величину

$$F_{\vec{k}}^{\nu, e*}(x) = f_{\vec{k}}^{\nu, e*}(x) - \frac{\alpha+1}{\alpha} \gamma^{\nu} \partial_{\mu} h_{\vec{k}}^{\mu, e*}(x) \quad (79)$$

по аналогии с предыдущими случаями назовем матрицей поляризации.

5. В настоящем пункте правила построения редуцированных формул для дипольных состояний, выведенных в пункте 2, будут обобщены на случай $(n+1)$ - полевых состояний.

Рассмотрим теорию, описываемую лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} \partial_{\mu} \psi_i A_{ij} \partial_{\mu} \psi_j - \frac{m^2}{2} \psi_i (B_{ij} + A_{ij}) \psi_j, \quad (80)$$

где ψ_i - мультиплет массивных скалярных полей ($i = 0, 1, \dots, n$), а A_{ij} и B_{ij} - числовые матрицы (о степени их произвола будет

сказано ниже; A_{ij} - неособая матрица).

Представим лагранжиан (80) в эквивалентной форме

$$L = \frac{1}{2} \varphi_i \Lambda_{ij} \varphi_j. \quad (81)$$

где

$$\Lambda_{ij} = -A_{ij} K - m^2 B_{ij}. \quad (82)$$

Тогда уравнения движения полей φ_i запишутся в виде

$$\Lambda_{ij} \varphi_j = 0 \quad (83)$$

а пропагатор $D_{ij}^{(0)}(x, y)$ выразится соотношением

$$D_{ij}^{(0)}(x, y) = i \Lambda_{ij}^{-1} \delta(x - y). \quad (84)$$

Отметим сразу же, что мы не будем касаться вопросов, связанных с выявлением условий существования полюса $(n+1)$ порядка в пропагаторе, подобно тому, как это было сделано в пункте 2.

Мы просто предположим, что матрицы A_{ij} и B_{ij} таковы, что все необходимые и достаточные условия для этого выполняются.

В частности

$$\det |\Lambda_{ij}| = \det |A_{ij}| \cdot K^{n+1}. \quad (85)$$

Очевидно, при этом каждое поле из мультиплета удовлетворяет уравнению

$$K^{n+1} \varphi_i(x) = 0. \quad (86)$$

Поэтому естественно искать их фурье-разложение в виде:

$$\Psi_i(x) = \sum_{e=0}^n \int d\vec{k} [a_i^{(e)}(\vec{k}) f_{\vec{k}}^{(e)}(x) + \text{э.с.}], \quad (87)$$

где

$$f_{\vec{k}}^{(e)}(x) = \int d\kappa_0 \frac{\sqrt{2\kappa_0}}{(2\pi)^{3/2}} \theta(\kappa_0) e^{-i\kappa x} \delta^{(e)}(\kappa^2 - m^2) \quad (88)$$

$$\delta^{(e)}(\kappa^2 - m^2) = \left(\frac{\partial}{\partial \kappa^2} \right)^e \delta(\kappa^2 - m^2) = (-1)^e \left(\frac{\partial}{\partial m^2} \right)^e \delta(\kappa^2 - m^2). \quad (89)$$

Операторы $a_i^{(0)+}$, $a_i^{(0)}$, вообще говоря, не являются операторами рождения и уничтожения. Для установления их коммутационных соотношений необходимо было бы воспользоваться правилами канонического квантования (операторы же $a_i^{(e)}$ ($e \neq 0$), очевидно, будут являться линейными комбинациями операторов $a_i^{(0)}$; для случая $n=1$ см. пункт 2).

Ближайшей нашей задачей теперь будет получение соотношений, выражающих операторы $a_i^{(0)}$, $a_i^{(0)+}$ через поля $\Psi_i(x)$. При этом мы используем формулу

$$K^m \Psi_i(x) = m! \sum_{e=m}^n C_e^m \int d\vec{k} [a_i^{(e)}(\vec{k}) f_{\vec{k}}^{(e-m)}(x) + \text{э.с.}], \quad (90)$$

которая немедленно следует из следующей формулы:

$$K^m f_{\vec{k}}^{(e)}(x) = m! C_e^m f_{\vec{k}}^{(e-m)}(x). \quad (91)$$

Последнюю же легко доказать, пользуясь определением (88) для $f_{\vec{k}}^{(e)}(x)$. Действительно, введя для краткости обозначение

$$g(k) = \frac{\sqrt{2k_0}}{(2\pi)^{3/2}} \theta(k_0) e^{-ikx} \quad (92)$$

и перейдя к интегрированию по k_0^2 , после интегрирования по частям получим

$$K^m f_{\vec{k}}^{(e)}(x) = \frac{(-1)^e}{2} \int dk_0^2 \delta(k^2 - m^2) \sum_{r=0}^e C_e^r \left(\frac{\partial}{\partial k_0^2} \right)^r [(m^2 - k^2)^m] \left(\frac{\partial}{\partial k_0^2} \right)^{e-r} \frac{g(k)}{\sqrt{k_0^2}} \quad (93)$$

