

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ԻՆՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЕФИ-288(13)-78

ՏՈՒՆՅԱՆ

Ա.Ս.ԱՄԱՏՈՒՆԻ, Ս.Գ.ԱՐՄԵՆԻԱՆ

Օ ՎԶԱԻՄՈԴԵՅՏՎԻՄ ԲՈՒՑՈՒՑ-ԲՈՒՑՈՒՑ
Վ ԷԼԵԿՏՐՈՆ-ՓՈԶԻՏՐՈՆՆԱԿ ԿՈՒՄՍՈՒՄԻՆԱԿ

ԱՐՄԵՆԻԱ

ԵՐԵՎԱՆ



ԵՐԵՎԱՆ

1978

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ФФИ-288(13)-78

А.Ц.АМАТУНИ, С.Г.АРУТЮНЯН

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПУЧОК - ПУЧОК В
ЭЛЕКТРОН - ПОЗИТРОННЫХ НАКОПИТЕЛЯХ

(ОБЗОР)

Ереван 1978

© *Ереванский физический институт, 1978*

Введение

Обилие качественно новых результатов, полученных в последнее время на электрон-позитронных встречных пучках, стимулировало и ускорило сооружение нового поколения электрон-позитронных накопителей: ВЭПП-4, Новосибирск [1], CESR, Ита. [2], PEP, Стэнфорд [3], PETRA, Гамбург [4].

Европейский комитет по ускорителям будущего в мае 1971 г. рекомендовал [5] создание в восьмидесятые годы электрон-позитронного кольца на энергии 200 ГэВ в системе центра инерции (с возможной первой фазой его работы при энергии 140 ГэВ). Эта тенденция развития настоятельно диктует проведение более полного и тщательного теоретического анализа движения встречных пучков в накопителе в целях оптимизации его параметров. В частности, поиск путей увеличения одного из определяющих параметров накопителя — светимости, становится более насущной проблемой, чем это было при проектировании и сооружении первого поколения электрон-позитронных колец во второй половине пятидесятых годов.

Достигнутые значения светимости зависят от энергии накопителя и меняются в пределах $10^{29} + 10^{32} \text{ см}^{-2} \text{ сек}^{-1}$ (см. табл. I). Это позволяет реально намечать сечения $10^{-34} + 10^{-35} \text{ см}^2$ при энергиях 10-40 ГэВ в системе центра инерции. Для измерения сечений на порядок или два меньших необходимо соответствующее увеличение на один-два порядка светимости накопителя (при одновременном увеличении точности экспериментальных установок в такой степени, чтобы систематическая ошибка была меньше статистической). Повышение светимости настоятельно требуется при увеличении энергии накопителей, ибо сечения многих процессов падают с ростом энергии. Однако и при уже достигнутых,

относительно небольших (до 10 Гэв) энергиях физическая информация, полученная на встречных e^+e^- -пучках со светимостью $10^{32}+10^{34}$ см⁻²сек⁻¹, как следует из анализа проведенного в [6], в целом ряде экспериментов будет сравнима по своей значимости с информацией, которую можно будет получить на накопителях будущего поколения по энергии.

Существует несколько эффектов влияющих на светимость электрон-позитронных накопителей. К их числу относятся: неустойчивости одиночного пучка, обусловленные кулоновским расталкиванием (при увеличении числа частиц в пучке), взаимодействие пучка с проводящими стенками камеры, взаимодействие пучков с резонаторами, коллективные неустойчивости двух пучков и т.д. [7]. Наиболее существенным среди этих эффектов, влияющих на величину светимости накопителей является взаимодействие пучков-пучков. Изучению этого взаимодействия и его влияния на светимость накопителей посвящено достаточно много теоретических и экспериментальных работ, отличающихся разнообразием подходов, значимостью и областью применимости результатов. Это побудило нас изучить современное состояние вопроса о взаимодействии встречных e^+e^- -пучков и попытаться наметить (по крайней мере для себя) пути дальнейших теоретических исследований по возможному увеличению светимости электрон-позитронных накопителей. Опубликованные ранее обзоры (см. например, [7,8]) не содержат большого количества работ, вышедших позже и посвященных взаимодействию встречных электрон-позитронных пучков. Нам представляется, что предлагаемая работа в определенной мере восполнит этот пробел в литературе.

1. ЛИНЕЙНЫЙ СДВИГ ЧАСТОТЫ

1.1. Основные понятия и определения

Светимость накопителя \mathcal{L} со встречными пучками связана с числом событий n изучаемого процесса взаимодействия, имеющего сечение σ соотношением:

$$n = \mathcal{L} \sigma \quad (1)$$

и является характеристикой данной ускорительной или накопительной установки. Светимость накопителя со встречными пучками определяется как [7]

$$\mathcal{L} = \frac{f}{4} \frac{N_1 N_2}{A_{int}} \text{ см}^{-2} \text{ сек}^{-1}, \quad (2)$$

где f частота встреч пучков, N_1 и N_2 числа частиц в первом и втором пучках, A_{int} эффективная площадь поперечного сечения пучков в местах встречи. В связи с понятиями техни-
ческими трудностями добиться повышения светимости за счет увеличения количества мест встречи пучков невозможно.

Для чисел частиц в каждом пучке существует жесткое ограничение, для электрон-позитронных накопителей обусловленное требованием компенсации энергии частиц на синхротронное излучение. Отсюда следует, что повышение светимости накопителя определяется только возможностью уменьшения поперечного сечения взаимодействующих пучков. A_{int} . Очевидно, что основной причиной увеличения A_{int} по сравнению с площадями невозмущенных одиночных пучков является взаимодействие пучок-пучок. Таким образом, вопрос поисков путей повышения светимости накопитель со встречными пучками в первую очередь связан с изучением электромагнитного взаимодействия этих пучков, которое сильно затруднено нелинейным характером эти взаимодействия.

Очевидно, что какими бы не были числа N_1 и N_2 в первом и втором пучках, всегда существует только обобщенное взаимодействие пучков. Тем не менее, обычно предполагается, что один из пучков "сильный", а другой - "слабый", т.е. рассматривается влияние более интенсивного пучка, считая его заданным, на менее интенсивный. Такое предположение не может быть объяснено никакими, даже качественными, рассуждениями и в основном оправдывается, помимо стремления избежать значительного усложнения теории в случае рассмотрения двух "сильных" пучков, еще и реальным различием по интенсивности между электронным и позитронным пучками в накопителях. Понятно, что эти причины имеют временный характер. Качественное объяснение эффектов взаимодействия встречных пучков можно найти, например, в обзорной работе Сандса [7], которой мы следуем в первой части настоящего параграфа.

В большинстве накопителей доминирующей нестабильностью является нестабильность вертикальных колебаний, поэтому рассматривается z -компонента электрического поля действующего на частицу "слабого" пучка со стороны "сильного" пучка

$$E_z = \frac{ze 4\pi mc^2}{e} \frac{N_B}{\ell wh} z \quad (3)$$

представив сгусток "сильного" пучка прямоугольной пластиной длиной ℓ шириной W и высотой h с числом частиц в нем N_B ; ze - классический радиус электрона.

Электрон по прохождении такого сгустка получает дополнительный импульс

$$\Delta p_z (\text{электр}) = \frac{e E_z \ell}{2c} \quad (4)$$

Учет и магнитной силы, действующей на электрон дает:

$$\Delta p_z = r_e \frac{4\pi mc}{\omega h} N_B z, \quad (5)$$

Изменение импульса влечет за собой изменение частоты вертикальных бетатронных колебаний на

$$\Delta \nu_z = r_e \frac{\beta_z^* N_B}{\gamma \omega h}, \quad (6)$$

где γ — энергия электрона в единицах массы покоя, β_z^* — значение β_z — функции в месте встречи сгустков. Для более реального "сильного" пучка с гауссовым распределением частиц в сгустке (по всем трем направлениям) формула (6) неприменима. Однако, если предположить малость амплитуды бетатронных колебаний, то дополнительный импульс полученный электроном будет опять пропорционален z и можно найти из условия $\omega \gg h$, что

$$\Delta \nu_z = \frac{r_e}{2\pi} \frac{\beta_z^* N_B}{\gamma \sigma_z^* \sigma_x^*}, \quad (7)$$

где σ_z , σ_x , σ_s — среднеквадратичные полуширины распределений по z и x , s . Если распространить вычисления также на пучки пересекающиеся под малым углом, то можно получить, что

$$\Delta \nu_z = \frac{r_e}{2} \frac{\beta_z^* N}{\gamma A_{int}}, \quad (8)$$

где $A_{int} = \pi B (\sigma_z)^*_{эфф} (\sigma_x)^*_{эфф}$, B — число сгустков в каждом пучке, $N = BN_B$ — число частиц в "сильном" пучке, $(\sigma_z)^*_{эфф} = \sigma_z^*$, $(\sigma_x)^*_{эфф} = (\sigma_x^{*2} + \sigma_s^{*2} \delta_H^2)^{1/2}$ для пучков пересекающихся в горизонтальной плоскости под углом $2\delta_H$; $(\sigma_x)^*_{эфф} = \sigma_x^*$, $(\sigma_z)^*_{эфф} = (\sigma_z^{*2} + \sigma_s^{*2} \delta_V^2)^{1/2}$ для пучков пересекающихся в вертикальной плоскости под углом $2\delta_V$.

звездочка означает, что величина берется в месте встречи пучков, которое считается точечным.

Достаточно большой сдвиг частоты может привести к резонансным неустойчивостям. Избежать попадания в полосы резонансов, по крайней мере, низших порядков, можно, если потребовать:

$$\Delta \nu_z \leq \Delta \nu_0, \quad (9)$$

где $\Delta \nu_0$ критический сдвиг частоты определяемый магнитной системой данного накопителя. О порядке величины $\Delta \nu_0$ можно судить по данным, приведенным в таблице I.

Следует отметить, что параметр $\Delta \nu$ имеет смысл среднего для частиц разных амплитуд и поэтому "линейный" сдвиг частоты не может быть устранен никаким линейным изменением ведущего магнитного поля.

