

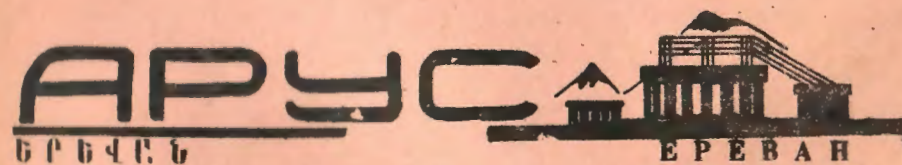
индекс 3624

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ԻՆՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЕФИ-320(45)-78

Г.А.НАГОРСКИЙ

ТЕОРИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА ПО ЛАЗЕРНОМУ УСКОРЕНИЮ
ЭЛЕКТРОНОВ В СРЕДЕ ОТ 2,5 МЭВ ДО 1000 МЭВ



1978

І. Одночастичная динамика с учетом асимметрии реальных ускоряющих полей

Цель эксперимента: обнаружение ускоренных электронов и, возможно, позитронов и оптимизация их энергии и интенсивности по параметрам установки.

Кроме того, зная параметры входного и выходного пучков электронов и позитронов, можно сделать определенные заключения о состоянии рабочей среды в момент прохождения лазерных импульсов, о волновой структуре самих импульсов, и о влиянии эффектов взаимодействия частиц и среды.

Подобное расширение цели эксперимента связано с тем обстоятельством, что сейчас практически не существует надежных экспериментальных методов фазовой и амплитудной диагностики мощных пикосекундных импульсов и контроля параметров среды в момент прохождения импульса. В то же время, ясно, что вычисление различных характеристик выходных пучков ускорителя и сравнение их с экспериментальными данными, позволит достаточно уверенно воссоздать картину прохождения импульса в среде.

Развитая в работах [1,2] теория ускорения в 2-волновом лазерном поле не учитывает реальной асимметрии полей; рассматривается случай асимптотически точного черенковского резонан-

са, когда полевая конфигурация или решетка движется со скоростью $\beta_R = 1$, что означает абсолютно точную юстировку угла между направлениями распространения волны и коэффициента преломления среды n . В реальном эксперименте параметры φ, n выдерживаются с определенной точностью, так же как и равенство амплитуд волн.

В работе рассматривается вопрос о допустимых отклонениях параметров ускорителя, т.е. вопрос о ширине черенковского резонанса.

Предполагается, что конечные каскады лазерных усилителей имеют ограниченные поперечные размеры D , поэтому дисперсия среды, отличие β_R от единицы, и асимметрия амплитуд волн не должны приводить к существенному уменьшению максимально возможного прироста энергии частиц, который в случае точного резонанса дается формулой

$$\Delta \mathcal{E} \approx 2eED, \quad (I)$$

где \mathcal{E} - энергия частицы, e - заряд, E - амплитуда волны.

Рассмотрим эти три основных эффекта, определяющих выбор параметров 2-волновой экспериментальной установки.

I. Дисперсия среды

Разница между групповой и фазовой скоростью импульса лазерного излучения приводит к выносу частиц из зоны большой амплитуды и прекращению ускорения.

Пусть импульс движется вдоль оси X , и компоненты его поля представляются в виде интеграла Фурье

$$a(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\omega) \exp \left\{ i\omega \left(\frac{x}{c} n(\omega) - t \right) \right\} d\omega. \quad (2)$$

где спектральная плотность $a(\omega)$ имеет вид

$$a(\omega) = \frac{a_0}{2\pi^{1/2}\Delta} \left(\exp \left\{ -\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta} \right)^2 \right\} + \exp \left\{ -\left(\frac{\omega + \omega_0}{\Delta} \right)^2 \right\} \right). \quad (3)$$

Гауссова форма спектра выбрана здесь для простоты расчетов. Показатель преломления среды вблизи линии поглощения имеет вид

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi N_0 e^2}{3m} \frac{f}{\omega_j^2 - \omega^2}. \quad (4)$$

Предполагая, что ширина спектра $\Delta \ll \omega_0$, представим показатель преломления вблизи точек $\omega = \pm \omega_0$ в виде ряда Тейлора

$$n(\omega) = n \pm \frac{(n^2 - 1)(n^2 + 2)}{3n} \frac{\omega_0(\omega \mp \omega_0)}{\omega_j^2 - \omega_0^2} \equiv n \pm n_1(\omega \mp \omega_0), \quad (5)$$

Тогда после подстановки (5), (3) в (2) и вычисления интегралов с квадратичными показателями экспонент, получим компоненты поля в виде

$$a(x, t) = a_0 \left(1 + \frac{x^2}{c^2} n_1^2 \Delta^4 \right)^{1/4} \exp \left\{ -\frac{1}{4\Delta^2} \left(\xi + \frac{x}{c} n_1 \omega_0 \right)^2 \right\} \cdot \cos \left\{ \omega_0 \xi - \frac{x n_1}{4c} \left(\xi + \frac{x}{c} n_1 \omega_0 \right)^2 + \frac{1}{2} \arctg \frac{x}{c} n_1 \Delta^2 \right\}, \quad (6)$$

где $\xi = \frac{x}{c} n - t$, n - значение показателя преломления при $\omega = \omega_0$. Смысл величины Δ становится ясным, если в (5) положить $n_1 = 0$, что было бы в отсутствии дисперсии.