В правой части же из всей суммы лишь один интеграл (при $r=m$) отличен от нуля. Таким образом

$$\begin{aligned} K^m f_{\vec{k}}^{(e)}(x) &= m! C_e^m \frac{(-1)^{e-m}}{2} \int dk_0^2 \delta(k^2 - m^2) \left(\frac{\partial}{\partial k_0^2} \right)^{e-m} \frac{g(k)}{\sqrt{k_0^2}} = \\ &= m! C_e^m \int dk_0 g(k) \left(\frac{\partial}{\partial k_0^2} \right)^{e-m} \delta(k^2 - m^2) = m! C_e^m f_{\vec{k}}^{(e-m)}(x). \end{aligned} \quad (94)$$

Прямое вычисление операторов $\alpha_i^{(e)}$ при $e=n$, $e=n-1$, $e=n-2$ приводит к следующим выражениям:

$$\alpha_i^{(n)}(\vec{k}) = \frac{i}{n!} \int d\vec{x} f_{\vec{k}}^{(0)*}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 K^n \psi_i(x)$$

$$\alpha_i^{(n-1)}(\vec{k}) = \frac{i}{(n-1)!} \int d\vec{x} \left[f_{\vec{k}}^{(0)*}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 K^{n-1} \psi_i(x) + f_{\vec{k}}^{(1)*}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 K^n \psi_i(x) \right] \quad (95)$$

$$\alpha_i^{(n-2)}(\vec{k}) = \frac{i}{(n-2)!} \int d\vec{x} \left[f_{\vec{k}}^{(0)*}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 K^{n-2} \psi_i(x) + f_{\vec{k}}^{(1)*}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 K^{n-1} \psi_i(x) + \frac{1}{2} f_{\vec{k}}^{(2)*}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 K^n \psi_i(x) \right]$$

Предположим теперь (используя метод математической индукции), что выражение для оператора $\alpha_i^{(e)}(\vec{k})$ дается формулой

$$\alpha_i^{(e)}(\vec{k}) = \frac{i}{e!} \sum_{j=e}^n \int d\vec{x} \frac{1}{(j-e)!} f_{\vec{k}}^{(j-e)*}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 K^j \psi_i(x) \quad (96)$$

и найдем выражение для $a_i^{(e-1)}(\vec{k})$.

Воспользуемся поэтому формулой (90) для $m = e-1$ и перепишем ее в виде

$$\int d\vec{k} \left(a_i^{(e-1)}(\vec{k}) f_{\vec{k}}^{(0)}(x) + \text{э.с.} \right) = \frac{1}{(e-1)!} K^{e-1} \psi_i(x) - \sum_{r=e}^n C_r^{e-1} \int d\vec{k} \left(a_i^{(r)}(\vec{k}) f_{\vec{k}}^{(r-e+1)}(x) + \text{э.с.} \right), \quad (97)$$

откуда для оператора $a_i^{(e-1)}(\vec{k})$ получаем выражение

$$a_i^{(e-1)}(\vec{k}) = i \int d\vec{x} f_{\vec{k}}^{(0)*}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \left[\frac{1}{(e-1)!} K^{e-1} \psi_i(x) - \sum_{r=e}^n C_r^{e-1} \int d\vec{p} \left(a_i^{(r)}(\vec{p}) f_{\vec{p}}^{(r-e+1)}(x) + \text{э.с.} \right) \right]. \quad (98)$$

Подставляя теперь вместо $a_i^{(r)}(\vec{p})$ его значение из формулы (96), после некоторых преобразований получим

$$a_i^{(e-1)}(\vec{k}) = \frac{i}{(e-1)!} \int d\vec{x} f_{\vec{k}}^{(0)*}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 K^{e-1} \psi_i(x) + \sum_{j=e}^n \sum_{r=e}^j C_r^{e-1} \frac{1}{r!(j-r)!} \times$$

$$\times \int d\vec{y} d\vec{x} d\vec{p} \left\{ f_{\vec{k}}^{(0)*}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{\vec{p}}^{(r-e+1)}(x) \cdot f_{\vec{p}}^{(j-r)*}(y) - f_{\vec{k}}^{(0)*}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{\vec{p}}^{(r-e+1)*}(x) \cdot f_{\vec{p}}^{(j-r)}(y) \right\} \overleftrightarrow{\partial}_0 K^j \psi_i(y) \quad (99)$$