Из (8) и (9) находится ограничение на плотность частиц в сгустке "сильного" пучка:

$$\frac{N}{A_{int}} \leq D_c = \frac{2 \Delta \nu_0 E_0}{r_e m c^2 \beta_v}, \quad (10)$$

где $\beta_v = \beta_z^*$, $E_0 = \gamma m c^2$.

Предел плотности частиц (10) основан на анализе сдвига частоты вертикальных колебаний. Аналогично можно получить выражение для сдвига частоты горизонтальных колебаний $\Delta \nu_x$ и соотношение:

$$\frac{\Delta \nu_x}{\Delta \nu_z} = \frac{\beta_x^*}{\beta_z^*} \frac{h}{W}. \quad (11)$$

Обычно в накопителях β_x и β_z одного порядка, а вертикальные размеры пучка гораздо меньше его горизонтальных размеров, т.е. $h \ll W$. Отсюда следует

$$\Delta \nu_z \geq \Delta \nu_x. \quad (12)$$

Если $\Delta v_x > \Delta v_z$, что может быть достигнуто с помощью специального выбора конкретных значений β_x^* , β_z^* , то тогда в дальнейшем в (10) необходимо заменить β_v на $\beta_H = \beta_x^*$

Оптимальная светимость соответствует выполнению условия

$$\frac{N}{A_{int}} = D_c \quad (13)$$

и равна

$$\mathcal{L}' = \frac{f}{4} D_c N_w \quad (14)$$

где N_w число частиц в "слабом" пучке. Понятно, что

$$\mathcal{L}' < \frac{f}{4} D_c N \quad (N < N_w),$$

поэтому построение функции максимальной светимости можно проводить основываясь на формулу

$$\mathcal{L} = \frac{f}{4} \frac{N^2}{A_{int}} \quad (\mathcal{L}' < \mathcal{L}) \quad (15)$$

Кроме предела на плотность частиц, в накопителях существует также предел на максимальное число электронов в пучке, который определяется мощностью высокочастотных генераторов P_0 компенсирующих потери энергии каждого электрона на одном обороте.

N_{max} связано с P_0 по формуле

$$N_{max} = \frac{3(m c^2)^3}{4\pi^2 e c} \frac{P_0 L P_0}{E_0^4} \quad (16)$$

где L длина орбиты, P_0 средний радиус орбиты.

Область высоких энергий данного накопителя называют областью, где интенсивность накопленных пучков ограничена только имеющейся в распоряжении мощностью P_0 и в которой эффективная площадь сечения A_{int} может быть приравнена к значению A_c определяемому из условия (13):

$$A_c = \frac{N_{max}}{D_c} = \frac{3}{8\pi} \frac{(mc^2)^3}{c\Delta\nu_0} \frac{\rho_0 L \rho_0 \beta_v}{E_0^5}. \quad (17)$$

Подставляя (17) в (15) можно получить формулу для максимальной светимости в этой области:

$$\mathcal{L} = \frac{f}{4} D_c N_{max} = C_2 \frac{\rho_0 \rho_0}{\beta_v E_0^3}, \quad (18)$$

где $C_2 = (3/8\pi)(mc^2) \Delta\nu_0 / \tau_e^2$.

Как видно из (17), $A_c \sim E_0^{-5}$, т.е. резко уменьшается с увеличением энергии частиц E_0 , в то время как реальная эффективная площадь поперечного сечения A_{int} с увеличением энергии возрастает, как E_0^α , ($\alpha > 2$). Если

$A_{min}(E_0)$ минимальная эффективная площадь поперечного сечения, зависящая от энергии, то верхняя граница рассматриваемой области соответствует энергии E_L для которой

$$A_{min}(E_L) = A_c(E_L). \quad (19)$$

Область $E_0 > E_L$ называют областью сверхвысоких энергий. Здесь соотношение оптимальной светимости (13) не выполняется и светимость равна

$$\mathcal{L} = \frac{g}{64\pi} \frac{(mc^2)^4}{\tau_e^2 c} \frac{L \rho_0^2 \rho_0^2}{E_0^8 A_{min}(E_0)}. \quad (20)$$

Из (20) видно, что в области сверхвысоких энергий светимость падает очень резко $\mathcal{L} \sim E_0^{-8-\alpha}$ ($\alpha > 2$) и поэтому хорошо спроектированные накопители должны иметь энергию E_L большую самой высокой удовлетворительно управляемой энергии.

Нижняя граница области высоких энергий находится из условия

$$A_{\max}(E_0) = A_c(E_T) \quad (21)$$

где $A_{\max}(E_0)$ — максимальная эффективная площадь поперечного сечения. Область $E_0 < E_T$ называется областью низких энергий. Максимальная светимость в этой области достигается, когда A_{int} поддерживается в максимальном значении при данной энергии, т.е.

$$A_{\text{int}} = A_{\max} \quad (22)$$

число же частиц N_c при этом определяется

$$N_c = D_c A_{\max} < N_{\max} \quad (23)$$

Выражение для максимальной светимости здесь:

$$\mathcal{L} = \frac{f}{4} D_c^2 A_{\max} \quad (24)$$

Как видно, зависимость \mathcal{L} от энергии определяется только функцией A_{\max} .

В модели накопителя с горизонтальным пересечением пучков

$$A_{\text{int}} = A_{\max} = \frac{\pi}{4} B \ell \delta n h^* \quad (25)$$

Для увеличения A_{\max} на первый взгляд кажется, что следует выбрать число сгустков B как можно большим, но оказывается, что при этом длина каждого сгустка уменьшается таким образом, что

$$(B \ell)_{\max} = L / 3\pi \quad (26)$$

Обычно геометрия накопителей ограничивает δn значением 0.1, т.е. A_{\max} определяется только высотой пучка h^* . Если не принимать специальных мер по увеличению вертикальных размеров пучка, то

$$h_{\max}^{*2} = \frac{55}{16\sqrt{3}} \frac{\hbar c}{(mc^2)^3} \frac{\lambda_n \beta_v E_0^2}{\nu_n^3} \quad (27)$$

откуда

$$\mathcal{L} = C_1 \frac{\lambda_n^{1/2} \delta_H E_0^3}{(\nu_n \beta_v)^{3/2}}, \quad (28)$$

где

$$C_1 = \frac{e \Delta \nu_0^2}{48 \tau_e^2 (mc^2)^3} \left(\frac{55}{\sqrt{3}} \frac{\hbar c}{mc^2} \right)^{1/2}$$

R_n радиус кривизны магнитных блоков, β_n среднее значение β -функции в магнитных блоках, $\lambda_n = R_n / \rho_0$, $\nu_n = R_n / \beta_n$.
Поведение максимальной светимости во всех трех областях энергий (низких, высоких и сверхвысоких) приводится на рис.1.

В современных проектах накопительных колец принимаются специальные меры для контроля размеров пучка. Так в проекте накопителя PEP [3] существуют несколько методов контроля размеров пучка. Один из методов увеличения поперечных размеров пучка в области низких энергий заключается в дополнительном возбуждении бетатронных колебаний излучением с помощью специальной системы "винглер-магнитов". Физический эффект винглер-магнитов определяется принудительным увеличением средней энергии фотонов синхротронного излучения. Поскольку испускание фотона процесс случайный, то оно обуславливает горизонтальное расширение пучка. Вертикальные размеры пучка могут быть увеличены использованием связей между горизонтальным и вертикальным движением. Несомненное преимущество системы винглер-магнитов в том, что нарушения динамики пучка может быть сделано незначительным. Максимальная светимость в проекте накопителя PEP приведена на рис.2.

Более общий, чем $\Delta \nu$ параметр ξ предложен Амманом в работах [8,9]. Этот параметр пропорционален плотности пучка в центре и в большинстве случаев хорошей аппроксимацией для него служит линейный сдвиг бетатронной частоты $\Delta \nu$. Связь между $\Delta \nu$ и ξ следующая:

$$\xi_{x,z} = \frac{\sin(2\pi \Delta \nu_{x,z})}{2\pi} \left\{ 1 + \operatorname{tg}(\pi \Delta \nu_{x,z}) \operatorname{ctg}(\mu_{x,z}) \right\}, \quad (29)$$

где $\mu_{x,z}$ набег фазы между последовательными встречами пучков.

Параметр ξ за одно пересечение увеличивается на:

$$\xi_{x,z} = \frac{z_e N}{2\pi \epsilon_x \epsilon_z \gamma} \left(\frac{\beta}{H} \right)_{x,z}, \quad (30)$$

где H форм-фактор пучка равный $H_{x,z} = 1 + \frac{\epsilon_{x,z}}{\epsilon_{z,x}}$.

Максимальная светимость определенная через ξ есть

$$\mathcal{L}_{\max} = \frac{\pi \beta f}{z_e^2} \xi_{\max}^2 \gamma^2 \epsilon_x \epsilon_z \left(\frac{H}{\beta} \right)_{x,z}^2. \quad (31)$$

Параметр ξ экспериментально может быть найден измерением светимости \mathcal{L} и тока "слабого пучка" I_w (если при этом также известны невозмущенная β -функция в месте встречи пучков и отклонение размеров поперечного сечения пучка):

$$\xi_{x,z} = \frac{\mathcal{L}}{I_w} \frac{2z_e^2}{\gamma c} I_0 \left(\frac{\beta}{H} \right)_{x,z}, \quad (32)$$

где $I_0 = ec/z_e$.

До сих пор предполагалось, что область взаимодействия настолько коротка, что значение β -функции в ней постоянно.