В этом случае импульс перемещается без искажений и поле имеет вид

$$a(x,t)|_{n_1=0} = a_0 \exp\left\{-\frac{\Delta^2 \xi^2}{4}\right\} \cos \omega_0 \xi, \quad (7)$$

т.е. фазовая и групповая скорости совпадают, и Δ определяет длительность импульса.

Искажение формы импульса становится заметным при условии

$$\frac{x}{c} n_1 \Delta^2 \gtrsim 1. \quad (8)$$

Однако, задолго до выполнения этого условия частицы (фаза которых во время ускорения почти не меняется) будут выброшены за пределы огибающей импульса из-за разницы групповой скорости, определяемой из условия постоянства показателя экспоненты в (5) при $\frac{x}{c} n_1 \Delta^2 \ll 1$ в виде

$$v_{gp} = \frac{c}{n_1 + n_1 \omega_0} \quad (9)$$

и фазовой скорости волны, которая в пределах существенной величины огибающей оказывается равной c/n . Действительно, полагая $\frac{x}{c} n_1 \Delta^2 = \varepsilon \ll 1$, и рассматривая только такие значения x и t , при которых $\frac{\Delta}{2} \left(\frac{x}{v_{gp}} - t\right) = s \leq 1$, т.е. показатель экспоненты не превосходит величины порядка единицы, получили для фазы волны соотношение вида

$$\phi = \omega_0 \xi - \frac{\varepsilon s^2}{1 + \varepsilon^2} - \frac{1}{2} \arctg \varepsilon. \quad (10)$$

Производная этого выражения по времени при условии $\phi = \text{const}$ дает формулу для фазовой скорости v_ϕ вида

$$v_\phi = \frac{c}{n} \left(1 - \frac{\Delta}{\omega_0} \frac{\varepsilon s}{1 + \varepsilon^2}\right) \left(1 - \frac{\Delta}{\omega_0} \frac{\varepsilon s}{1 + \varepsilon^2} \frac{c}{n v_{gp}} - \frac{\Delta^2}{\omega_0^2} \frac{\varepsilon - \varepsilon^2}{(1 + \varepsilon^2)^2} \frac{n_1 \omega_0}{2n}\right)^{-1} \quad (11)$$

Если $\frac{\Delta}{\omega_0} \varepsilon \ll n-1$ и $\frac{\Delta^2}{\omega_0^2} \ll n-1$, то $v_\phi \approx \frac{c}{n}$ и расстояние l , на котором частица перемещается с одного края импульса на другой, т.е. на $2s$, легко вычисляется в виде

$$l = \frac{4s c}{n_1 \omega_0 \Delta}. \quad (12)$$

На этом расстоянии величина $\varepsilon = \frac{l}{c} n_1 \Delta^2 = 4s \frac{\Delta}{\omega_0}$ действительно много меньше единицы, так как очевидно, $\frac{\Delta}{\omega_0} \ll 1$. Подставляя выражение для l в условия применимости приближения $v_\phi \approx \frac{c}{n}$, получим, что (12) верно, если

$$\frac{\Delta^2}{\omega_0^2} \ll n-1. \quad (13)$$

Формулы (4), (5), (12), (13) необходимы для правильного выбора параметров среды, т.е. вещества ω_f и его плотности N_0 и параметров лазера-частоты ω_0 длительности импульса Δ^{-1} и поперечных размеров D усилителей лазерных импульсов

2. Допуск на скорость решетки.

2.1 Движение частиц в поле суперпозиции двух волн для произвольной скорости решетки.

Пусть система координат (x, y, z) фиксирована тройкой ортов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Волна с номером $i = 1, 2$ характеризуется направлением распространения $\vec{e}_i^{(u)}$ и вектором

электрического поля, который, вообще говоря, вращается в плоскости, перпендикулярной к направлению $\vec{e}_1^{(l)}$. Выберем орт $\vec{e}_2^{(l)}$ в плоскости $\{\vec{e}_1, \vec{e}_1^{(l)}\}$. Тогда электрический вектор l -волны представляется в виде

$$\vec{E}^{(l)} = -\vec{e}_2^{(l)} b_1^{(l)} \sin \phi_1^{(l)} + \vec{e}_1^{(l)} \times \vec{e}_2^{(l)} b_2^{(l)} \cos \phi_2^{(l)}, \quad (14)$$

где фаза волны дается выражением

$$\phi_{1,2}^{(l)} = \omega \left(\frac{n}{c} \vec{e}_1^{(l)} \vec{x} - t \right) + \alpha_{1,2}^{(l)}; \quad (15)$$

$\vec{x} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ - радиус-вектор точки наблюдения,

$\alpha_{1,2}^{(l)} = const$ - постоянные фазовые сдвиги.

