

*Тренировка*

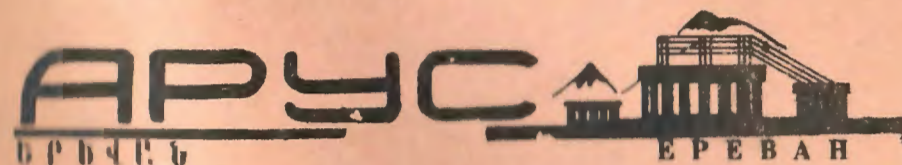
индекс 3624

ԵՐԵՎԱՆԻ ԲՐԶՐԿԵՐ ԲՐԶՐԿԵՐ ԲՆՕՏՐՏՈՒՑ  
ԵՐԵՎԱՆՍԿԻ ԳԻՅՇԵՍԿԻ ԻՆՏԻՒԼԵՏ

ЕФИ-329(54)-78

Л. А. АНАНОВА, В. Ц. НИКОГОСЯН, Х. А. СИМОНЯН,  
А. Р. ТУМАНЯН

ОБ ИЗМЕРЕНИИ ЧАСТОТ БЕТАТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ  
МЕТОДОМ РЕЗОНАНСНОГО РАЗРУШЕНИЯ ПУЧКА В  
СИНХРОТРОНЕ.



1978

Возможность использования эффекта резонансного разрушения ускоряемого в синхротроне пучка под действием высокочастотного магнитного (электрического) поля для экспериментального определения частоты бетатронных колебаний  $Q$  рассмотрена в работах [1 - 5].

Однако, экспериментальные данные, полученные на Ереванском синхротроне не согласуются с теоретическими предсказаниями, в частности, работы [1].

Так, например, в этих экспериментах всегда существует некое значение  $(f_n/f_0)_{\text{опт}}$ , при котором потери пучка при заданном  $\hat{F}$  на стенках вакуумной камеры - наибольшие, а при отклонении  $f_n/f_0$  от этой величины в ту или в иную сторону потери уменьшается. Такое поведение пучка невозможно объяснить на основе теории работы [1].

Эту несогласованность можно объяснить по-видимому тем, что в работе [1] не учтены следующие обстоятельства. Во-первых, в реальном синхротроне каждая частица пучка на данном обороте ( $n$ ) имеет свою бетатронную квази-частоту  $Q_k$ , изменение которой от оборота к обороту можно записать в виде:

$$Q_k = Q_k^c + \delta \hat{Q} \cos \left[ 2\pi \frac{f_c}{f_0} (k-1) + \xi \right], \quad (1)$$

здесь  $Q_k^c$  - частота бетатронных колебаний синхронной частицы на "к" - том обороте после начала действия возмущения (1)  $f_c/f_0$  - частота синхротронных колебаний в единицах частоты обращения частицы в синхротроне, параметр  $\xi$  характеризует частицу по значению её квази-частоты в момент начала действия возмущения ( $k=1$ ),  $\delta \hat{Q}$  - допустимый (для данного ускорителя) разброс по частотам, обязанный допустимому разбросу по импульсам  $(\Delta P/P_0)_{\text{доп}}$ , т.е.

$$\delta \hat{Q}/Q^c \approx (\Delta P/P_0)_{\text{доп}}. \quad (2)$$

Во-вторых, в реальном синхротроне частота синхронной частицы  $Q_k^c$  изменится в течение времени действия возмущения, по крайней мере, линейно со временем, т.е.

$$Q_k^c = Q_0 + \Delta \cdot (k - k_0). \quad (3)$$

Иными словами, если для реального синхротрона существуют резонансы, возникающие как и в [1] при условии

$$Q_0 \pm \frac{f_n}{f_0} = N \text{ (целое)}, \quad (4)$$

то из (4) следует, что в отличие от случая  $Q^c = \text{const}$ , здесь будет наблюдаться явление прохождения через резонанс и, тем самым, амплитуда вынужденных колебаний окажется ограниченной при безграничном увеличении времени действия возмущения.

Приведенные соображения указывают на то, что применимость метода резонансного разрушения пучка для определения бетатрон-

ной частоты в реальном синхротроне, должна быть обоснована, т.е.

1. Необходимо доказать, что и в реальном синхротроне, когда каждая частица пучка имеет свою квази-частоту бетатронных колебаний  $Q_k$ , изменяющуюся по закону

$$Q_k = Q_0 + \Delta \cdot (k - k_0) + \delta \hat{Q} \cos \left[ 2\pi \frac{f_c}{f_0} (k-1) + \xi \right], \quad (5)$$

существуют "резонансные" условия, типа (4).