В работе [10] (Кайл, Пеллегрини, Сесслер) (см. также [11]) рассмотрен более общий случай пересечения двух, азимутально-однородных, цилиндрически-симметричных пучков с гауссовым распределением частиц в поперечном сечении с среднеквадратичной полушириной σ . Сдвиг частоты рассчитан опять в линейном приближении, но с учетом изменения β -функции вдоль области взаимодействия. В обычной картине "сильного" и "слабого" пучков, в пренебрежении изменением равновесной орбиты из-за пучок-пучкового взаимодействия, и в предположении, что "сильный" пучок не разделен на сгустки, а электромагнитное поле "сильного" пучка действует на частицы "слабого" только на протяжении области взаимодействия между $-\frac{1}{2} \ell$ и $+\frac{1}{2} \ell$, получено, что

$$\begin{aligned} \Delta \nu_x &= \frac{\lambda z_e (1 + \beta^2) \ell \beta_0}{4\pi \gamma \beta^2 \sigma_0^2} I_x \left(\frac{\ell}{2\beta_0}, \frac{\beta_0 \alpha}{\sigma_0} \right) \\ \Delta \nu_z &= \frac{\lambda z_e (1 + \beta^2) \ell \beta_0}{4\pi \gamma \beta^2 \sigma_0^2} I_z \left(\frac{\ell}{2\beta_0}, \frac{\beta_0 \alpha}{\sigma_0} \right), \end{aligned} \quad (33)$$

где λ число частиц на единицу длины орбиты,

β - функция вдоль области взаимодействия аппроксимирована выражением

$$\beta(s) = \beta_0 + \beta_0^{-1} s^2, \quad (34)$$

а

$$\sigma_0 = \sigma [\beta(s)/\beta_0]^{-1/2}$$

$$I_x(\xi, \eta) = \frac{1}{\xi \eta^2} \int_{-\xi}^{\xi} \frac{x^2 + 1}{x^2} \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{1}{2} \eta^2 x^2 / (1 + x^2)\right] \right\} dx$$

$$I_z(\xi, \eta) = \frac{1}{\xi \eta^2} \int_{-\xi}^{\xi} \frac{x^2 + 1}{x^2} \left\{ \left[1 + \frac{\eta^2 x^2}{1 + x^2} \right] \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{\eta^2 x^2}{1 + x^2} - 1\right] \right\} dx,$$

При $\xi \gg 1$, ξ и η имеют простой физический смысл; ξ пред-

ставляет собой отношение ширины пучков на краях и в центре области взаимодействия, η - расстояние между центрами пучков на краю области взаимодействия. Когда разделение мало, т.е. происходит лобовое столкновение пучков, то $\eta \ll 1$ и при $\beta \approx 1$

$$\Delta v_x = \Delta v_z = \frac{\lambda z_e \beta_0 \ell}{2\pi \gamma \beta_0^2} \quad (35)$$

Накопителям с хорошо разделенными пучками соответствует значение $\eta \gg 1$. В случае $\xi \gg \eta \gg 1$, $\beta \approx 1$

$$\Delta v_x = \left(\frac{z}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\lambda z_e \beta_0}{\gamma \alpha \beta_0} \quad (36)$$

когда же $\eta \gg \xi \gg 1$, $\beta \approx 1$

$$\Delta v_x = \frac{\lambda z_e \ell}{\pi \gamma \beta_0 \alpha^2} \quad (37)$$

Формула (36) отвечает случаю короткой области взаимодействия, а (37) и представляет случай протяженной области взаимодействия.

1.2. Линейный сдвиг частоты в системе с компенсированным зарядом

Линейный сдвиг частоты большей частью обусловлен тем, что встречаются два пучка каждый из которых несет определенный электрический заряд. Если же встречаются в целом нейтральные системы, то электромагнитное взаимодействие, приводящее к линейному сдвигу частоты, будет в значительной степени ослаблено. Поскольку малость линейного сдвига частоты является основным критерием устойчивости частиц в накопителях, то, понятно, что его уменьшение очень желательно. Ситуацию встречи нейтральных в целом систем можно осуществить, если произвести, например,

столкновение одновременно не двух, а четырех пучков, так чтобы поток частиц в каждом из двух направлений был бы нейтральным. Такой проект предложен и осуществлен на французском законителе DCI [12, 13]. Не вдаваясь в подробности этого проекта, заметим лишь, что основным его достоинством авторы считают именно тот факт, что некогерентный пучок - пучковый эффект ограничения плотности уменьшается во много раз. В случае, когда пучки движущиеся в одном направлении разделены, "компенсированный" линейный сдвиг частоты определяется формулами

$$\Delta\nu_x = \Delta\nu_{x0} \frac{1}{1+\lambda} \left[\frac{2+\lambda}{2} \frac{\delta_x^2}{\epsilon_x^2} + \frac{1}{2\lambda} \frac{\delta_z^2}{\epsilon_x^2} \right], \quad (38)$$

$$\Delta\nu_z = \Delta\nu_{z0} \frac{1}{1+\lambda} \left[\frac{1}{2} \frac{\delta_x^2}{\epsilon_x^2} + \frac{1+2\lambda}{2\lambda^2} \frac{\delta_z^2}{\epsilon_x} \right],$$

где $\Delta\nu_{x0}$ и $\Delta\nu_{z0}$ обычные линейные сдвиги частоты пучка который сталкивается с одним пучком, ϵ_x, ϵ_z поперечные размеры пучков, $\delta_{x,z}$ расстояние между пучками движущимися в одном направлении, $\lambda = \epsilon_z / \epsilon_x$.

Для круглого пучка $\lambda = 1$

$$\Delta\nu_x = \Delta\nu_{x0} \left(\frac{3\delta_x^2 + \delta_z^2}{4\epsilon^2} \right), \quad (39)$$

$$\Delta\nu_z = \Delta\nu_{z0} \left(\frac{\delta_x^2 + 3\delta_z^2}{4\epsilon^2} \right).$$

При $\delta_z \sim \delta_x \sim \delta$ линейный сдвиг частоты уменьшается в ϵ^2/δ^2 раз. Практически достижимыми кажутся значения ϵ^2/δ^2 в области между 10 и 20.

Подавление линейного сдвига частоты приводит к тому, что пучок становится устойчивым относительно некогерентных колебаний, т.е. разбухания луча. В обычных двухпучковых на-

копителях существенен именно этот процесс, поэтому вопрос о колебаниях пучков в целом в связи с ограниченной светимости не рассматривался, хотя подобные когерентные колебания пучков были известны и относительно хорошо изучены (см., например, [14]). В работе [15] Дербеневым было замечено, что в проементе накопителя с компенсированными пучками, где некогерентные колебания подавлены, следует обратить особое внимание на возможные коллективные возбуждения пучков.

Ясно, что обычный подход изучения движения одной частицы в поле другого пучка здесь неприменим, т.к. необходимо выяснить поведение сразу всех, почти одинаковых, пучков различающихся только знаками электрического заряда. Исследование проблемы коллективных колебаний частиц в четырехпучковом накопителе типа DCI в работе [15] проделано традиционными методами анализа коллективных колебаний (т.н. плазменный подход [16]).

Для удобства произведен переход к каноническим действиям I

и фазам Φ

$$\dot{I}_{x,z} = p v_{x,z} a_{x,z}^2 / 2R$$

$$\dot{\Phi}_{x,z} = \omega_0 v_{x,z} \quad (40)$$

где p импульс частицы, $2\pi R$ периметр орбиты, $a_{x,z}$ амплитуды колебаний. ω_0 - частота обращения пучков. Пусть $F(I)$ плотность стационарного распределения частиц в фазовом пространстве, описывающая невозбужденные состояния пучков. В возбужденном состоянии

$$F = F(I) + \tilde{F}(I, \Phi), \quad (41)$$

и гамильтонова система

$$H = H(I) - \tilde{\mathcal{L}}(I, \Phi), \quad (42)$$

где $\tilde{\mathcal{L}}$ лагранжиан взаимодействия частицы с полями возбуждаемыми коллективными колебаниями частиц. Малые отклонения от стационарного состояния удовлетворяют уравнению следующему из уравнения Власова [17]

$$\omega_0 \nu_\alpha \frac{\partial \tilde{F}(I, \Phi)}{\partial \Phi_\alpha} = - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}(I, \Phi)}{\partial \Phi_\alpha} \frac{\partial F(I)}{\partial I_\alpha} \quad (43)$$

(по повторяющемуся индексу $\alpha = x, z$ производится суммирование). Коэффициенты в уравнении (43) периодичны по Φ , так что общее решение может быть разложено по собственным функциям обладающим свойством

$$\tilde{F}(I, \Phi) = \lambda \tilde{F}(I, \Phi - 2\pi\nu). \quad (44)$$

Неустойчивые собственные решения соответствуют

$$|\lambda| > 1. \quad (45)$$

Рассматривался максимально простой вариант четырехлучкового накопителя для которого:

1. бетатронные частоты частиц всех пучков одинаковы, а фокусировка однородна,
2. замкнутые орбиты всех частиц в месте встречи совпадают,
3. стационарные распределения всех пучков тождественны и гауссовы.

Удобно представить функцию $\tilde{F}(I, \Phi)$ столбцом из четырех функций распределения отдельных пучков $f_1(I, \Phi)$, $f_2(I, \Phi)$, $f_3(I, \Phi)$, $f_4(I, \Phi)$. Схема обозначений приведена на рис.3. Используя уравнение (43) и явный вид лагранжиана взаимодействия можно получить изменение F после одной встречи

$$\tilde{F} \rightarrow \tilde{F} + \delta\tilde{F} = \tilde{F} - 2 \frac{e^2}{c} \frac{\partial F}{\partial I_\alpha} \frac{\partial}{\partial \Phi_\alpha} \int d\Gamma_1 \wedge \tilde{F}(I', \Phi') l_n |\tilde{z}_1 - \tilde{z}'_1|, \quad (46)$$

где Λ матрица

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$d\Gamma_1$ элемент объема в фазовом пространстве $(\tilde{p}_1, \tilde{z}_1)$.
Собственные решения таким образом должны удовлетворять уравнению

$$\lambda \tilde{F}(I, \Phi + 2\pi\nu) - \tilde{F}(I, \Phi) = -2 \frac{e^2}{c} \frac{\partial \tilde{F}(I, \Phi)}{\partial I_\alpha} \frac{\partial}{\partial \Phi_\alpha} \int d\Gamma_1 \wedge \tilde{F}(I', \Phi') l_n |\tilde{z}_1 - \tilde{z}'_1| \quad (47)$$

Анализ уравнения (47) для круглых пучков с поперечными размерами $\alpha^2/2$ показывает, что в зависимости от параметров

$$\delta_{x,z} = \frac{N z_e R}{2\pi \alpha^2 \gamma \nu_{x,z}}, \quad (48)$$

численно равных вычисленным по теории возмущений сдвигам частот вносимым одиночным некомпенсированным пучком, возможны следующие значения λ (не теряя общности положено $\delta_z \geq \delta_x$)
1. $\delta_z \gg 1$; среди решений уравнения (47) заведомо имеются неустойчивые с $|\lambda| \gg 1$.
2. $\delta_z \ll 1$; если система находится вблизи резонанса, т.э.

$$m_x \nu_x + m_z \nu_z - n = \varepsilon \quad (49)$$

при некоторых целых m_x, m_z, n , то при достаточно малых ε появляется неустойчивость с инкрементом нарастания

пропорциональным $|\epsilon|^{-1/2}$. Когда же частоты далеки от резонансов, взаимодействие коллективных возбуждений приводит лишь к поправкам частот. Оценены предельные значения ϵ вплоть до которых система неустойчива, т.е. ширины резонансов. Отмечено, что ширины резонансов, а также их инкременты медленно (не по экспоненте) убывают с ростом порядка возбуждений.