Учитывая, что магнитный вектор l -волны $\vec{H}^{(l)} = n\vec{e}_1^{(l)} \times \vec{E}^{(l)}$, получим для суперпозиции волн электрическое \vec{E} и магнитное \vec{H} поля в виде

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \sum_l \left\{ -\vec{e}_2^{(l)} b_1^{(l)} \sin \phi_1^{(l)} + \vec{e}_3^{(l)} b_2^{(l)} \cos \phi_2^{(l)} \right\}, \\ \vec{H} &= n \sum_l \left\{ -\vec{e}_3^{(l)} b_1^{(l)} \sin \phi_1^{(l)} - \vec{e}_2^{(l)} b_2^{(l)} \cos \phi_2^{(l)} \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Вместо ортов $\{\vec{e}_1^{(l)}, \vec{e}_2^{(l)}\}$ удобно в той же плоскости использовать вектора $\{\vec{e}_1, \vec{e}^{(l)}\}$, связанные с репером l -волны соотношениями

$$\begin{aligned} \vec{e}_1^{(l)} &= \vec{e}_1 \cos \varphi^{(l)} - \vec{e}^{(l)} \sin \varphi^{(l)}, \\ \vec{e}_2^{(l)} &= \vec{e}_1 \sin \varphi^{(l)} + \vec{e}^{(l)} \cos \varphi^{(l)}, \\ \vec{e}_3^{(l)} &= \vec{e}_1 \times \vec{e}^{(l)} = \vec{e}_1^{(l)} \times \vec{e}_2^{(l)}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\cos \varphi^{(l)} = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1^{(l)}$. Вектор \vec{e} , однозначно определяется пересечениями системы фронтов двух волн, образующими решетку в плоскости $\{\vec{e}_1^{(1)}, \vec{e}_1^{(2)}\}$. Координаты точек пересечения фронтов даются системой уравнений вида

$$\phi^{(l)} = 2\pi \nu^{(l)}, \quad (18)$$

где $\nu^{(l)}$ - целые числа. Решение этой системы представляется в виде

$$\vec{x}_R = \sum_l \left(\frac{ct}{n} - \frac{c\alpha^{(l)}}{n\omega} + \frac{2\pi c\nu^{(l)}}{n\omega} \right) \frac{\vec{a}^{(l)}}{\vec{e}_1^{(l)} \cdot \vec{a}^{(l)}}, \quad (19)$$

где вектора обратной решетки $\vec{a}^{(l)}$ определены формулами

$$\vec{a}^{(1)} = \vec{e}_1^{(2)} \times \vec{e}_3, \quad \vec{a}^{(2)} = \vec{e}_1^{(1)} \times \vec{e}_3; \quad \vec{e}_3 = \frac{\vec{e}_1^{(1)} \times \vec{e}_1^{(2)}}{|\vec{e}_1^{(1)} \times \vec{e}_1^{(2)}|}. \quad (20)$$

Из (19) находим, что скорость $\vec{\beta}_R$ движения всех узлов решетки одинакова и равна

$$\vec{\beta}_R = \frac{d\vec{x}_R}{cdt} = \sum_l \frac{\vec{a}^{(l)}}{n \vec{e}_1^{(l)} \cdot \vec{a}^{(l)}} = \frac{\vec{e}_1^{(1)} + \vec{e}_1^{(2)}}{n(1 + \vec{e}_1^{(1)} \cdot \vec{e}_1^{(2)})}. \quad (21)$$

Направление этой скорости, естественно, отождествить с ортом \vec{e} , т.е. $\vec{\beta}_R = \beta_R \vec{e}$, где

$$\beta_R = \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{1 + \vec{e}_1^{(1)} \cdot \vec{e}_1^{(2)}}} = \frac{1}{n \cos \varphi}. \quad (22)$$

Уравнение движения частицы в поле суперпозиции двух волн имеет вид

$$\frac{d\vec{\beta}\chi}{d\tau} = \sum_l \left\{ -[\vec{e}_l (\sin\varphi + n\vec{e}^{(l)}\vec{\beta}) + \vec{e}^{(l)}(\cos\varphi - n\vec{e}_l\vec{\beta})] q_l^{(l)} \sin\phi_l^{(l)} + [\vec{e}_l \times \vec{e}^{(l)} - n\vec{\beta} \times (\vec{e}^{(l)}\cos\varphi + \vec{e}_l \sin\varphi)] q_l^{(l)} \cos\phi_l^{(l)} \right\}, \quad (23)$$

где $\tau = \omega t$, $q_{l,e}^{(l)} = \frac{e b_{l,2}}{mc\omega}$, $\varphi = \varphi^{(1)} = \varphi^{(2)}$

угол наклона направления распространения волны к скорости решетки. Умножая это уравнение на $\vec{\beta}_R - \vec{\beta}$, и учитывая, что производная фазы по времени равна

$$\frac{d\phi^{(l)}}{d\tau} = n\vec{e}_l^{(l)}\vec{\beta} - 1 \quad (24)$$

получим интеграл движения в виде

$$(\vec{\beta}_R \vec{\beta} - 1)\chi + \sum_l q_l^{(l)} \beta_R \sin\varphi \cos\phi_l^{(l)} = \text{const}. \quad (25)$$

Заметим, что волны, поляризованные перпендикулярно плоскости $(\vec{e}_l^{(l)}, \vec{e}_l)$ не дают вклада в этот интеграл.

