индекс 3624

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЕФИ-289(14)-78

Р.В.ТЕВИКЯН

ПСЕВДОЧАСТИЦЫ В SU(3) КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ

АРУС
ԵՐԵՎԱՆ ЕРЕВАН
1978

Лагранжиан, описывающий частицу со спином $S=1$ полностью, должен содержать четыре массовых параметра [1], так как при $E \to \infty$ имеем в пределе четыре состояния со спиральностями $\pm 1, 0, +1$, и -1. При этом из лоренц-инвариантности теории следует, что частицы со спиральностями (+1) и (-1) в свободном состоянии не существуют [1]. По этой причине, для исследования частиц со спиральностями (+1) и (-1) необходимо нарушать лоренц-инвариантность. Из работы Белавина, Полякова и др. [2] следует, что в эвклидовом пространстве " частицы" (+1) и (-1) существуют в свободном состоянии, которые и называются псевдочастицами.

В эвклидовой метрике обобщенный Лагранжиан Янга-Миллса [1] имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[a_1(F_{\mu\nu}+\tilde{F}_{\mu\nu}) + a_2(F_{\mu\nu}-\tilde{F}_{\mu\nu})\right]\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]\right)$$

$$- \frac{m_1}{2}\mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - m_2\,\mathrm{tr}\, A_\mu A_\mu, \qquad (1)$$

где a_1, a_2, m_1, m_2 - четыре массовых параметра необходимых для полного описания частицы со спином 1.

Из Лагранжиана (1) ни один массовый параметр исключить невозможно, так как они принимают и нулевое значение. Если в (1) положить $a_2 = 0$, $m_2 = 0$, тогда мы получим уравнения дуальности

$$F_{\mu\nu} = \tilde{F}_{\mu\nu} \,, \qquad (2)$$

$$D_\nu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0 \,,$$

а если положить $a_1 = 0$, $m_2 = 0$, получим

$$F_{\mu\nu} = - \tilde{F}_{\mu\nu} \,, \qquad (3)$$

$$D_\nu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0 \,.$$

В частности, симметричный тензор энергии-импульса в пределах (2) и (3) равен нулю,

$$\Theta_{\mu\nu} = 0 \,. \qquad (4)$$

Мы будем рассматривать уравнение (2), которое можно записать в виде

$$F_{\mu\nu} = \tilde{F}_{\mu\nu} \,, \qquad (5)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \,.$$

В $SU(3)$ калибровочных теориях $F_{\mu\nu}$ и A_μ это 3 х 3 матрицы, и мы можем ввести матрицы проектирования $\hat{\psi}_1$, $\hat{\psi}_2$, $\hat{\psi}_3$ с матричными элементами

$$(\hat{\psi}_1)_{\ell m} = \frac{1}{2}\left(-i\varepsilon_{\ell m k}\frac{x_k}{r} - \frac{x_\ell x_m}{r^2} + \delta_{\ell m}\right),$$

$$(\hat{\psi}_2)_{\ell m} = \frac{1}{2}\left(i\varepsilon_{\ell m k}\frac{x_k}{r} - \frac{x_\ell x_m}{r^2} + \delta_{\ell m}\right), \qquad (6)$$

$$(\hat{\psi}_3)_{\ell m} = \frac{x_\ell x_m}{r^2} \,,$$

где $\ell, m, k = 1, 2, 3$, $r^2 = x_k^2$.

Эти матрицы эрмитовы и удовлетворяют соотношениям

$$\hat{\psi}_i \hat{\psi}_j = \hat{\psi}_i \delta_{ij} \,, \qquad t_r \hat{\psi}_i = 1 \,,$$

$$[\hat{\psi}_i, \hat{\psi}_j] = 0 \,, \qquad \hat{\psi}_1 + \hat{\psi}_2 + \hat{\psi}_3 = 1 \,. \qquad (7)$$

Непосредственно мы будем работать с матрицами с нулевым следом

$$\hat{\varphi}_i = \hat{\psi}_i - \frac{1}{3} \,, \qquad t_r \hat{\varphi}_i = 0 \,, \qquad \hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2 + \hat{\varphi}_3 = 0 \,. \qquad (8)$$

Эти матрицы удовлетворяют уравнениям $x_k \partial_k \hat{\varphi}_i = 0$. При цилиндрической симметрии, разложения потенциала [3] , в $SU(3)$ можно записать в виде

$$A_0 = i\left(a_0 \hat{\varphi}_1 - b_0 \hat{\varphi}_2\right),$$

$$A_k = i\left[a_1 \frac{x_k}{r}\hat{\varphi}_1 + a_2 \partial_k \hat{\varphi}_1 + (a_3 - 1)\tilde{\partial}_k \hat{\varphi}_1 - b_1 \frac{x_k}{r}\hat{\varphi}_2 + b_2 \partial_k \hat{\varphi}_2 + (b_3 + 1)\tilde{\partial}_k \hat{\varphi}_2\right], \qquad (9)$$