Таким образом, практически устойчивое состояние компенсированных пучков может быть реализовано лишь в области $\delta_z \ll 1$, где от резонансов низких порядков следует уходить, подбирая соответствующим образом рабочие частоты, а резонансы высоких порядков будут подавляться разбросом частоты и радиационным трением (для электрон-позитронных накопителей).

Из (48) видно, что условие $\delta_z \ll 1$ эквивалентно условию (9) с критическим сдвигом частоты много меньшим единицы. Понятно, что при этом рассчитывать на значительное повышение светимости нельзя. В литературе, как нам известно, отсутствует дальнейшее теоретическое обсуждение и анализ вопроса устойчивости в целом нейтральных четырех пучков. В докладе Марана в июле 1977 г. на Международной конференции по ускорителям в Серпухове [18] приведены результаты предварительных косвенных экспериментов в четырехпучковом варианте DCI. Окончательный ответ на вопрос о достоинствах четырехпучкового накопителя, по-видимому, будет получен после ввода в действие и второго кольца накопителя DCI [18,19]. При этом в связи с трудностью одновременного управления четырьмя высокоэнергетическими пучками, оптимальной областью энергий накопителя с компенсированными пучками скорее всего будет область средних энергий [20].

II. ИЗОЛИРОВАННЫЙ РЕЗОНАНС

Дальнейший анализ эффектов взаимодействия встречных пучков требует непосредственного учета нелинейности поперечной части электромагнитного поля встречного пучка.

Уравнение бетатронных колебаний для одной степени свободы в общем случае имеет вид:

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + K(\theta)z = f(z, \theta), \quad (50)$$

где $K(\theta)$ пропорциональна градиенту ведущего поля, f — вертикальная компонента поперечной части электромагнитного взаимодействия встречных пучков, которая в общем случае нелинейно зависит от z .

Это взаимодействие существенно усложняет характер движения при заметных нелинейностях. В частности, учет нелинейности взаимодействия пучок-пучок приводит к возникновению новых нелинейных резонансов. Эти резонансы могут отстоять по частоте достаточно далеко друг от друга и в этом случае естественно рассматривать движение вблизи одного такого изолированного резонанса, пренебрегая влиянием других.

В работах Дербенева, Мишнева, Скринского [21,22] влияние изолированного резонанса изучено в первом приближении метода усреднения Боголюбова-Митропольского [23]. Для простоты рассматривается случай азимутально-симметричного, электрон-электронного накопителя с мягкой фокусировкой и функция f принимается периодичной по оборотам, что соответствует разделению пучков на "сильный" и "слабый" и изучению движения электронов "слабого" пучка в поле "сильного". Вид функции f не конкретизируется.

Сделав замену

$$z = a \sin \psi = a \sin(\nu \theta + \psi),$$

$$\frac{dz}{d\theta} = a \nu \cos(\nu \theta + \psi), \quad (51)$$

и считая как обычно a, ψ медленно меняющимися функциями θ можно прийти к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d(a^2)}{d\theta} &= \frac{R}{\sqrt{E_0}} f(z, \theta) a \cos \psi \equiv W(a^2, \psi, \theta) \\ \frac{d\psi}{d\theta} &= -\frac{R^2}{\sqrt{E_0}} \frac{1}{a} f(z, \theta) a \sin \psi, \end{aligned} \quad (52)$$

где E_0 — энергия электронов, R — радиус равновесной орбиты. Усреднение производится вблизи определенного изолированного резонанса, который соответствует условию:

$$\nu = \frac{p}{q}. \quad (53)$$

После усреднения уравнения движения принимают вид:

$$\frac{d(a^2)}{d\theta} = -\frac{\partial H}{\partial \Phi} = B \sin q \Phi \quad (54)$$

$$\frac{d\Phi}{d\theta} - \frac{\partial H}{\partial(a^2)} = \left(\nu - \frac{p}{q}\right) + \Delta \nu_0(a^2) + \frac{1}{q} \frac{dB}{d(a^2)} \cos q \Phi,$$

где

$$H = \left(\nu - \frac{p}{q}\right) a^2 + \int_0^{a^2} \Delta \nu_0(a^2) d(a^2) + \frac{1}{q} B(a^2) \cos q \Phi$$

— гамильтониан системы, $\Delta \nu_0(a^2)$ — сдвиг частоты зависящий от амплитуды,

$$B(a^2) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{2\pi} d\theta W(a^2, \psi, \theta) \sin(q\psi - p\theta),$$

$$\Phi = \psi - \frac{p}{q} \theta \quad \text{медленная фаза.}$$

Фазовая плоскость (a^2, Φ) разбивается на три области.

В резонансной области периодически проходит точка $\frac{\partial H}{\partial(a^2)} = \frac{d\Phi}{d\theta} = 0$ и средняя частота равна резонансному значению p/q .

Условие $\frac{\partial H}{\partial(a^2)} = 0$ соответствует появлению новых равно-

весных орбит (количество их - q) устойчивость которых обеспечивается механизмом автофазировки.

С учетом радиационного трения уравнения (54) принимают вид:

$$\frac{d(a^2)}{d\theta} = -\frac{\partial H}{\partial \Phi} - 2\lambda a^2, \quad (55)$$

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = \frac{\partial H}{\partial(a^2)},$$

где λ - декремент затухания в $(\text{рад})^{-1}$.

Равновесные орбиты в случае учета радиационного трения определяются выполнением соотношений:

$$\begin{aligned} B(a^2) \sin q \Phi - 2\lambda a^2 &= 0, \\ v - \frac{p}{q} + \Delta v_0(a^2) &= 0. \end{aligned} \quad (56)$$

Видно, что при $2\lambda a^2 > |B(a^2)|$ уравнение (56) не имеет действительных корней, так что условие

$$2\lambda a^2 = |B(a^2)| \quad (57)$$

определяет границу области параметров $(N_B, v - \frac{p}{q}, \lambda)$ за которой данный резонанс перестает работать (N_B - число частиц в ступке "сильного" пучка). Из (57) прежде всего можно получить ограничение на порядок резонансов существенных ("работающих") при заданных N_B и λ . Отмечено, что рассмотрение изолированного резонанса справедливо до тех пор, пока области автофазировок "работающих" резонансов не перекрываются по амплитуде, что приводит к ограничению:

$$\left(\frac{1}{q} \frac{dv}{d(a^2)} \frac{B}{(\delta v)^2} \right)^{1/2} \ll 1, \quad (58)$$

где δv расстояние до ближайшего резонанса.

Вследствие рассеяния на остаточном газе и квантовых флуктуаций частицы могут попадать в область устойчивости паразитных орбит и затухать к ним. Со временем устанавливается динамическое равновесие между числом частиц на основной и пара -

зитной орбитах. Отношение чисел частиц на основной и паразитных орбитах получено с помощью кинетического уравнения Фоккера-Планка.

Таким образом, учет нелинейного изолированного резонанса проведенный в [21,22] приводит к появлению новых областей устойчивости пучка и его расширению за счет этого, что естественно приводит к уменьшению светимости.

Влияние изолированного резонанса может быть причиной частотной зависимости линейного сдвига частоты. Вытекающее из качественного рассмотрения проведенного в § I.1 первоначальное представление о едином для всех частот линейном сдвиге частоты, основанное на линеаризации взаимодействия, было опровергнуто на накопителе SPEAR [24]. Эксперименты показали, что максимальное значение линейного сдвига частоты $\Delta \nu$ зависит от начального значения бетатронной частоты. Основываясь на этом факте Вайдemann [24] предложил простое объяснение предела светимости действием одного резонанса, конкретно, четвертого порядка, поскольку, если амплитуда колебаний частиц "слабого" пучка мала, то поле "сильного" пучка с большой точностью можно представить суперпозицией полей квадруполя и октуполя. Эта идея была рассмотрена в работе Ружиро [25], где проведен анализ поведения "слабого" пучка в таких условиях. Рассматривалась модель накопителя с двумя местами встречи отличающихся друг от друга на численный параметр η ($0 \leq \eta \leq 1$). Если начальная частота бетатронных колебаний есть ν , то квадрупольная компонента приводит к линейному сдвигу частоты на обороте на

$$\Delta \nu = K_1 (2 - \eta), \quad (59)$$

где N число частиц "сильного" пучка, K_1 зависит от параметров накопителя и "сильного" пучка. Резонанс четвертого порядка, обусловленный октупольной компонентой поля, приводит к тому, что фазовая плоскость поперечного движения разбивается на участки устойчивого и неустойчивого движения. Одна из областей устойчивости охватывает равновесную орбиту и соответствует амплитудам меньшим, чем

$$I = \left(K_2 \frac{\epsilon_0 + \Delta v}{N(3-\eta)} \beta \right)^{1/2}, \quad (60)$$

где ϵ_0 отличие v от резонансного значения 5,25, K_2 параметр аналогичный K_1 . Движение устойчиво, если эмиттанс пучка удовлетворяет условию

$$E < K_2 \frac{\epsilon_0 + \Delta v}{N(3-\eta)}. \quad (61)$$

Из (59), (60), (61) следует

$$\Delta v < \frac{Q |\epsilon_0|}{Q-1}, \quad Q = \frac{K_1 K_2}{E} \frac{2-\eta}{3-\eta}. \quad (62)$$

Анализ уравнений движения при наличии квадрупольной и октупольной компонент приводит для Q к значениям

$$Q \sim \begin{cases} 4.0 & \text{для горизонтального движения} \\ 8.0 & \text{для вертикального движения} \end{cases} \quad (63)$$

(слабо зависит от η).