2.2. Продольное движение в случае одинаковых амплитуд волн

Уравнения продольного движения получаются из (24,25) при $q_1^{(1)} = q_1^{(2)} = q$, $\vec{e}^{(1)}\vec{\beta} = 0$, $\alpha_1^{(1)} = \alpha$ в виде

$$\phi_1^{(1)} = \omega \left(\frac{n}{c} x \cos\varphi - t \right) + \alpha \equiv \psi. \quad (26)$$

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \beta/\beta_R - 1. \quad (27)$$

$$(\beta - 1/\beta_R)\chi + 2q \sin\varphi \cos\psi = \text{const}. \quad (28)$$

$$\frac{d\chi}{d\tau} = -2q\beta \sin\varphi \cdot \sin\psi. \quad (29)$$

Из (27) видно, что при $n\cos\varphi < 1$ решетка поля движется быстрее частицы. В случае обратного знака этого неравенства при $\chi < \chi_R$ частица отстает от решетки, а при $\chi > \chi_R$ опережает её. Очевидно, χ_R , согласно (22), имеет вид

$$\chi_R = \frac{n\cos\varphi}{\sqrt{n^2\cos^2\varphi - 1}} = \text{ch}\mu_R. \quad (30)$$

Эту формулу можно аналитически продолжить в область $n\cos\varphi < 1$ где $\mu_R \rightarrow \mu_R - i\pi/2$. Производя также замену $\chi = \text{ch}\mu$, получим вместо (28) связь между начальной энергией $\chi_0 = \text{ch}\mu_0$ и параметрами ускорителя n и φ в виде

$$\text{ch}(\mu - \mu_R) = 2q \sin\varphi \cdot \text{sh}\mu_R (\cos\psi - \cos\psi_0) + \text{ch}(\mu_0 - \mu_R). \quad (31)$$

Отметим важный частный случай этого уравнения, когда $n\cos\varphi = 1$ т.е. скорость решетки в точности равна скорости света. Здесь вместо (31) из (28) получается связь вида

$$e^{-\mu} = e^{-\mu_0} + 2q\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} (\cos\psi - \cos\psi_0). \quad (32)$$

Учитывая, что устойчивое ускорение возможно лишь при $-\frac{\pi}{2} < \psi < 0$, получим условие захвата частиц в режим неограниченного ускорения в виде

$$\mu_0 \geq -\ln 2q\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}. \quad (33)$$

Экспериментальная неопределенность параметров n и φ , а также искажения фронтов волны не позволяют реализовать строгое условие $\beta_R = 1$. Поэтому необходимо учитывать ограничения на энергию, вытекающие из условия (31).

Если $\beta_R > 1$, μ_R определяется формулой

$$\text{th } \mu_R = n \cos \varphi$$

из которой следует связь между экспериментальными неопределенностями Δn , $\Delta \varphi$ параметров n , φ и величиной μ_R вида

$$e^{-2\mu_R} \approx \frac{\Delta \varphi}{2} \sqrt{n^2 - 1} - \frac{\Delta n}{2n}. \quad (34)$$

В случае $\beta_R < 1$ знаки $\Delta \varphi$ и Δn меняются.

Из этого условия видно, что величина μ_R определяется точностью установки параметров n , φ . В свою очередь из (31) следует, что для конечных значений μ_R энергия частицы не может принимать сколь угодно большие значения.

Так, при $\beta_R > 1$ вместо (31) получим однопараметрическое семейство кривых на плоскости (μ, ψ) вида

$$\text{sh}(\mu - \mu_R) - 4\tilde{q}_1 \sin^2 \frac{\psi}{2} = K_1, \quad (35)$$

где параметр K_1 , -интеграл движения - принимает значения в интервале $[-\infty, \infty]$ и выражается через начальную энергию и фазу частицы в виде

$$K_1 = \text{sh}(\mu_0 - \mu_R) - 4\tilde{q}_1 \sin^2 \frac{\psi_0}{2} \quad (36)$$

тогда как \tilde{q}_1 определяется формулой

$$\tilde{q}_1 = q \sqrt{\text{ch}^2 \mu_R - n^2 \text{sh}^2 \mu_R} \quad (37)$$

Все кривые семейства имеют минимум при $\psi = 0$ и максимумы при $\psi = \pm \pi$ (см.рис.1), причем экстремальные значения μ определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \text{sh}(\mu_{\max} - \mu_R) &= K_1 + 4\tilde{q}_1, \\ \text{sh}(\mu_{\min} - \mu_R) &= K_1, \end{aligned} \quad (38)$$

и могут быть как положительными, так и отрицательными, последнее соответствует мало интересному случаю движения частиц навстречу волне

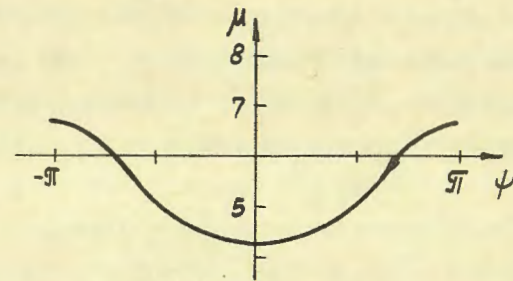


Рис.1 Стрелка на графике указывает направление смещения частицы во время движения ($q \sim 10^8$; $n \sim 1,1$; $\mu_R = 6$)

Если $\beta_R < 1$, соответствующее семейство кривых дается уравнением

$$\text{ch}(\mu - \mu_R) + 4\tilde{q}_2 \sin^2 \frac{\psi}{2} = K_2, \quad (39)$$

где K_2 определяется формулой

$$K_2 = \text{ch}(\mu_0 - \mu_R) + 4\tilde{q}_2 \sin^2 \frac{\psi_0}{2} \quad (40)$$

при

$$\tilde{q}_2 = q \sqrt{\beta h^2 \mu_R - \tilde{n}^2 c h^2 \mu_R} \quad (41)$$

Уравнение (39) не меняет своего вида не только при замене $\psi \rightarrow -\psi$, как (35), но и при $\mu \rightarrow 2\mu_R - \mu$, что означает симметрию семейства относительно линии $\mu = \mu_R$ (рис.2). Характер фазовых траекторий здесь существенно отличается от случая $\beta_R > 1$. Так при $K_2 > 1 + 4\tilde{q}_2$, частица скользит вдоль волн опережая или отставая от них по фазе в зависимости от величины начальной скорости $\beta_0 > \beta_R$ или $\beta_0 < \beta_R$, соответственно. Если $K_2 - 1 < 4\tilde{q}_2$ частицы захватываются волной в режим колебаний продольной фазы.