где $\tilde{\partial}_k = \varepsilon_{k\ell m}\frac{x_\ell}{r}\partial_m$,а коэффициенты $a_0\, b_0, \ldots\, b_3$ зависят от r и t . Компоненты тензора напряженности имеют вид

$$F_{0k} = i\Big\{(\partial_0 a_1 - \partial_1 a_0)\frac{x_k}{r}\hat{\varphi}_1 - (\partial_0 b_1 - \partial_1 b_0)\frac{x_k}{r}\hat{\varphi}_2$$
$$+ (\partial_0 a_2 - a_0 a_3)\partial_k \hat{\varphi}_1 + (\partial_0 b_2 - b_0 b_3)\partial_k \hat{\varphi}_2 \qquad (10)$$
$$+ (\partial_0 a_3 + a_0 a_3)\tilde{\partial}_k \hat{\varphi}_1 + (\partial_0 b_3 + b_0 b_2)\tilde{\partial}_k \hat{\varphi}_2\Big\},$$

и

$$\tilde{F}_{0k} = i\Big\{\frac{1}{r^2}(1 - 2a_2^2 - 2a_3^2 + b_2^2 + b_3^2)\frac{x_k}{r}\hat{\varphi}_1 - \frac{1}{r_2}(1 - 2b_3^2 - 2b_3^2 + a_2^2 + a_3^2)\frac{x_k}{r}\hat{\varphi}_2$$
$$- (\partial_1 a_3 + a_1 a_2)\partial_k \hat{\varphi}_1 - (\partial_1 b_3 + b_1 b_2)\partial_k \hat{\varphi}_2$$
$$+ (\partial_1 a_2 - a_2 a_3)\tilde{\partial}_k \hat{\varphi}_1 + (\partial_2 b_2 - b_1 b_3)\tilde{\partial}_k \hat{\varphi}_2\Big\}, \qquad (11)$$

где ∂_0 -производная по t , а ∂_1 -производная по z .

Из условия $F_{\mu\nu} = \tilde{F}_{\mu\nu}$ следует система уравнений

$$\partial_0 a_2 - a_0 a_3 = -\partial_1 a_3 - a_1 a_2 \,,$$
$$\partial_0 a_3 + a_0 a_2 = \partial_1 a_2 - a_1 a_3 \,,$$
$$\partial_0 b_2 - b_0 b_3 = -\partial_1 b_3 - b_1 b_2 \,, \qquad (12)$$
$$\partial_0 b_3 + b_0 b_2 = \partial_1 b_2 - b_1 b_3 \,,$$

$$\tau^2(\partial_0 a_1 - \partial_1 a_0) = 1 - 2a_2^2 - 2a_3^2 + b_2^2 + b_3^2,$$

$$\tau^2(\partial_0 b_2 - \partial_1 b_0) = 1 - 2b_2^2 - 2b_3^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

На 2-мерные потенциалы (a_0, a_1) и (b_0 , b_1) можно наложить условие калибровки

$$\partial_0 a_0 + \partial_1 a_1 = 0, \qquad \partial_0 b_0 + \partial_1 b_1 = 0, \tag{13}$$

откуда следует

$$a_0 = \partial_1 \sigma, \quad a_1 = -\partial_0 \sigma, \quad b_0 = \partial_1 \omega, \quad b_1 = -\partial_0 \omega.$$

Вводя обозначения

$$a_2 = e^{\sigma} \chi_2, \qquad a_3 = e^{\sigma} \chi_3,$$
$$b_2 = e^{\omega} \zeta_2, \qquad b_3 = e^{\omega} \zeta_3,$$

из уравнения (12) получим

$$\partial_1 \chi_2 = \partial_0 \chi_3, \qquad \partial_1 \zeta_2 = \partial_0 \zeta_3,$$
$$\partial_1 \chi_3 = -\partial_0 \chi_2, \qquad \partial_1 \zeta_3 = -\partial_0 \zeta_2. \tag{14}$$

Эти уравнения являются условиями Коши-Римана и означает, что функции

$$f = \chi_2 + i\chi_3 \qquad \text{и} \qquad s = \zeta_2 + i\zeta_3, \tag{15}$$

являются аналитическими функциями от $z = \tau + it$. Последние две уравнения (12) приводятся в виде

$$-\tau^2 \nabla^2 \sigma = 1 - 2e^{2\sigma} f f^* + e^{2\omega} s s^*,$$
$$-\tau^2 \nabla^2 \omega = 1 - 2e^{2\omega} s s^* + e^{2\sigma} f f^*, \tag{16}$$

где $\nabla^2 = \partial_0^2 + \partial_1^2$.