2. Установить методику нахождения "истинного" значения  $(f_n/f_0)_{\text{опт}}$ , при котором наблюдается резонансный рост амплитуды вынужденных колебаний.

3. Установить какому моменту "к" соответствует "измеренная" частота  $Q^c = Q_0$ , определяемая из условия

$$Q_0 = N + (f_n/f_0)_{\text{опт}}. \quad (6)$$

В связи с этим, в настоящей работе проводится детальный анализ динамики пучка в реальном синхротроне под действием возмущающего вч магнитного поля, расположенного на малом прямолинейном участке кольца синхротрона.

Уравнения поперечного движения частиц в синхротроне с жесткой фокусировкой при наличии возмущения магнитного поля  $\Delta H(x)$  по соответствующей степени свободы, в общем случае, можно записать в виде:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k_y(x) \cdot y = \varepsilon \frac{\Delta H(x)}{H_0} + \delta \cdot \left( 1 - \frac{v/v_0(x)}{E(+)} \right). \quad (7)$$

где  $y=r, z$ ;  $z$  - отклонение частиц по вертикали от медианной плоскости (плоскости орбиты),  $r$  - отклонение по радиусу от координатной кривой (равновесной орбиты) длиной  $L$ , состоящей из дуг постоянного радиуса  $\rho$  внутри магнитных блоков кольца и отрезков прямых - между блоками;

$x$  - координата вдоль этой кривой, отсчитываемая от некоторой начальной точки  $x=s=0$  и пробегающая значения  $x = s + (k-1) \cdot L$ , где  $s$  изменяется в интервале  $0 \leq s \leq L$ ;  $k$  - номер оборота частицы,  $H_0$  - напряжённость ведущего поля на координатной кривой, а

$$\epsilon, \delta = \begin{cases} -1; 1 & \text{при } y=r \\ +1; 0 & \text{при } y=z \end{cases}$$

Функции  $h_y(x)$  имеют вид:

$$\begin{aligned} h_r(x) &= \frac{1}{\rho z} + \frac{eG(x)}{E(x)}, \\ h_z(x) &= -\frac{eG(x)}{E(x)}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $G(x) = \left( \frac{\partial H_z}{\partial r} \right)_{r=0}$  - градиент магнитного поля синхротрона.

Для синхронных частиц большой энергии ( $v \approx c$ ) имеем  $E_0(x) = e H_0(x) \cdot \rho$ , а в идеальном синхротроне отношение  $G(x)/H_0(x)$  не зависит от номера оборота частиц. Поэтому для таких частиц

$$h_y^c(x) = h_y^c(s) \quad (9)$$

и для синхротронов с жесткой фокусировкой  $h_y^c(s)$  являются периодическими функциями с периодом  $\ell$  градиента  $G$  магнитного поля, т.е.

$$h_y^c(s + \ell) = h_y^c(s). \quad (10)$$

В этом случае общее решение уравнения (I) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} y(x) &= \beta_{y_0}^{1/2}(x) [a_{y_0} \cos \psi_{y_0}(x) + b_{y_0} \sin \psi_{y_0}(x)] + \\ &+ \epsilon \beta_{y_0}^{1/2}(x) \int_0^x F_y(t) \beta_{y_0}^{1/2}(t) \sin[\psi_{y_0}(x) - \psi_{y_0}(t)] dt, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $F_y(x) = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta H(x)}{H_0}$ , а  $\beta_{y_0}$  и

$$\psi_{y_0} = \int_0^x \frac{dt}{\beta_{y_0}(t)}$$

известные [6] амплитудная и фазовая функции, обладающие свойствами

$$\beta_{y_0}(x) = \beta_{y_0}(s) = \beta_{y_0}(s + k \cdot \ell), \quad (12)$$

$$\psi_{y_0}(x) = \psi(s) + (k-1) \cdot 2\pi Q_{y_0},$$

где  $Q_{y_0} = \int_s^{s+\ell} ds / \beta_{y_0}(s)$  - число бетатронных колебаний синхронных частиц на одном обороте.  $a_{y_0}$  и  $b_{y_0}$  - произвольные постоянные, связанные с начальными значениями  $y(0) = y_n$  и  $\frac{dy(0)}{dx} = y_n'$ .