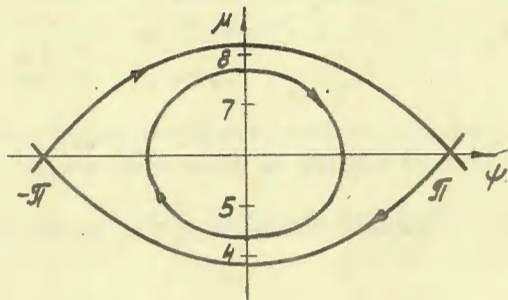


Рис.2 Стрелками отмечено смещение частиц во времени ($q \sim 10^{-2}$; $n \sim 1,1$; $\mu_R = 6$)

Частота Ω этих колебаний получается из (39) с учетом (27) при $\mu \rightarrow \mu_R$, $\psi \rightarrow 0$ в виде

$$\Omega = \omega \frac{\sqrt{8\tilde{q}_2}}{\beta h 2\mu_R}; \quad \lambda_\Omega = \lambda \frac{\beta h 2\mu_R}{\sqrt{8\tilde{q}_2}} \quad (42)$$

Интересно отметить, что при некоторых значениях параметров ускорителя длина волны λ_Ω излучения, индуцированного пучком электронов, захваченных в режим когерентных колебаний продольной фазы попадает в диапазон СВЧ. Например, при $\mu_R = 6$, $q = 10^{-2}$, $\lambda = 1,04 \mu$, $n = 1,3$ получается $\lambda_\Omega \approx 3,297 \text{ см}$. Регистрация этого излучения может оказаться наиболее точным способом измерения показателя преломления n во время прохождения лазерного импульса.

Параметр n , как следует из (34), должен контролироваться с высокой точностью. Так, при $\mu_R \sim 6$, ширина черенковского резонанса, как функции Δn , составляет всего $\frac{\Delta n}{n} \sim 10^{-5}$. С такой точностью надо поддерживать постоянство n , несмотря на радиационные изменения среды и влияние нелинейных эффектов лазерного излучения, если требуется получить максимальный темп ускорения частиц.

Максимальный прирост энергии определяется из (29) в виде

$$\gamma - \gamma_0 \approx 2q \frac{\omega}{c} D, \quad (43)$$

где D - поперечный размер усилителей. При $q \sim 10^{-2}$, $\lambda \sim 10^{-4} \text{ см}$, добавка к лоренц-фактору частицы составляет 1257 на каждый сантиметр фронта волны, т.е. темп ускорения $\sim 642 \text{ МэВ/см}$. Точная формула для вычисления энергии равновесной частицы получается интегрированием (29). Учитывая связь $dD = \frac{c}{\omega} \beta \sin \psi dt$ получим

$$2q \frac{\omega}{c} D = - \int_{\delta_0}^{\delta} \frac{d\delta}{\sin \psi} . \quad (44)$$

Зависимость $\sin \psi$ от $\gamma = ch \mu$ в случае $\beta_R > 1$ имеет вид

$$\sin \psi = \mp \left(1 - [\cos \psi_0 + (2\tilde{q}_2)^{-1} (\operatorname{sh}(\mu_0 - \mu_R) - \operatorname{sh}(\mu - \mu_R))]^2 \right)^{1/2} . \quad (45)$$

где знак (-) выбирается при $-\pi < \psi < 0$, знак (+) при $0 < \psi < \pi$. Для случая $\beta_R < 1$ аналогичная зависимость имеет вид

$$\sin \psi = \mp \left(1 - [\cos \psi_0 + (2\tilde{q}_2)^{-1} [\operatorname{ch}(\mu - \mu_R) - \operatorname{ch}(\mu_0 - \mu_R)]]^2 \right)^{1/2} \quad (46)$$

при тех же условиях выбора знака.

3. Устойчивость поперечных колебаний и учет асимметрии амплитуд волн

Если теория продольного движения частиц в лазерном ускорителе без учета рассеяния формально совпадает с аналогичной теорией линейных ускорителей традиционного типа, то устойчивость поперечных колебаний, которая будет рассматриваться в этом разделе, не имеет соответствующего аналога.