Если

$$\left(v - \frac{m}{4} \right) + \Delta v \geq 0, \quad m = 21 \quad (64)$$

что соответствует тому, что движение действительно описывается резонансом четвертого порядка (такой резонанс асимметричен), то ограничение на Δv принимает вид:

$$\Delta v \leq |\varepsilon_0|, \quad (65)$$

что находится в согласии с экспериментом на SPEAR [24].
 Общий случай поперечного движения частиц в накопителе с жесткой фокусировкой вблизи изолированного двумерного резонанса рассмотрен в работах Кайла [26,27]. В этих работах возмущающая сила задается единым потенциалом V . Уравнение движения записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{ds^2} + K_x(s)x &= -\frac{e}{m v^2 \gamma} \frac{\partial V}{\partial x}, \\ \frac{d^2 z}{ds^2} + K_z(s)z &= -\frac{e}{m v^2 \gamma} \frac{\partial V}{\partial z}, \end{aligned} \quad (66)$$

где $ds = v dt$, γ отношение энергии частицы к ее энергии покоя. Резонанс соответствует условию:

$$p v_x + q v_z + r = 0. \quad (67)$$

Для медленной фазы $\chi_{pqz} = p\phi + q\psi + r\theta$, где ϕ и ψ бетатронные фазы, принимающие значения $2\pi v_x$ и $2\pi v_z$ соответственно на каждом обороте, после усреднения вблизи резонанса (67) находится уравнение

$$\frac{d^2 \chi_{pqz}}{d\theta^2} = 2B \sin \chi_{pqz}. \quad (68)$$

Из (68) определяется частотная ширина резонанса, равная

$$\delta v_x = \frac{8\sqrt{2}}{\pi|p|} |B|^{1/2} \left(\delta v_z = \frac{8\sqrt{2}}{\pi|q|} |B|^{1/2} \right), \quad (69)$$

где B — сложная функция, зависящая от фурье-компонент потенциала V и от их первых производных.

В работе [26] рассмотрен случай, когда V описывает лобовое столкновение частицы "слабого" пучка с "сильным" пучком.

не разделенным на сгустки. Плотность "сильного" пучка при этом задается в виде:

$$\rho_{x,z} = \rho_0 \exp(-x^2/a^2 - z^2/b^2), \quad (70)$$

где $\rho_0 = Ne/(2\pi R \pi a b)$, $a/\sqrt{2}$ и $b/\sqrt{2}$ горизонтальные и вертикальные размеры пучка.

Отмечено, что из резонансов (67) работающими оказываются только резонансы четных порядков, причем когда и p и q четные.

В работе [27] подробно изучен случай, когда V описывает потенциал "сильного" пучка смещенного на расстояние h по вертикали по отношению к "слабому" пучку. Плотность "сильного" пучка аналогична (70)

$$\rho = \rho_0 \exp(-x^2/a^2 - (z-h)^2/b^2). \quad (71)$$

Выбрав определенные параметры накопителя можно прийти к удобной для экспериментального исследования зависимости ширины резонансов от отношений h/b и a/b .

Во всех работах, рассмотренных выше применялась обычная методика анализа эффектов изолированного резонанса, заключающаяся в том, что возмущающая сила в правой части уравнений (50), (66), периодичная по азимуту θ , S раскладывалась в ряд Фурье по θ , S и из этого разложения выбиралась одна резонансная гармоника, а именно, та, которая соответствует резонансу наименьшего порядка, т.е. наиболее опасному. Заметим, что хотя все остальные, кратные основному, резонансы слабы, но таких резонансов бесконечно много. Однако, усреднение, при котором учитывались бы все кратные резонансы (см. напр. [28]) в общем случае наталкивается на большие вычислительные трудности. Ружиро и Смит [29], удалось провести подобный анализ для резонанса четвертого порядка. В рассматриваемом ими случае

частота бетатронных колебаний близка к целому плюс четверть и авторы, вместе с резонансом четвертого порядка, учитывают все кратные резонансы - целое плюс 2/8, целое плюс 3/12 и т.д. Уравнение движения частицы "слабого" пучка, когда плотность распределения частиц "сильного" пучка гауссова с поперечным горизонтальным размером ϕ ; следующее:

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + k(\theta)x = -\frac{8\pi \xi \phi^2}{\beta} \delta_{int}(\theta) \frac{1 - e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\phi^2}}}{x}, \quad (72)$$

где ξ линейный сдвиг частоты в обозначениях Аммана [8,9]:

$$\delta_{int}(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - \theta_i - 2\pi k), \quad \text{где } \theta_i \text{ координата места}$$

встречи.

После замены переменных

$$x = \sqrt{I\beta} \cos \psi \quad (73)$$

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sqrt{I} \sin \psi$$

уравнение (72) сводится к следующему:

$$\frac{dI}{d\theta} = -\frac{4}{\pi} \frac{\xi \phi^2}{\beta} \sum_{m,n} n i^n e^{i(n\psi - m\theta)} \int \frac{d\omega}{\omega} \hat{F}(\omega) J_n(\omega \sqrt{I\beta}), \quad (74)$$

$$\frac{d\psi}{d\theta} = \nu + \frac{2i}{\pi} \frac{\xi \phi^2}{\beta I} \sum_{m,n} i^n e^{i(n\psi - m\theta)} \int d\omega \hat{F}'(\omega) J_n(\omega \sqrt{I\beta}),$$

где использовано разложение возмущающей силы в интеграл Фурье

$$\frac{1 - \exp(-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\phi^2})}{x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(\omega) e^{i\omega \sqrt{I\beta} \cos \psi} d\omega \quad (75)$$

разложение $\delta_{int}(\theta)$ в ряд Фурье

$$\delta_{int}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta} \quad (76)$$

и J_n - функции Бесселя.

Уравнения (74) являются точными следствиями уравнения (72).

Пусть теперь некоторая комбинация $\chi = q\psi - p\theta$, где p и q целые, меняется медленно; тогда в двойной сумме в уравнениях (74) кроме члена $\exp(i\chi)$ следует оставить также все члены типа: $\exp(i\ell\chi)$, ℓ - целое. Для переменных (I, χ) оказывается возможным написать гамильтониан.

В случае $q=2$ на плоскости (χ, p)

$$\chi = 2\sqrt{I} \cos \chi/2 \quad (77)$$

$$p = -2\sqrt{I} \sin \chi/2$$

неподвижная точка в начале координат неустойчива, а из четырех других неподвижных точек две устойчивы.

В случае $q > 2$ неподвижная точка в начале координат устойчива, а из остальных неподвижных точек $q-1$ устойчивы. Они и соответствуют паразитным орбитам работ [21, 22]. Условие существования неподвижных точек есть

$$-1 < \frac{\nu - p/q}{\xi} < 0. \quad (78)$$

При увеличении параметра $|q\nu - p|$ от нуля до значения $|\xi|$ островки устойчивости вокруг неподвижных устойчивых точек отличных от начала координат (аналогично областям автофазировок паразитных орбит в работах [21, 22]) движутся из бесконечности, сливаясь в начале координат.

Приведено также сравнение полученных результатов с результатами работы [25]. Приняв $\eta = 1$ (одно место встречи на обо-

роте) можно заметить, что условие существования островков устойчивости в работе [25] записывается в виде:

$$-1 < \frac{\nu - P/q}{\xi} < \infty. \quad (79)$$

Различие с (78) объяснено тем, что кубическая аппроксимация примененная в [25] перестает работать при больших амплитудах.

Определена также частотная ширина резонансов при заданной амплитуде, как протяженность области частот, при которых данное значение амплитуды соответствует устойчивому движению. Приведено отношение Δ подобной ширины для резонансов подсчитанных путем учета всех кратных гармоник и обычным путем. Отношение при этом оказывается > 1 и существенно большим для больших значений целого числа q и амплитуд колебаний частиц "слабого" пучка.

В накопителях со встречными пучками возможно возникновение также синхротронных резонансов (см. напр. [30]). Главный эффект при этом заключается в модуляции сдвига частоты [31,32], вносимой встречным сгустком. Частота модуляции имеет значение порядка частоты синхротронных колебаний. Подобные синхротронные резонансы наблюдались в e^-e^+ накопителе DORIS, при этом связь между продольным и поперечным движением была обусловлена пересечением встречных пучков под углом [33]. Несомненный интерес представляет также изучение поведения системы с учетом ограниченного количества резонансов. Это соответствует случаю, когда некоторое (не слишком большое) число резонансов перекрывается по частоте, таким образом, что условие правомерности изучения системы вблизи одного изолированного резонанса типа (58) не выполнено.

Примером подобного анализа для бетатронных колебаний вблизи двух нелинейных резонансов могут служить работы [34].

В связи с тем, что радиационное затухание в электрон-позитронных накопителях выделяет в электромагнитном взаимодействии встречных пучков ограниченное количество существенных ("работающих") резонансов [21,22], то тем больший интерес представляет проведение такого анализа для взаимодействия пучок-пучок.

М. СТОХАСТИЧНОСТЬ

М.1. Сильная стохастичность

Существование случайных колебаний в сложных системах, не являющихся результатом случайных возмущающих сил, а генерируемых в самой динамической системе, как, например, турбулентные колебания, приводит к особому типу движения - стохастичности.