В дальнейшем, для удобства, введены параметры  $A$  и  $\gamma$  по формулам:

$$a_{y_0} = \frac{A_y}{(\beta_{y_0}^{1/2})_{\max}} \cos \chi_{y_0}; \quad b_{y_0} = \frac{A_y}{(\beta_{y_0}^{1/2})_{\max}} \sin \chi_{y_0}. \quad (13)$$

Тогда, если за начальную точку  $S = 0$  принять точку, где

$$\beta_{y_0}(s) = (\beta_{y_0})_{\max}; \quad \frac{d\beta_{y_0}(s)}{ds} = \beta'_{y_0}(0) = 0,$$

то  $A_{y_0}$  будет определять максимально возможное отклонение частицы от орбиты (или плоскости орбиты) при отсутствии возмущения ( $F(x) = 0$ ).

Параметры  $A_{y_0}$  и  $\chi_{y_0}$  связаны с начальными условиями соотношениями:

$$A_{y_0} = \sqrt{y_H^2 + (y'_H)^2} \cdot (\beta_{y_0})_{\max}, \quad (14)$$

$$\chi_{y_0} = \arctg(y'_H (\beta_{y_0})_{\max} / y_H).$$

Индекс "0" означает, что рассматривается синхронная частица в идеальном синхротроне.

В случае, когда возмущение  $F(x)$  локализовано на малом участке кольца, скажем в интервале  $[S_1, S_2]$  ( $\Delta S = S_2 - S_1 \ll L$ ) и не зависит в этом интервале от  $S$ , а от оборота к обороту изменяется по какому-то закону. т.е.

$$F(x) = \begin{cases} F_k & \text{при } S_1 + (k-1)L \leq x \leq S_2 + (k-1)L \\ 0 & \text{вне этого интервала} \end{cases} \quad (15)$$

то решение (II), на азимуте  $S > S_2$  после  $(k-1)$ -го прохождения

частицей возмущенного участка, можно записать в виде:

$$\psi(s, k) \Big|_{S > S_2} = \left( \frac{\beta_0(s)}{\beta_{0, \max}} \right)^{1/2} \cdot A \cdot \cos [\psi_0(s) + 2\pi Q_0 (k-1) - \chi] + \varepsilon \beta_0^{1/2}(s) \sum_{m=0}^{k-1} F_{k-m} \sin [\psi_0(s) + 2\pi Q_0 \cdot m - \alpha], \quad (16)$$

где введены обозначения

$$J_0 = \sqrt{(J_0^c)^2 + (J_0^s)^2},$$

$$J_0^{c,s} = \int_{S_1}^{S_2} \beta_0^{1/2}(t) \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} \psi_0(t) dt, \quad (17)$$

$$\alpha_0 = \arctg(J_0^s / J_0^c)$$

и опущен индекс "y". При выводе (16) использованы свойства (12) и обозначения (14) и (15).

В случае  $\Delta S \ll L$  можно использовать для расчетов приближенные значения

$$J_0 \approx \beta_0^{1/2}(S_B) \cdot \Delta S, \quad (18)$$

$$\alpha_0 \approx \psi_0(S_B),$$

где  $S_B$  - координата середины участка  $[S_1, S_2]$ .

Заметим, что решение (16) с одной стороны определяет положение синхронной частицы с начальными условиями  $(A, \chi)$  на азимуте  $S$  на "к"-ом обороте, а с другой стороны для согласованного пучка - положение частиц по сечению пучка в азимутальной плоскости  $S > S_2$ , отличающихся друг от друга значениями  $A$  и  $\chi$ . При этом частица с  $A = 0$  является "центральной" частицей

пучка. Следовательно, вынужденное решение уравнения (7), описываемое вторым членом в (16), характеризует одновременно движение центральной частицы пучка.

Рассмотрим теперь движение несинхронной ( $E = E_0 + \Delta E$ ) частицы в идеальном синхротроне. Для этого достаточно в уравнении (7) подразумевать

$$h_y(x) = h_y^c(s) / (1 + \frac{\Delta P(x)}{P_0}) = h_y^k(s).$$

Поскольку изменения  $\frac{\Delta P}{P_0}$  происходят с частотой синхротронных колебаний, период которых много больше времени обращения частицы, то можно считать, что изменения  $\frac{\Delta P}{P_0}$  (а следовательно и функций  $h_y$ ) происходят скачком от оборота к обороту, а в течение каждого оборота его значения не изменяются. При этом сохраняется периодичность по  $S$ , т.е.  $h_y^k(s+l) = h_y^k(s)$ .