Представим амплитуды волн, поляризованных в плоскости $(\vec{e}_1^{(1)}, \vec{e}_1^{(2)})$ в виде

$$q_1^{(1)} = q(1 + \varepsilon), \quad q_1^{(2)} = q(1 - \varepsilon), \quad \varepsilon = \frac{q_1^{(1)} - q_1^{(2)}}{q_1^{(1)} + q_1^{(2)}}, \quad (47)$$

$$q = \frac{1}{2}(q_1^{(1)} + q_1^{(2)})$$

и перепишем уравнение (23) в виде

$$\frac{d\beta_1 \chi}{d\tau} = -2q \{ (\sin \varphi + \varepsilon n \beta_2) \sin \psi \cos \chi - (n \beta_2 + \varepsilon \sin \varphi) \cdot \cos \psi \sin \chi \} + n \beta_3 \cos \varphi (q_2^{(1)} \cos \phi_2^{(1)} - q_2^{(2)} \cos \phi_2^{(2)}), \quad (48)$$

$$\frac{d\beta_2 \chi}{d\tau} = -2q (n \beta_1 - \cos \varphi) (\cos \psi \sin \chi - \varepsilon \sin \psi \cos \chi) - n \beta_3 \sin \varphi (q_2^{(1)} \cos \phi_2^{(1)} + q_2^{(2)} \cos \phi_2^{(2)}), \quad (49)$$

$$\frac{d\beta_3 \chi}{d\tau} = (q_2^{(1)} \cos \phi_2^{(1)} - q_2^{(2)} \cos \phi_2^{(2)}) (1 - n \beta_1 \cos \varphi) + n \beta_2 \sin \varphi (q_2^{(1)} \cos \phi_2^{(1)} + q_2^{(2)} \cos \phi_2^{(2)}), \quad (50)$$

$$\text{где } \psi = \omega \left(\frac{n}{c} x \cos \varphi - t \right) + \frac{1}{2} (\alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)}), \quad (51)$$

$$\chi = \omega \frac{n}{c} y \sin \varphi + \frac{1}{2} (\alpha_1^{(2)} - \alpha_1^{(1)}) .$$

Из (48-50) следует также уравнение баланса энергии

$$\frac{d\chi}{d\tau} = -2q (\beta_1 \sin \varphi + \varepsilon \beta_2 \cos \varphi) \sin \psi \cos \chi + 2q (\varepsilon \beta_1 \sin \varphi + \beta_2 \cos \varphi) \cos \psi \sin \chi + \beta_3 (q_2^{(1)} \cos \phi_2^{(1)} - q_2^{(2)} \cos \phi_2^{(2)}) \quad (52)$$

и интеграл движения (25), который переписывается в виде

$$(\beta_R \beta_1 - 1) \gamma + 2q \beta_R \sin \psi (\cos \psi \cos \chi + \varepsilon \sin \psi \sin \chi) = \text{const.} \quad (53)$$

Проекция скорости β_1 и β_2 связаны с производными по времени продольной и поперечной фазы ψ и χ соотношениями вида

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \beta_1 / \beta_R - 1; \quad \frac{d\chi}{d\tau} = n \beta_2 \sin \psi. \quad (54)$$

В линейном по χ приближении коэффициент при χ в правой части уравнения (49) определяет устойчивость решения относительно малых поперечных отклонений частицы, так при $-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$ условие устойчивости имеет вид

$$\beta_1 \geq \frac{\cos \psi}{n}. \quad (55)$$

Заметим, что нерелятивистские частицы, которые рассматриваются в известном астрофизическом механизме ускорения вдоль нейтральной линии магнитного поля [3], неустойчивы.

При выполнении условия (55) решение линеаризованного уравнения (49) находится методом ВБК в виде

$$X(\tau) = c X_1(\tau) + \tilde{c} X_2(\tau) + (\gamma f)^{-1/2} \int_{\tau_0}^{\tau} P(\tau') \gamma^{-1/2}(\tau') f^{-1/2}(\tau') \sin \left(\int_{\tau'}^{\tau} f(\tau'') d\tau'' \right) d\tau', \quad (56)$$

где

$$X_{1,2}(t) = (\gamma f)^{-1/2} \exp \left\{ \pm i \int_{\tau_0}^{\tau} t(\tau') d\tau' \right\}, \quad (57)$$

$$f^2 = Q^2 - \frac{1}{2} f^{1/2} \frac{d}{d\tau} \left(f^{-3/2} \frac{df}{d\tau} \right), \quad (58)$$

$$Q^2 = \frac{2q}{\gamma} n \sin \psi (n \beta_1 - \cos \psi) \cos \psi + \left(\frac{1}{2\gamma} \frac{d\chi}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{2\gamma} \frac{d^2 \chi}{d\tau^2}. \quad (59)$$

$$P(\tau) = 2 \varepsilon q n \sin \psi (n \beta_1 - \cos \psi) \sin \psi - n^2 \beta_3 \sin^2 \psi (q_2^{(1)} \cos \phi_2^{(1)} + q_2^{(2)} \cos \phi_2^{(2)}). \quad (60)$$

Здесь функции γ , ψ , β_1 - вычисляются по формулам (27-29), которые соответствуют нулевому по χ и ε приближению. Метод ВБК применим, если второй член справа в (58), вычисленный при $f = Q$ много меньше Q^2 . Ограничиваясь минимальной степенью q в разложениях по q \dot{f} и \ddot{f} , получим это условие в виде

$$\cos \psi \gg \frac{q \sin \psi}{4\gamma} \left| \frac{\beta}{\beta_R} - 1 \right| \left(1 + \frac{\sin^2 \psi}{4} \right) \left(2\beta(n^2 - 1) + \frac{\beta \beta_R + \beta^2 - 2}{\beta_R} \right). \quad (61)$$

Если начальная энергия $\gamma_0 \sim 5$, то правая часть этого неравенства $\approx 10^{-4}$ при $q \sim 10^{-2}$, т.е. ВБК приближение справедливо почти во всей области изменения параметров движения, исключая точки $\psi = \pm \pi/2$, так как с увеличением энергии правая часть (61) быстро уменьшается.