(отметим, что при выводе последнего соотношения учитывалось равенство $x_0 = y_0$). Отсюда видно, что выражение для $a_i^{(e-1)}(\vec{k})$ совпадает с формулой (96) с заменой в последней e на $e-1$, если справедливо равенство:

$$\sum_{r=e}^j \frac{C_r^{e-1}}{r!(j-r)!} \int d\vec{x} d\vec{p} \left\{ f_{\vec{k}}^{(0)*}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{\vec{p}}^{(r-e+1)}(x) \cdot f_{\vec{p}}^{(j-r)*}(y) - f_{\vec{k}}^{(0)*}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{\vec{p}}^{(r-e+1)*}(x) \cdot f_{\vec{p}}^{(j-r)}(y) \right\} =$$

$$= \frac{i}{(e-1)!} \frac{1}{(j-e+1)!} f_{\vec{k}}^{(j-e+1)}(y); \quad x_0 = y_0. \quad (100)$$

Для доказательства этого равенства левую его часть (обозначим ее через γ) преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \frac{(-1)^{j-e+1}}{(e-1)!} \sum_{r=e}^j \frac{1}{(j-r)!(r-e+1)!} \int d\vec{x} d\vec{p} f_{\vec{k}}^{(0)*}(\vec{x}) \overleftrightarrow{\partial}_0 \left[\left(\frac{\partial}{\partial m^2} \right)^{r-e+1} f_{\vec{p}}^{(0)}(\vec{x}) \left(\frac{\partial}{\partial m^2} \right)^{j-r} f_{\vec{p}}^{(0)*}(\vec{y}) - \text{э.с.} \right] \\
 &= \frac{(-1)^{j-e+1}}{(e-1)!(j-e+1)!} \int d\vec{x} d\vec{p} f_{\vec{k}}^{(0)*}(\vec{x}) \overleftrightarrow{\partial}_0 \sum_{r=1}^{j-e+1} \frac{(j-e+1)!}{r!(j-e-r+1)!} \left[\left(\frac{\partial}{\partial m^2} \right)^{r'} f_{\vec{p}}^{(0)}(\vec{x}) \left(\frac{\partial}{\partial m^2} \right)^{j-r'-e+1} f_{\vec{p}}^{(0)*}(\vec{y}) - \text{э.с.} \right] \\
 &= \frac{(-1)^{j-e+1}}{(e-1)!(j-e+1)!} \int d\vec{x} d\vec{p} f_{\vec{k}}^{(0)*}(\vec{x}) \overleftrightarrow{\partial}_0 \left\{ f_{\vec{p}}^{(0)}(\vec{x}) \left(\frac{\partial}{\partial m^2} \right)^{j-e+1} f_{\vec{p}}^{(0)*}(\vec{y}) + f_{\vec{p}}^{(0)*}(\vec{x}) \left(\frac{\partial}{\partial m^2} \right)^{j-e+1} f_{\vec{p}}^{(0)}(\vec{y}) + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\partial}{\partial m^2} \right)^{j-e+1} [f_{\vec{p}}^{(0)}(\vec{x}) f_{\vec{p}}^{(0)*}(\vec{y}) - \text{э.с.}] \right\} = \frac{i}{(e-1)!} \frac{1}{(j-e+1)!} f_{\vec{k}}^{(j-e+1)*}(\vec{y}).
 \end{aligned}$$

При написании последнего равенства мы воспользовались соотношениями, которые легко проверяются:

$$i \int d\vec{x} f_{\vec{k}}^{(0)*}(\vec{x}) \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{\vec{p}}^{(0)}(\vec{x}) = \delta(\vec{k} - \vec{p})$$

$$\int d\vec{x} d\vec{p} f_{\vec{k}}^{(0)}(\vec{x}) \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{\vec{p}}^{(0)}(\vec{x}) = 0$$

$$\int d\vec{x} d\vec{p} f_{\vec{k}}^{(0)*}(\vec{x}) \overleftrightarrow{\partial}_{0x} \left(\frac{\partial}{\partial m^2} \right) [f_{\vec{p}}^{(0)}(\vec{x}) f_{\vec{p}}^{(0)*}(\vec{y}) - \text{э.с.}] \Big|_{x_0=y_0} = 0. \quad (102)$$

Таким образом, равенство (100) доказано, что в свою очередь означает справедливость формулы (96).