Аналогичные рассуждения верны и для "реального" синхротрона, в котором за время действия возмущения отношение  $\frac{G(x)}{H_0(x)}$  меняется настолько медленно, что в течение одного оборота этими изменениями можно пренебречь, считая что они происходят только от оборота к обороту. Оба эти случая описываются одинаковым образом,

Поэтому для нахождения вынужденного решения уравнения (7) в случае несинхронной частицы в "реальном" синхротроне, представим  $h(x)$  в виде

$$h_y(x) = h_y^k(s) = h_y^0(s) + \Delta h_y(s, k). \quad (19)$$

Тогда на каждом "к"-ом обороте пучка уравнения (7) примут вид:

$$y_k''(s) + h_y^k(s) y(s) = \varepsilon F_k + \delta \frac{1}{\rho} \left( \frac{\Delta P}{P_0} \right)_k. \quad (20)$$

Сделаем замену

$$y_k = Y_k(s) + \eta_k(s) \left( \frac{\Delta P}{P_0} \right)_k, \quad (21)$$

где  $\eta_k(s)$  есть, замкнутое на периоде градиента поля, частное решение уравнения

$$\eta_k'' + h^k(s) \eta_k = \delta \cdot \frac{1}{\rho} \left( \frac{\Delta P}{P_0} \right)_k \quad (22)$$

(для  $Z$  - колебаний это решение равно нулю)

Тогда, для  $Y_k(s)$  получим уравнение

$$Y_k''(s) + h_y^k(s) Y(s) = \varepsilon F_{yk} \quad (23)$$

Для каждого "к"-ого оборота можно найти свои  $\beta_k(s), \psi_k(s)$  функции и изменения  $\Delta Q_k$  по формулам:

$$\begin{aligned} \beta(s) &= \beta_0(s) + \Delta \beta_k(s) \\ \psi_k(s) &= \int_0^s \frac{ds}{\beta_k(s)}; \quad Q_k = Q_0 + \Delta Q_k, \end{aligned} \quad (24)$$

где [7]

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \beta_k(s)}{\beta_0(s)} &= \frac{1}{2 \sin \pi Q_0} \int_0^L \beta_0(t) \Delta h(k, t) \cos [2(\pi Q_0 - |\psi_0(t) - \psi_0(s)|)] dt \\ \Delta Q_k &= \frac{1}{4\pi} \int_0^L \beta_0(t) \Delta h(k, t) dt, \end{aligned} \quad (25)$$

причем

$$\psi_k(s+L) = \psi_k(s) + 2\pi Q_k \quad (26)$$

(здесь и далее мы опускаем индекс "у".)

Решение (23) на каждом обороте можно записать в виде, аналогичном (11):

$$Y_K(s) = \beta_K^{1/2}(s) [a_K \cos \psi_K(s) + b_K \sin \psi_K(s)] + \varepsilon \beta_K^{1/2}(s) \int_0^s F_K(t) \beta_K^{1/2}(t) \sin[\psi_K(s) - \psi_K(t)] dt, \quad (27)$$

где  $a_K$  и  $b_K$  связаны с начальными, для "к"-ого оборота, значениями  $Y(s)$  и  $Y'(s)$ .

Используя условия "сшивки" решений в точке  $s=0$  (в которой  $\beta_K(0) = \beta_{K \max}$ )

$$\begin{aligned} Y_{K-1}(L) &= Y_K(0) \\ Y'_{K-1}(L) &= Y'_K(0) \end{aligned} \quad (28)$$

при возмущении вида (15), получим следующие рекуррентные формулы:

$$\begin{pmatrix} Y_K(s) \\ Y'_K(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi_K(s); \beta_K(s) \sin \psi_K(s) \\ -\beta_K^{-1}(s) \sin \psi_K(s); \cos \psi_K(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -J_K^s F_K \beta_K^{1/2}(s) + Y_{K-1}(L) \beta_K^{-1/2}(0) \beta_K^{1/2}(s) \\ J_K^c F_K \beta_K^{-1/2}(s) + Y'_{K-1}(L) \beta_K^{1/2}(0) \beta_K^{-1/2}(s) \end{pmatrix} \quad (29)$$

$$\begin{pmatrix} Y_K(L) \\ Y'_K(L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi_K(L); \beta_{K \max} \sin \psi_K(L) \\ -\beta_{K \max}^{-1} \sin \psi_K(L); \cos \psi_K(L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -J_K^s F_K \beta_{K \max}^{1/2} + Y_{K-1}(L) \\ J_K^c F_K \beta_{K \max}^{-1/2} + Y'_{K-1}(L) \end{pmatrix}, \quad (30)$$