3.1. Допустимая асимметрия амплитуд волн

Рассмотрим вопрос о величине допустимой асимметрии амплитуд ε . Пусть в начальный момент времени частица двигалась вдоль оси симметрии с начальной фазой $-\frac{\pi}{2} < \psi_0 < 0$ и энергией

γ_0 . Наличие асимметрии ε приводит к появлению поперечного отклонения $X(\tau)$. Согласно (56-61) это отклонение имеет вид

$$X(\tau) = \frac{\varepsilon}{(\gamma \cos \psi)^{1/4}} \left(\frac{n^2 - 1}{2q \sin \psi} \right)^{1/2} \int_{\gamma_0}^{\delta} \frac{d\gamma'}{(\gamma' \cos \psi')^{1/4}} \sin \left[\left(\frac{n^2 - 1}{2q \sin \psi} \right)^{1/2} \int_{\gamma'}^{\delta} \left(\frac{\cos \psi''}{\gamma''} \right)^{1/2} \frac{d\gamma''}{\sin \psi''} \right]. \quad (62)$$

Здесь интегрирование по времени заменено в силу (29) интегрированием по энергии и всюду, где это возможно принимается $\beta = \beta_R = 1$.

Так как энергия частицы почти не меняется на периоде колебаний поперечной фазы, удобно сделать замену переменной в (3.2.49) вида

$$\xi = \int_{\gamma'}^{\delta} \left(\frac{\cos \psi''}{\gamma''} \right)^{1/2} \frac{d\gamma''}{\sin \psi''}, \quad (63)$$

тогда вместо (62) получим для $X(\tau)$ следующее выражение

$$X(\tau) = \frac{\varepsilon \kappa}{(\gamma \cos \psi)^{1/4}} \int_0^{\xi_0} R(\xi) \sin(\kappa \xi) d\xi, \quad (64)$$

где

$$\kappa = \left(\frac{n^2 - 1}{2q \sin \psi} \right)^{1/2}; R(\xi) = \frac{\gamma^{1/4} \sin \psi'}{(\cos \psi')^{3/4}}; R(0) = \frac{\gamma^{1/4} \sin \psi}{\cos^{3/4} \psi}; \quad (65)$$

$$R(\xi_0) = \frac{\gamma_0^{1/4} \sin \psi_0}{\cos^{3/4} \psi_0} \quad \xi_0 = - \int_{\gamma_0}^{\delta} \left(\frac{\cos \psi'}{\gamma'} \right)^{1/2} \frac{d\gamma'}{\sin \psi'}$$

Если рассматривать продольное движение в интервале $\gamma_{\min} < \gamma < \gamma_{\max}$, где $\gamma_{\max}, \gamma_{\min}$ определяются формулами (38), (39), то можно показать, что в комплексной плоскости ξ величина γ' ограничена по модулю неравенством

$$|\gamma'| < \exp \left\{ \left(\frac{1/\beta_R - 1}{2q \sin \psi} \right)^{1/2} \gamma_m \xi \right\} \quad (66)$$

и контур интегрирования можно деформировать так, что (64) примет вид

$$X(\tau) = \frac{\varepsilon \kappa}{(\gamma \cos \psi)^{1/4}} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [R(is) - e^{i\kappa \xi_0} R(\xi_0 + is)] e^{-\kappa s} ds + \text{к.с.} \right\}. \quad (67)$$

Видно, что разложение функции $R(\xi)$ в ряд Тейлора дает $X(\tau)$ в виде асимптотического ряда по $1/\kappa \sim q^{1/2}$

$$X(\tau) = \frac{\varepsilon}{(\gamma \cos \psi)^{1/4}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\kappa^{2m}} \left\{ R^{(2m)}(0) - R^{(2m)}(\xi_0) \cos \kappa \xi_0 + R^{(2m+1)}(\xi_0) \frac{\sin \kappa \xi_0}{\kappa} \right\}. \quad (68)$$

Условие медленного изменения функции $R(\xi)$ на периоде колебаний продольной фазы имеет вид

$$8q \gamma^3 \sin \psi \cdot (n^2 - 1) \gg \left(1 + \frac{1}{4} \cos^2 \psi \right)^2 \sin^2 \psi \cdot \cos^3 \psi. \quad (69)$$

Если это условие выполняется во всем рассматриваемом диапазоне энергий и фаз, то поперечное отклонение, вызванное асимметрией амплитуды, согласно (68) имеет вид

$$X(\tau) = \varepsilon \left(\text{tg} \psi - \left(\frac{\gamma_0}{\gamma} \right)^{1/4} \left(\frac{\cos \psi_0}{\cos \psi} \right)^{1/4} \text{tg} \psi_0 \cos \kappa \xi_0 \right). \quad (70)$$