Детальное описание возможных общих механизмов самогенерирования стохастичности можно найти, например, в недавно вышедшей книге Бутенкина, Неймарка, Фуфаева [35].

Простейшей возможностью возникновения стохастичности является уменьшение синхронизма в колебаниях отдельных степеней свободы в системе с большим количеством степеней свободы. Такой процесс, строго говоря, не есть случайный, а либо квазипериодический, либо процесс с очень большим периодом. При длительном наблюдении "случайность" такого процесса может быть разоблачена путем обнаружения его квазипериодичности однако этому мешает накопление малых флуктуаций, неизбежных в любой реальной системе.

Другой тип стохастичности, возможный и для систем с небольшим количеством степеней свободы, связан с взаимодействием резонансов. Широкие нелинейных резонансов определяются величиной возмущения и при достаточно большом возмущении соседних

в фазовом пространстве резонансы перекрываются. Понятно, что в нелинейной системе перекрытие резонансов не сводится к тривиальной их суперпозиции. Подобное взаимодействие нелинейных резонансов приводит в первую очередь к тому, что в окрестности сепаратрис каждого из них появляется, так называемый, стохастический слой. Такое название оправдывается фактом существования в стохастическом слое случайных фазовых траекторий. Увеличение возмущения приводит к тому, что стохастические слои расширяются до размеров областей устойчивости своих резонансов, образуя в фазовом пространстве сплошную стохастическую область. При этом возникает сильная стохастическая неустойчивость, которая является наиболее опасной неустойчивостью нелинейных колебаний. Проблеме стохастичности посвящены монография Чирикова [28] и обстоятельный обзор Заславского и Чирикова [36], где на примере простых моделей получены практически важные критерии и характеристики неустойчивости и детально прослежен переход от динамического к статистическому описанию движения механической системы.

Взаимодействие резонансов зависит от отношения ширины резонанса $\Delta \nu$ к расстоянию до ближайшего соседнего резонанса $\Delta = \nu_{i+1} - \nu_i$. Величину $S = \Delta \nu / \Delta$ называют константой связи резонансов.

Приближение изолированного резонанса соответствует условию $S \ll 1$. При $S \gg 1$ картина движения существенно меняется. Изолированный резонанс отвечает движению системы в некоторой потенциальной яме. При наличии нескольких резонансов имеются несколько потенциальных ям, которые при $S \gtrsim 1$ перекрываются, давая возможность системе переходить из одной ямы в

другую. Очевидно, что это означает неустойчивость. Основное утверждение работы [36] состоит в том, что при константе связи $S \geq 1$ возникает стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний, т.е. движение системы становится сильно нерегулярным похожим на случайное. Поэтому константу связи S также называют параметром стохастичности. Условие

$$S \sim 1 \quad (80)$$

определяет границу стохастичности.

На примере простой модели показано, что уже при значении параметра стохастичности $S \approx 2$ развивается сильная неустойчивость, определяемая двумя процессами.

Первый из них - локальная неустойчивость, означающая экспоненциальное разбегание близких фазовых траекторий.

Второй процесс, перемеживание - распределение траекторий вышедших из небольшой области фаз $\Delta\theta$ по всему интервалу фаз $\geq \pi$ уже после первого шага (рассматриваемая элементарная модель характеризуется дискретным временем и может быть представлена последовательностью канонических преобразований). Свойство разбегания близких траекторий удобно связать с так называемой энтропией Крылова-Колмогорова или K -энтропией, которую можно определить как предел

$$h = \lim_{e \rightarrow 0} \ln \frac{\bar{e}}{e} \quad (81)$$

где черта означает усреднение по времени, т.е. вдоль траектории движения, а e и \bar{e} расстояния между двумя траекториями до и после одного преобразования.

Показано, что локальная неустойчивость движения в сочетании с ограниченностью фазового пространства приводит к перемеживанию траекторий, так что K -энтропия является наиболее су-

мественной статистической характеристикой динамической системы.

Численные эксперименты для основной элементарной модели показали существование K -энтропии при $S \gg 1$, (фактически уже при $S > 2$), когда движение становится стохастическим с большой степенью точности. Промежуточная зона распространяется в область стохастичности при $S \approx 1$ в форме островков устойчивости, размеры и общая площадь которых быстро уменьшаются с ростом S . Промежуточная зона проникает также в устойчивую область $S \leq 1$, образуя участки все более слабой по мере уменьшения S неустойчивости.

Проблема стохастичности движения наиболее важна для анализа нелинейной колебательной системы в целом, т.е. на неограниченном временном интервале и для случайных начальных условий. Изучение подобных нелинейных колебательных систем в последнее время обусловлено проблемой длительного удержания заряженных частиц в ограниченной области с помощью электромагнитного поля специальной конфигурации. Одной из таких задач является удержание частиц в накопителях, особенно со встречными пучками, т.е. обеспечение устойчивости частиц в накопителях, где сильная нелинейность вытекает из наличия двух взаимодействующих пучков.

Критерий стохастичности поперечного движения частиц "слабого" пучка подвергавшихся влиянию электромагнитного поля встречного сгустка "сильного" пучка сформулирован в работе [22] следующим образом: движение частиц становится стохастическим, если суммарный фазовый объем областей устойчивости резонансов действующих на данном участке фазово-

го пространства превосходит объем участка. Такой критерий использовался, например, в работах [26,27].

Следует также отметить мнение Охума [37], который считает, что попытка определения предела светимости действием стохастичности, так называемый "стохастический предел", наталкивается на большие трудности, вследствие того, что "нет определенного пути вычисления ширины резонансов при их перекрытии, поэтому "стохастический предел" "скачет" от одного теоретика к другому."

И.2. Численные эксперименты

Интересные численные эксперименты по изучению стохастичности взаимодействия встречных пучков поставлены Израйлевым, Минневым и Тумайхиным [38]. Численное моделирование эффектов встречи и поиск критериев устойчивости движения частиц проведены в широкой области условий. Изучалась сравнительно простая модель взаимодействия отдельной частицы с полем цилиндрического или ленточного пучка с гауссовым распределением частиц в поперечной плоскости. Фазовая плоскость исследовалась за $10^4 + 10^5$ соударений, когда еще можно пренебречь затуханием (характерное время затухания для накопителя ВЭПП-2М выраженное в числе взаимодействий с пучком составляет 10^6). В качестве изменяющихся параметров использовались линейный сдвиг частоты в обозначениях Аммана ξ и набег фазы за один период магнитной системы μ связанный с бетатронной частотой ν и числом мест встречи m соотношением $\mu = \frac{2\pi\nu}{m}$. При каждом значении μ величина ξ (пропорциональная току пучка) увеличивалась до некоторого $\xi_{кр}$, пока на фазовой плоскости не начинали перекрываться области устойчивости соседних резонансов.

Многочисленные рисунки фазовой плоскости при различных значениях ξ и μ (при ξ выше и ниже $\xi_{кр.}$) позволили сделать следующие выводы:

1. для электрон-позитронных встречных пучков $\xi_{кр.}$ в большой области значений $\mu = \frac{2gV}{m}$ слабо зависит от частоты бетатронных колебаний,

2. имеется существенное увеличение $\xi_{кр.}$ при значениях $\frac{\mu}{g} = \frac{2v}{m}$ близких и чуть больших целого числа.

3. критерий стохастичности повышается также при значениях $\frac{\mu}{g} = \frac{2v}{m}$ слева от целого, но для малых амплитуд в отличие от случая предыдущего пункта этот диапазон не является устойчивым.

4. для цилиндрической модели пучка $\xi_{кр.} = 0,16$ меньше, чем $\xi_{кр.}$ для ленточной модели пучка равного 0,24.

Рассмотрен также случай, когда частота бетатронных колебаний не постоянна и промодулирована синхротронными колебаниями. При этом обнаружилось значительное понижение (в 5-10 раз) значения $\xi_{кр.}$ при котором начинается наблюдаться стохастичность.

Ш.3. Диффузия Арнольда

Сильная стохастичность обязана достаточно большому возмущению, когда выполняется условие $S \gg 1$. Однако существует особый тип стохастической неустойчивости, который проявляется и при $S \leq 1$.

Как было уже отмечено, каждому изолированному резонансу соответствует стохастический слой вокруг сепаратрисы. В случае системы с одной степенью свободы достаточно тонкие стохастические слои разных резонансов не пересекаются на фазовой плоскости,

поэтому неустойчивость локализована в пределах одного стохастического слоя и с практической точки зрения опасности не представляет. В многомерном случае стохастические слои разных резонансов вообще говоря пересекаются между собой образуя запутанную систему каналов по которым возможна диффузия на большие расстояния, т.е. реальная неустойчивость. Впервые пример такой неустойчивости был приведен Арнольдом [39], поэтому она носит название диффузии Арнольда. В работе Чирикова [40] показано, что диффузия Арнольда может играть определенную роль в накопителях, особенно протонных, где отсутствует затухание колебаний, во всяком случае в естественных условиях. На основе критерия стохастичности по перекрытию резонансов оценена ширина стохастического слоя и скорость диффузии Арнольда.

Заключение

Подводя итоги вышесказанного, вновь вернемся к тем направлениям развития представлений о взаимодействии встречных пучков в накопителях, которые, возможно, позволяют наметить пути достижения оптимальной светимости. Как уже отмечалось, в рамках традиционной линейной теории предложен путь увеличения светимости в накопителях с компенсированным зарядом [11,12] посредством подавления линейного сдвига частоты. Однако в таком накопителе возникает неустойчивость нового типа - коллективная неустойчивость четырех пучков [14]. В литературе отсутствуют количественные оценки степени проявления этой неустойчивости, с другой стороны, как следует из доклада Марана [17] на последней Международной конференции по ускорителям, работы по созданию накопителя

продолжаются и авторы получили уже первые, на их взгляд обнадеживающие, результаты. В этой связи представляется целесообразным вновь вернуться к более тщательному и количественному анализу этого вопроса.

Обратим внимание также на следующий практический недостаток, линейной теории: основной параметр, определяющий оптимальный в отношении светимости режим работы накопителя — линейный сдвиг частоты, устанавливается экспериментально, лишь после того, как накопитель построен.