где введены обозначения

$$J_K^{c,s} = \int_{s_1}^{s_2} \beta_K^{1/2}(t) \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} \psi_K(t) dt \quad (31)$$

В приближении  $\beta_{K \max} \approx \beta_{(K-1) \max}$  (для Ереванского синхротрона имеем  $\left(\frac{\beta_K}{\beta_{K-1}}\right)_{\max} = 1 + 5 \cdot 10^{-7}$ ), формулы (30) можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} Y_K(L) \\ Y'_K(L) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^K \begin{pmatrix} \cos \sum_{m=j}^K \psi_m(L); \beta_{j \max} \sin \sum_{m=j}^K \psi_m(L) \\ -\beta_{j \max}^{-1} \sin \sum_{m=j}^K \psi_m(L); \cos \sum_{m=j}^K \psi_m(L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -J_j^s F_j \beta_{j \max}^{1/2} \\ J_j^c F_j \beta_{j \max}^{-1/2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \sum_{m=1}^K \psi_m(L); \beta_{K \max} \sin \sum_{m=1}^K \psi_m(L) \\ -\beta_{K \max}^{-1} \sin \sum_{m=1}^K \psi_m(L); \cos \sum_{m=1}^K \psi_m(L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_H \\ Y'_H \end{pmatrix}, \quad (32)$$

где  $Y_H = Y_H(0)$ ;  $Y'_H = Y'_H(0)$  начальные значения  $Y$ ,  $Y'$  в точке  $s=0$  в момент начала действия возмущения вида (15).

Не теряя общности рассуждений положим, что точка  $s=0$  является серединой возмущенного участка  $\Delta s$ . Тогда

$$J_K^c \approx \beta_{K \max}^{1/2} \Delta s; \quad J_K^s = 0.$$

Учитывая малость величин  $\left(\frac{\Delta \beta_K}{\beta_0}\right)_{\max} \ll 1$  (для Ереванского синхротрона  $\left(\frac{\Delta \beta_K}{\beta_0}\right)_{\max} = 0,0265$ ), имеем

$$J_K^c \approx J_0^c \approx \beta_{0 \max}^{1/2} \Delta s. \quad (33)$$

Теперь, переобозначая индексы суммирования, из (32) получим:

$$Y_k(L) = \beta_{o\max} \Delta S \sum_{n=1}^k F_{k-n+1} \sin \sum_{q=0}^{n-1} \psi_{k-q+1}(L) + A \cos \left[ \sum_{m=1}^k \psi_m(L) - \gamma \right]$$

$$Y'_k(L) = \Delta S \cdot \sum_{n=1}^k F_{k-n+1} \cos \sum_{q=0}^{n-1} \psi_{k-q+1}(L) - A \beta_{o\max}^{-1} \sin \left[ \sum_{m=1}^k \psi_m(L) - \gamma \right] \quad (34)$$

Формулы (35) определяют отклонение траектории частицы и её угол к орбите в точке  $S = 0$  в конце "к"-ого оборота после начала действия возмущения, проходя возмущенный участок (к-1) раз.

Для определения  $Y_k(S)$  и  $Y'_k(S)$  в других точках  $S$  на "к"-ом обороте, достаточно подставить в (29) значения (34).

Рассмотрим теперь конкретное возмущение, а именно вида

$$F_k = \hat{F} \cos \left[ 2\pi \frac{f_n}{f_0} (k-1) + \xi \right] ; \quad (35)$$

где  $\hat{F}$  - амплитуда,  $f_n$  - частота возмущения,  $f_0 \approx \frac{c}{L}$  - частота обращения частицы в кольце синхротрона,  $\xi$  - фаза в.ч. поля в момент первого (к=1) прохождения частицей возмущенного участка  $[S_1, S_2]$

Тогда, изменение частоты  $Q_k$  несинхронной частицы в "реальном" синхротроне за время действия возмущения можно представить в виде (см. (5)):

$$Q_k = Q_0 + \Delta \cdot (k - k_0) + \delta Q \cos \left[ 2\pi \frac{f_c}{f_0} (k-1) + \xi \right]$$