Заметим, что при $\psi, \psi_0 \ll 1$ вычисление (62) дает такой

же результат, как и учет члена $\sim \frac{1}{K}$ в (68), поэтому более общий результат, справедливый при условии (69), в котором правая часть заменяется на единицу (хотя по-прежнему рассматривается область $-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$) имеет вид

$$\chi(\tau) = \varepsilon \left\{ \operatorname{tg} \psi - \left(\frac{\delta_0 \cos \psi_0}{\gamma \cos \psi} \right)^{1/4} \operatorname{tg} \psi_0 \cos K \xi_0 + \frac{R^{(1)}(\xi_0)}{(\gamma \cos \psi)^{1/4}} \frac{\sin K \xi_0}{K} \right\}, \quad (71)$$

где

$$R^{(1)}(\xi_0) = \left(\frac{\delta_0}{\cos \psi_0} \right)^{1/2} \left[\frac{\sin^2 \psi_0}{4(\gamma_0 \cos \psi_0)^{3/4}} + \frac{\delta_0^{1/4} (1 - \beta_R)}{2q \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi_0} \left(\frac{\sin \psi_0}{\cos^{3/4} \psi_0} \right) \right]. \quad (72)$$

Для определения допустимой величины ε , очевидно, необходимо вычислить поправку к максимально достижимой энергии для какого-нибудь характерного частного случая движения. В качестве такого пробного варианта выберем случай $\beta_R < 1$, $\psi_0 = 0$, и предположим, что частица захватывается в режим колебаний продольной фазы, тогда (см. рис. 3) в конечном состоянии, т.е. при $\psi = 0$, получается поправка к энергии вида

$$\mu = 2\mu_R - \mu_0 - \varepsilon^2 \frac{\operatorname{sh}(\mu_R - \mu_0)}{2(n^2 - 1) \operatorname{sh} \mu_R \cdot (\operatorname{ch} \mu_0 \operatorname{ch} \mu)^{1/2}} \quad (73)$$

здесь опущены члены более высокого порядка по $1/\gamma$. Видно, что конечная энергия мало чувствительна к асимметрии волн.

Выпишем также аналог формулы (39) для этого частного случая, (т.е. при $\beta_R < 1$)

$$\operatorname{ch}(\mu - \mu_R) + 4\tilde{q}_2 \sin^2 \frac{\psi}{2} = \operatorname{ch}(\mu_R - \mu_0) + \varepsilon^2 G(\psi, \mu), \quad (74)$$

где

$$G(\psi, \mu) = \tilde{q}_2 \frac{\sin^2 \psi}{\cos \psi} - \frac{\operatorname{sh}^2(\mu_R - \mu_0) \cdot \cos^{1/2} \psi}{2(n^2 - 1) \operatorname{sh} \mu_R (\operatorname{ch} \mu_0 \operatorname{ch} \mu)^{1/2}} - \frac{\operatorname{sh}^2(\mu - \mu_R)}{2(n^2 - 1) \operatorname{sh} \mu_R \cdot \operatorname{ch} \mu \cdot \cos^3 \psi} + \frac{\operatorname{sh}^2(\mu - \mu_R) \cdot \operatorname{ch}^{3/4} \mu_0 \cdot \cos K \xi_0}{(n^2 - 1) \operatorname{sh} \mu_R \cdot \operatorname{ch}^{3/4} \mu \cdot \cos^{3/4} \psi}.$$

Последний член в этом выражении содержит быстро осциллирующий множитель и большую степень $1/\gamma$. Он выписан, в основном, для удовлетворения начального условия $G(0, \mu_0) = 0$. Первый и третий члены сильно искажают фазовые траектории при $\psi \rightarrow \pm \pi/2$, что приводит к уменьшению фазового объема захваченного пучка. Внутри области устойчивости зависимость от фазы ψ можно не учитывать и тогда оценка допустимой асимметрии получается из условия $\varepsilon^2 / G \ll 1$ или

$$\varepsilon^2 \frac{\operatorname{sh}^2(\mu_R - \mu_0)}{2(n^2 - 1) \operatorname{sh} \mu_R \cdot \operatorname{ch} \mu_0} \ll 1, \quad (76)$$

При $\mu_R \sim 6$, $\gamma_0 \sim 5$, $n^2 - 1 \sim 0.2$ требуется удерживать асимметрию амплитуд на уровне нескольких процентов, т.е. $\varepsilon \sim 0.01 - 0.1$.

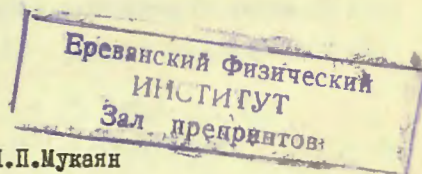
Характеристики выходных пучков ускорителя будут даны в следующей работе.

В заключение я хочу поблагодарить А.Ц.Аматуни, В.М.Арутюняна и М.Л.Петросяна за стимулирующие обсуждения и интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.А.Нагорский, М.Л.Петросян. Препринт ЕФИ-154(76).
2. Г.А.Нагорский. Препринт ЕФИ-165(76)
3. R.Spetsler, Journ.Geophys.Research, 70, 1717(1965), 70, 4215(1965).

Рукопись поступила 13-го июня 1978 г.



Редактор Л.П.Мукаян
Тех.редактор А.С.Абрамян

Заказ 382

ВФ-03432

Тираж 299

Подписано к печати 6/Х-78г. Формат издания 60x84/16

1,5 уч.изд.л. Ц. 10 к.

Издано Отделом научно-технической информации
Ереванского физического института, Ереван 36, пер.Маркаряна 2