Задание величины параметра $\xi (\Delta\nu)$ путем использования его значения для других, уже созданных машин, возможно только в широких пределах от 0.01 до 0.1 (см. табл. I).

Другие идеи поисков путей повышения светимости основаны либо на экспериментальном материале, либо полностью лежат вне рамок традиционной линейной теории. В этой связи обратим внимание на эффект наблюдавшийся в сравнительно простой числовой модели в работе [38] и обнаруженный впервые экспериментально. Речь идет о повышении светимости при подходе частоты бетатронных колебаний сверху к целому значению. В рамках линейной теории это означает увеличение критического сдвига частоты для бетатронных частот вблизи и сверху целого значения. Качественно это явление может быть объяснено уже в первом приближении теории, учитывающей нелинейность поперечной части электромагнитного поля встречного пучка. Как известно, взаимодействие "сильного" встречного пучка со "слабым" приводит к возникновению ряда нелинейных резонансов, а при выборе частоты бетатронных колебаний вблизи целого порядка существенных ("работающих") резонансов увеличивается, т.е. их мощность уменьшается. Кажется

естественным думать о проведении аналитического рассмотрения этого явления, как в целях понимания его природы, так и в целях возможного использования.

В работах Ле Дюффа [19] предложено повышение светимости, путем компенсации нелинейности взаимодействия встречных пучков. Однако, помимо того, что полного исключения нелинейности добиться просто невозможно, нельзя считать доказанным также что оптимальная светимость достигается в области, где взаимодействие пучков линейно. Экспериментальный материал скорее указывает на то, что оптимальная светимость будет достигнута как раз в области параметров, где взаимодействие пучков существенно нелинейно. К сожалению, единственным использованным способом исследования этой области по сей день остается конкретный численный анализ, проведенный, например, в [38]

С развитием ускорительной техники все более реальными становятся пучки почти равных интенсивностей, когда разделение их на "слабый" и "сильный" неправомерно. Некоторые эксперименты проведенные на накопителе SPEAR [8,9] показали, что предел светимости обремененный встречному взаимодействию, в случае больших энергий кажется одинаковым для (а) взаимодействия двух пучков равной интенсивности и (б) взаимодействия "слабого" и "сильного" пучка. Тем не менее, теоретический анализ поведения почти одинаковых по интенсивности пучков остается невыполненным. Не исключено, что результатом такого анализа могло быть обнаружение областей устойчивости системы двух "сильных" пучков с новыми значениями светимости. Однако, даже в том случае, когда пучки действительно можно разделить на "сильный" и "слабый", неясна область параметров,

где светимость оптимальна.

Существующие работы (см. напр. [30, 41]) дают достаточное представление о размерах одного пучка. Возможно, тем не менее, имело бы смысл еще раз сформулировать основные положения теории размеров одиночного невозмущенного пучка с тем, чтобы полученные аналитические формулы использовать в задаче уже со встречными пучками. Влияние встречного пучка приводит к возмущению исходной связи между горизонтальным и вертикальным движениями. Так как нас интересуют многооборотные процессы, то такое возмущение можно описать на языке нелинейных резонансов, обусловленных большой нелинейностью поля встречного пучка. Очевидно, что таких нелинейных резонансов теоретически бесконечное количество, но, как показано в работах [20, 21] при наличии радиационного трения, существенны — только ограниченное их число. Это позволяет надеяться, что исследование размеров встречных пучков может быть практически осуществлено. Зная конкретные размеры пучков в местах встречи, можно будет вычислить светимость накопителя в достаточно широкой области параметров и с необходимой точностью.

Следует также обратить внимание на то, что магнитная система накопителей со встречными пучками выбирается из требования устойчивости одиночного невзаимодействующего пучка. Представляется целесообразным поиск такой оптимальной магнитной системы где была бы учтена с самого начала специфика задачи — наличие и многократное столкновения встречных пучков. Формально это соответствует анализу на устойчивость уравнений движения типа (50) при нефиксированных функциях $K(\theta)$ описывающих магнитную систему и $f(\frac{z}{L}, \theta)$ описывающих взаимодействие пучков. Характер и вид этих функций будет следовать из условий устойчивости дви-

жения частиц и оптимальности светимости накопителя. Такая о-
щая постановка вопроса требует для своего решения привлечения
общих методов нелинейного анализа изложенных, например, в кни-
гах: Красносельский, Бурд, Колесов [44], Далецкий, Крейн [45].

Все вышесказанное приводит к мысли о недостаточности
не только традиционного линейного анализа, но и тех элементов
нелинейного, которые привлекаются в настоящее время для пост-
роения качественной картины поведения встречных пучков.
Нам представляется, что успехи нелинейного анализа, достигнутые
на сегодняшний день (см., напр., [35, 42-45]) еще совершенно
недостаточно используются в теории взаимодействия встречных
пучков в накопителях, как в плане использования развитых при-
ближенных методов, так и в плане получения точных решений ура-
внений описывающих простые модельные системы. Наконец, особого
внимания заслуживают направления, связанные с анализом стохас-
тических свойств системы двух нелинейно взаимодействующих
пучков в накопителях. Проведенные аналитический [28, 36] и чис-
ленный [36, 38] анализы простых моделей взаимодействующих пучков
позволяют надеяться, что и в этом направлении в ближайшее вре-
мя могут быть получены важные теоретические и практические
результаты.

Авторы признательны А.И. Алеханяну и А.Н. Скринскому
за многочисленные обсуждения проблемы, предшествующие написанию
настоящего обзора, а также считают своим приятным долгом по-
благодарить Я.С. Дербенева, И.П. Карабекова и Х.А. Симоняна
за стимулирующие обсуждения и полезные замечания.

ТАБЛИЦА I.

Действующие и проектируемые
электрон-позитронные накопители.

	полная энер- гия (ГэВ)	макс свети- мость ($\text{см}^{-2}\text{сек}^{-2I}$)	лин. сдвиг частоты
АСО (Орсэ)	0.4-1.1	10^{29}	0.04
ВЭПП-2М (Новосибирск)	0.4-1.3	10^{30}	0.01-0.02
AZONE (Фраскати)	1.4-3.1	5×10^{29}	0.03
DCI (Орсэ)	1.0-3.4	10^{31}	
ZORIS (Гамбург)	2.0-9.0	10^{31}	
SPEAR (Стэнфорд)	2.4-8.4	10^{31}	0.04
ВЭПП-4 (Новосибирск)	14	10^{31}	0.05
CESR (Итака)	10-16	10^{32}	
PEP (Стэнфорд)	14-30	10^{32}	0.06
PETRA (Гамбург)	14-38	10^{32}	
LEP (CERN)	100	10^{32}	