Эти уравнения инвариантны относительно замены

$$\sigma \to \sigma - \tfrac{1}{2} \ln (h h^*),$$
$$\omega \to \omega - \tfrac{1}{2} \ln (q q^*),$$
$$f \to f h,$$
$$s \to s q, \tag{17}$$

где h и q произвольные аналитические функции не имеющие нулей, и в этом случае, например

$$\nabla^2 \ln (h h^*) = 0.$$

Введем обозначения

$$\sigma = \ln \tau - \tfrac{1}{2} \ln (f f^*) + S,$$
$$\omega = \ln \tau - \tfrac{1}{2} \ln (s s^*) + \mathcal{T}, \tag{18}$$

при этом $\nabla^2 \ln \tau = -\frac{1}{\tau^2}$ и на время предположим, что $\nabla^2 \ln f f^* = 0$, $\nabla^2 \ln s s^* = 0$.

В результате такой замены, для ρ и $\mathcal{T}$ получим систему уравнений

$$\nabla^2 \rho = 2e^{2\rho} - e^{2\mathcal{T}},$$
$$\nabla^2 \mathcal{T} = 2e^{2\mathcal{T}} - e^{2\rho}. \tag{19}$$

Для исследования этих уравнений введем обозначения

$$x = \tfrac{1}{2}(\rho + \mathcal{T}), \qquad y = \tfrac{1}{2}(\rho - \mathcal{T}) \tag{20}$$

и предположим, что

$$y^2 \ll 1, \tag{21}$$

тогда

$$\nabla^2_x = e^{2x},$$

$$\nabla^2_y = -6e^{2x}y. \qquad (22)$$

Первое уравнение (22) есть уравнение Лиувилла, общее решение которого имеет вид

$$x(z) = -\ln\left[\tfrac{1}{2}(1-gg^*)\right] + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{dg}{dz}\right|^2, \qquad (23)$$

где $g(z)$ – произвольная аналитическая функция.

При $y=0$, полагая $f = \frac{dg}{dz}$ получим

$$\sigma = -\ln\frac{1-gg^*}{2r}. \qquad (24)$$

Чтобы не возникали сингулярности необходимо выполнение условий

$$|g| = 1 \quad \text{при} \quad r = 0 \qquad (25)$$

$$|g| < 1 \quad \text{при} \quad r > 0$$

и гладкое поведение при $z \to \infty$, тогда

$$g(z) = \prod_{i=1}^{K}\left(\frac{a_i - z}{a_i^* + z}\right), \qquad (26)$$

где a_i – произвольные комплексные числа, $\operatorname{Re} a_i > 0$.

Чтобы вычислить, в общем случае, интеграл

$$\operatorname{tr}\int F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}\,d^4x,$$

введем обозначения

$$a = a_2 + i a_3, \qquad b = b_2 + i b_3,$$

тогда

$$a = e^{\sigma} f, \qquad b = e^{\omega}\mathfrak{z}.$$

Обозначим через n_1 число нулей функции f, а через n_2 –

число нулей $\mathfrak{z}$, тогда получим

$$\operatorname{tr}\int F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}\,d^4x = [illegible]\,\pi^2(n_1 + n_2). \qquad (27)$$

Используя условие дуальности получим, что действие

$$S \geq 16\pi^2 m_1 (n_1 + n_2), \qquad (28)$$

то есть минимальное действие кратно $16\pi^2 m_1$.

Матрицы проектирования для SU ([illegible])

Произвольную 4 x 4 матрицу можно разложить по полной системе матриц Дирака

$$\{1, \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}, \gamma_\mu\gamma_5, \gamma_5\}. \qquad (29)$$

Используя матрицы проектирования $\chi^{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$, $\gamma_5^2 = 1$ мы можем написать

$$\sigma_{\mu\nu} = \sigma^{+}_{\mu\nu} + \sigma^{-}_{\mu\nu}.$$

где $\sigma^{\pm}_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu}\chi^{\pm}$.

Введем матрицы

$$\sigma^{\pm} = \frac{a_\mu b_\nu \sigma^{\pm}_{\mu\nu}}{\sqrt{a_\alpha^2 b_\beta^2 - (a_\alpha b_\alpha)^2}}, \qquad (30)$$

где a_μ и b_μ – произвольные вектора, при этом

$$(\sigma^{\pm})^2 = \chi^{\pm} \qquad (31)$$

Четыре матрицы

$$\{\chi^{+}, \chi^{-}, \sigma^{+}, \sigma^{-}\}, \qquad (32)$$

образуют полную совокупность коммутирующихся матриц.