Для оператора $\hat{a}_i^{(0)}(\vec{k})$ теперь имеем выражение:

$$a_i^{(0)}(\vec{k}) = i \sum_{j=0}^n \int d\vec{x} \frac{1}{j!} F_{\vec{k}; i e}^{(j)*}(\vec{x}) \overleftrightarrow{\partial}_0 k^j \psi_e(\vec{x}), \quad (103)$$

где введено обозначение

$$F_{\vec{k}; i e}^{(j)*}(\vec{x}) = f_{\vec{k}}^{(j)*}(\vec{x}) I_{i e} \quad (104)$$

в I_{ie} - единичная матрица.

Предположим теперь, что поля $\Psi_i(x)$ являются асимптотическими пределами гейзенберговских полей $\bar{\Psi}_i(x)$. Тогда на основании формулы (103) могут быть выведены редукционные формулы.

Введем поэтому в рассмотрение операторы рождения и уничтожения $S_i^+(\vec{k}), S_i(\vec{k})$ посредством соотношений

$$\alpha_i^{(0)}(\vec{k}) = R_{ie} S_e(\vec{k}); \quad \alpha_i^{(0)\dagger}(\vec{k}) = R_{ie}^* S_e^+(\vec{k}); \quad (105)$$

где R_{ie} - неособая матрица, осуществляющая наиболее общее разложение операторов $\alpha_i^{(0)}(\vec{k})$ по операторам $S_i(\vec{k})$.

Опуская член, соответствующий матричному элементу единичного оператора, имеем:

$$\begin{aligned} \langle \text{out}; B, S_j / A; \text{in} \rangle &= \langle \text{out}; B / S_j(\vec{k}) / A; \text{in} \rangle = \\ &= i R_{ji}^{-1} \sum_{j=0}^n \int dx \frac{1}{j!} [F_{\vec{k}; ie}^{(j)*}(x) K^{j+1} \langle / \bar{\Psi}_e(x) / \rangle - \\ &- K F_{\vec{k}; ie}^{(j)*}(x) \cdot K^j \langle / \bar{\Psi}_e(x) / \rangle]. \end{aligned} \quad (106)$$

Принимая далее во внимание обозначение (104) и формулу (91) для $m=1$, преобразуем последнее выражение к виду:

$$\begin{aligned} \langle \text{out}; B, S_j / A; \text{in} \rangle &= i R_{ji}^{-1} \frac{1}{n!} \int dx F_{\vec{k}; ie}^{(n)*}(x) K^{n+1} \langle / \bar{\Psi}_e(x) / \rangle = \\ &= \frac{i}{n!} R_{ji}^{-1} \int dx F_{\vec{k}; ie}^{(n)*}(x) \left(K^{n+1} \Lambda_{er}^{-1} \right) \Lambda_{rm} \langle / \bar{\Psi}_m(x) / \rangle \end{aligned} \quad (107)$$

(см. замечание после формулы (36))

Введя обозначение

$$W_{\vec{k}; jr}^{(n)*}(x) = \frac{1}{n!} R_{ji}^{-1} F_{\vec{k}; ie}^{(n)*}(x) \left(K^{n+1} \Lambda_{er}^{-1} \right) \quad (108)$$

получим окончательно

$$\langle out; B, S_j / A; in \rangle = i \int dx W_{\vec{k}; jr}^{(n)*}(x) \Lambda_{rm} \langle out; B / \bar{\Psi}_m(x) / A; in \rangle. \quad (109)$$

Назовем матрицу $W_{\vec{k}; jr}^{(n)*}(x)$ матрицей поляризации; j -ая строка этой матрицы выступает в роли вектора поляризации состояния, порождаемого оператором $S_j(\vec{k})$.

Как видно, редукционная формула (109) имеет стандартный вид

В заключение автор благодарит И.В.Тютиня за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИЛ, 1963.
2. Р.П.Григорян. ФИАН Препринт 50, 1976.
3. Fradkin E.S., Tyutin I.V., Rivista Nuovo Cimento 4,1,1974.

Рукопись поступила 18-го января, 1978г.

Редактор Л.П.Мукаян
Тех.редактор А.С.Абрамян

Заказ 136

В9-03756

Тираж 299

Подписано к печати 29/III-78г.

Формат издания 30x40

2,0 уч.изд.л. Ц. 14 к.

Издано Отделом научно-технической информации
Ереванского физического института, Ереван-36, пер.Маркаряна 2

индекс 3624