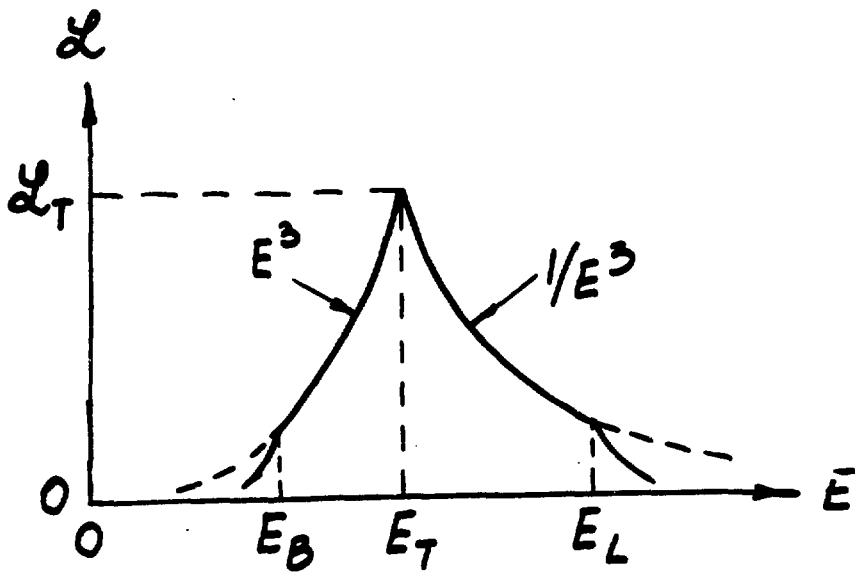


Рис.
Рис. Г

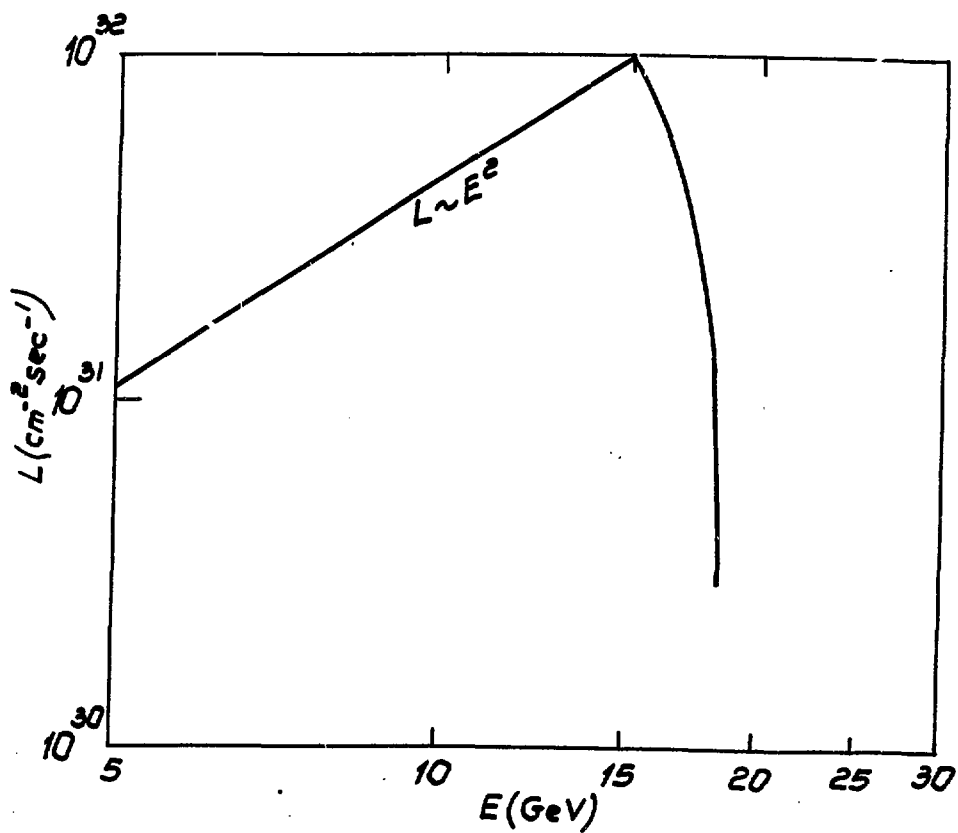


FIG. 2

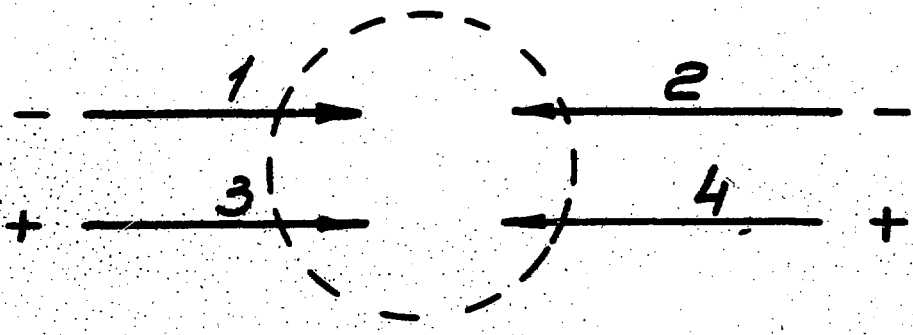


Рис.3

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ

Рис.1 Оптимальная светимость в линейной теории.

Рис.2 Проектируемая светимость в накопителе PEP .

Рис.3 Схема обозначений функций f_1 , f_2 , f_3 , f_4 .

ЛИТЕРАТУРА

1. И.Я.Протопопов. Состояние работ на установке со встречными пучками ЭЭШ-4. ИЯФ СОАН СССР, 77-79, 1977.
2. Design report Cornell electron storage ring, Oct., 1976.
3. PEP conceptual design report, LBL-4288, SLAC-189, 1976.
4. PETRA A Proposal for extending the storage-ring Facilities at DESY to higher Energies, DESY, 1974.
5. CERN Courier, 17, 6, 183, 1977
6. Г.В.Григорян, А.Д.Ходжамирян. Электрон-позитронная аннигиляция на встречных пучках с большой светимостью, ВФМ-245(38)-77.
7. M.Sands, The Physics of Electron Storage Rings, An Introduction, SLAC-121, 1970;
A.M.Sessler, The Self-destructive Behavior of Stored Electron Beams: the Disease Patterns, Symptoms, and Cures,
8. PEP Note-22, ERAN-192, 1972.
F.Amman, Proc. of 8-th Int.Conf.on High-Energy Accel, 1971, p.63.
9. F. Amman, Nucl.Sci., NS-20, N.3, 858, 1973.
10. E.Keil, G.Pellegrini, A.M.Sessler, Nucl.Instr. and Meth., 118, N.1, 165, 1974.
11. E.Keil, Theoret. Asp. of the Behavior of Beams in Accel. and Storage Rings. Proc. of 1 Course of the Int.Sch. of Part. Accel.of the "Ettore Majorana", Cent. of Sci. Cult., Erice, Geneva, 1977.
12. J.E.Augustin et al., VII Международная конференция по ускорителям заряженных частиц, Брест, II3, 1969.
13. The Orsay Storage Ring Group, Proc. of 8-th Int. Conf.on High - Energy Accel, 1971, p.150.
14. E.Keil, Intersecting Storage Rings, CERN, 72-14, 1972.

15. Я.С.Дербенев. Коллективная неустойчивость компенсированных встречных пучков, ИЯФ СОАН СССР, 70-72, 1972.
16. Электродинамика плазмы, М., "Наука", 1974:
Н.Кролл, А.Трайвеллис. Основы физики плазмы, М."Мир", 1975.
J.D.Lawson, Particle Beams and Plasmas, CERN, 76-09, 1976
17. Я.С.Дербенев, Н.С.Диканский, Д.В.Пестряков. О сумме декрементов когерентных колебаний пучка в накопителе, ИЯФ СОАН СССР, 34-70, 1970.
18. Status Rep.on DCI par the Orsay Storage Ring Group, X-th Int.Conf.on High-Energy Accel, Serpuchov 11-17 July, 1977.
19. F.Laplache, 1977 Int.Symp.on Lepton and Photon Inter. at High-Energy, Aug., 25-31, 1977.
20. J.Le Duff, Proc.of the 1 Course of the Int.Sch.of Part. Accel.of the "Ettore Majorana", Cent.for Sci.Cult, Erice, Geneva, 1977, p.377
21. Я.С.Дербенев. Некоторые эффекты электромагнитного взаимодействия частиц со встречным сгустком, ИЯФ СОАН СССР, 1965.
22. Я.С.Дербенев, С.Н.Мишнев, А.Н.Скрипский. Эффекты электромагнитного взаимодействия частиц со встречным сгустком, ИЯФ СОАН СССР, 1965.
23. Н.М.Крылов, Н.Н.Боголюбов. Введение в нелинейную механику. Изд.АН УССР, 1937; Н.Н.Боголюбов, В.А.Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М., "Наука", 1974.
24. K.Wiedemann et al., Nucl.Sci. NS-20, N.3, 838, 1973

25. A.G.Rugiero, The Beam-Beam Limit in SPEAR as a Single Resonance Effect, PEP Note-44, 1973.
26. E.Keil, Non-Linear Space Charge Effects, CERN/ISR-TH/72-7, CERN/ISR-TH/72-25, 1972
27. E.Keil, The Excitation of Non-Linear Resonances by Displaced Elliptical Beam, PEP Note-42, 1973.
28. Б.В.Чириков. Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности, ИЯФ СОАН СССР, 1969.
29. A.G.Rugiero, L.Smith, Calculation of Resonance Effects due to a Localized Gaussian Charge Distribution, PEP Note-52, 1973.
30. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев. Теория циклических ускорителей, М.Гос.изд.Физ.-мат.наук, 1962.
31. Я.С.Дорбеков. Кандидатская диссертация, ИЯФ СОАН СССР, 1968.
32. С.И.Минков. Кандидатская диссертация, ИЯФ СОАН СССР.
33. G.H.Rees, Proc.of the 1 Course of the Int.Sch.of Part. Accel.of the "Ettore Majorano", Cent.for Sci.Cult,Erice, Geneva, 1977, p.341.
34. S.Ohnuma, R.L.Glukstern, Nucl.Sci., NS-22, 3, 1951. 1975
- С.Г.Арутюнян, Х.А.Симова. Исследование поперечного движения частиц вблизи резонанса $2Q_x + Q_z = 16$ в Бременском синхротроне, ВФМ-199(45)-76;
- С.Г.Арутюнян, Х.А.Симова. Влияние резонанса $2Q_x + Q_z = K$ на медленный вывод частиц из ускорителя, ВФМ-200(46)-76.
35. Н.В.Бутолкин, В.И.Шеймарк, Н.А.Фурасов. Введение в теорию нелинейных колебаний, М. "Наука", 1976.

36. Г.М.Заславский, Б.В.Чирков. Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний. ИЯФ СОАН СССР, 43-70, 1970.
37. S.Ohnuma, Design of High-Energy Proton Storage Rings, Proc.of the 1976 KEK Summer School, Tsukuba, 1976.
38. Ф.М.Израйлев, С.И.Мининев, Г.М.Тумайкин. Численные эксперименты по определению критерия стохастичности при взаимодействии встречных пучков (одномерная модель). ИЯФ СОАН СССР, 77-43, 1977.
39. В.И.Арнольд, ДАН, 156, 9, 1964.
40. Б.В.Чирков. Некоторые оценки слабой неустойчивости для встречных протонных пучков. ИЯФ СОАН СССР, препринт, 249, 1968.
41. Ю.М.Матунов. Кандидатская диссертация. ИЯФ СОАН СССР.
42. М.А.Красносельский, Г.М.Вайнякко, П.П.Забрейко, Я.Б.Рутцкий, В.Я.Стеценко. Приближенное решение операторных уравнений, М., "Наука", 1964.
43. В.И.Татарский. Некоторые методы решения стохастических дифференциальных уравнений. Изв.всес.уч.зав., Радиофизика, 17, 4, 570, 1974.
- Д.Н.Неймарк. О возникновении стохастичности в динамических системах, 17, 4, 602, 1974. Изв. высш. уч. заведений, Радиофизика.
- Е.Н.Пелиновский. Некоторые точные методы в теории нелинейных волн. Изв.всес. уч.завед., Радиофизика, 19, 5-6, 883, 1976.
- A.C.Scott, F.Y.E.Chu, D.W.Mclaughlin, Soliton: A New Concept in Applied Science, Proc. IEEE, 61, 1443, 1973.

Перевод в книге: Э.Скотт, Волны в активных нелинейных средах в приложении к электронике, М., "Сов.радио", 1977

44. М.А.Красносельский, В.А.Бурд. Ю.С.Колесов, Нелинейные почти периодические колебания, М., "Наука", 1970.

45. Д.Л.Далецкий, М.Г.Крейн. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., "Наука", 1970.

Рукопись поступила 15-го февраля 1978г.



Редактор Л.П.Мукеян
Тех.редактор А.С.Абрамян

Заказ 217

ВФ-03346

Тираж 299

Подписано к печати 12/VI-78г. Формат издания 60x84/16

3,5 уч.изд.л. ц. 25 к.

Издано Отделом научно-технической информации
Ереванского физического инст.тута, Ереван-36, пер.Маркаряна 2

индекс 3624