Вектора a_μ и b_μ мы выберем следующим образом

$$a_0 = 0, \quad a_k = \frac{x_k}{r}; \quad b_0 = 1, \quad b_k = 0,$$

тогда

$$\sigma^+ = \frac{x_k}{r}\sigma^+_{k0}, \qquad \sigma^- = \frac{x_k}{r}\sigma^-_{k0}. \tag{33}$$

В этом случае матрицы проектирования для $SU(4)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \hat\psi_1 &= \tfrac{1}{2}(\chi^+ + \sigma^+), \quad & \hat\psi_2 &= \tfrac{1}{2}(\chi^+ - \sigma^+), \\ \hat\psi_3 &= \tfrac{1}{2}(\chi^- + \sigma^-), \quad & \hat\psi_4 &= \tfrac{1}{2}(\chi^- - \;^-). \end{aligned} \tag{34}$$

Введенные матрицы удовлетворяют соотношения

$$\begin{aligned} &\hat\psi_i \hat\psi_j = \hat\psi_i \delta_{ij}, \qquad [\hat\psi_i, \hat\psi_j] = 0, \\ &\hat\psi_i^+ = \hat\psi_i, \quad t_r \hat\psi_i = 1, \quad \hat\psi_1 + \hat\psi_2 + \hat\psi_3 + \hat\psi_4 = 1, \end{aligned} \tag{35}$$

и удовлетворяют уравнению

$$x_k \partial_k \hat\psi_i = 0.$$

Введем матрицы с нулевым следом

$$\begin{aligned} &\hat\varphi_i = \hat\psi_i - \tfrac{1}{4}, \qquad t_r \hat\varphi_i = 0 \\ &\hat\varphi_1 + \hat\varphi_2 + \hat\varphi_3 + \hat\varphi_4 = 0. \end{aligned} \tag{36}$$

Для потенциала Янга-Миллса можно написать разложение аналогичное (9)

$$A_0 = i\sum_{j=1}^{3} a_j \hat\varphi_j, \tag{37}$$

$$A_k = i\sum_{j=1}^{3}\left(b_j \frac{x_k}{r}\hat\varphi_j + c_j \partial_k \hat\varphi_j + d_j \tilde\partial_k \hat\varphi_j\right)$$

Дальнейшее исследование вполне аналогично теории с $SU(3)$ симметрии.

В теориях с $SU(2)$ симметрии матрицы проектирования имеют вид

$$\hat\psi_1 = \frac{1}{2}\frac{\sigma_k x_k}{r} + \frac{1}{2}, \qquad \hat\psi_2 = -\frac{1}{2}\frac{\sigma_k x_k}{r} + \frac{1}{2}, \tag{38}$$

где $(\sigma_k x_k)^2 = r^2$.

Выполняются соотношения

$$\hat\psi_i^2 = \hat\psi_i, \qquad \hat\psi_1 \hat\psi_2 = 0.$$

Матрицы $\hat\varphi_i = \hat\psi_i - \frac{1}{2}, \quad t_r \hat\varphi_i = 0, \quad \hat\varphi_1 + \hat\varphi_2 = 0.$

Для потенциала A_μ можно ввести разложение

$$A_0 = a_0 \hat\varphi,$$

$$A_k = a_1 \frac{x_k}{r}\hat\varphi + a_2 \partial_k \hat\varphi + a_3 \tilde\partial_k \hat\varphi, \tag{39}$$

где $\hat\varphi = \frac{1}{2}\frac{\sigma_k x_k}{r}$.

Формулы аналогичные (39) были использованы в работе Виттена[3].

В заключение выражаю благодарность С.Г.Матиняну за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. R.Tevikian, Nucl. Phys. B93, 74, 1975
2. A.Belavin, A.Polyakov, A.Schwarts and J.Tyupkin, Phys.Lett. 59B, 85, 1975
3. E.Witten, Phys.Rev.Lett. 38, 121, 1977.

Рукопись поступила 15-го февраля 1978г.

Редактор Л.П.Лукаян
Тех.редактор А.С.Абрамян

Заказ 173 ВФ- 03306 Тираж 299

Подписано к печати 5/У-78г. Формат издания 30х40
0,7 уч.изд.л. Ц. 5 к.

Издано Отделом научно-технической информации
Ереванского физического института,Ереван-36,пер.Маркаряна 2