здесь "к" - номер оборота после начала действия возмущения, "к-1" - число совершенных частицей оборотов,  $Q_0$  - значение бетатронной частоты синхронной частицы в момент  $k_0$ ,  $f_c/f_0$  - частота синхротронных колебаний в единицах частоты обращения частицы, которая полагается постоянной за время действия возмущения,  $\delta Q$  - допускаемый разброс по частотам, определяемый с хорошей точностью из соотношения

$$\frac{\delta Q}{Q_0} \approx \varepsilon \left( \frac{\Delta P}{P_0} \right)_{q_{оп}} ,$$

где  $(\Delta P/P_0)_{q_{оп}}$  - допустимый для данного синхротрона разброс частиц по импульсам (для Ереванского синхротрона  $\frac{\delta Q}{Q_0} = 116 \varepsilon \left( \frac{\Delta P}{P_0} \right)_{q_{оп}}$ ). Фаза  $\xi$  характеризует значение квази-частоты  $Q$  в момент включения возмущения. Физический смысл параметра  $\xi$  заключается в том, что он отражает тот факт, что разные частицы пучка в момент включения возмущения имеют разные значения квази-частоты  $Q$  в пределах (при  $\Delta = 0$ )

$$Q_0 - \delta Q \leq Q \leq Q_0 + \delta Q .$$

Иными словами, параметр  $\xi$  характеризует частицу по значению её квази-частоты.

Величина  $\Delta$  имеет смысл скорости изменения  $(\Delta = \frac{dQ}{dk})$  частоты синхронной частицы при изменениях отношения  $G/H_0$  в течение времени действия возмущения.

Подставляя (5) и (35) в (34), а также учитывая, что по определению  $\psi_k(L) = 2\pi Q_k$ , получим:

$$Y_k(L) = A \cos \left[ 2\pi Q_0 k + V(k) - \gamma + 4\pi q \sin \left( \pi k \frac{f_c}{f_0} \right) \cos \left( \pi \frac{f_c}{f_0} (k-1) + \zeta \right) \right] +$$

$$+ \varepsilon B_{\max} \left\{ U_-(k) \cdot \sin[\alpha_-(k) + \beta_-(k)] + U_+(k) \sin[\alpha_+(k) + \beta_+(k)] \right\}$$

$$Y'_k(L) = -A \beta_{\max}^{-1} \sin \left[ 2\pi Q_0 k + V(k) - \gamma + \right. \quad (36)$$

$$\left. + 4\pi q \sin \left( \pi k \frac{f_c}{f_0} \right) \cos \left( \pi \frac{f_c}{f_0} (k-1) + \zeta \right) \right] +$$

$$+ \varepsilon B_{\max} \left\{ U_-(k) \cos[\alpha_-(k) + \beta_-(k)] + U_+(k) \cos[\alpha_+(k) + \beta_+(k)] \right\},$$

где введены обозначения:

$$U_{\pm}(k) = \sqrt{\left[ \sum_{n=1}^k \sin \beta_{\pm}(k, n) \right]^2 + \left[ \sum_{n=1}^k \cos \beta_{\pm}(k, n) \right]^2}$$

$$\beta_{\pm}(k) = \operatorname{arctg} \frac{\sum_{n=1}^k \sin \beta_{\pm}(k, n)}{\sum_{n=1}^k \cos \beta_{\pm}(k, n)}$$

$$\beta_{\pm}(k, n) = 2\pi \left\{ \left( Q_0 \pm \frac{f_H}{f_0} \right) n + \frac{\Delta \cdot n}{2} [2(k - k_0) - n + 3] - q \sin \left[ 2\pi \frac{f_c}{f_0} (k - n + 0,5) + \zeta \right] \right\}$$

$$\alpha_{\pm}(k) = \mp \left[ 2\pi \frac{f_H}{f_0} k + \xi \right] + 2\pi q \sin \left[ 2\pi \frac{f_c}{f_0} (k + 0,5) + \zeta \right] \quad (37)$$

$$V(k) = \pi \cdot k \cdot \Delta (k - 2k_0 + 1)$$

$$B_{\max} = \beta_{\max} \cdot \frac{\Delta S}{2} \cdot \hat{F}$$

$$q = \frac{\hat{\Delta S}}{2 \sin \pi \frac{f_c}{f_0}}$$

Поскольку поведение частиц на других азимутах  $S$  отличается, в основном, лишь на величину  $[\beta(S)/\beta_{\max}]^{1/2}$  (см. (29)), то, не теряя общности рассуждений, исследование в дальнейшем проводится только для точки  $S = 0$ .

Рассмотрим несколько примеров.

а). Поведение синхронной частицы в идеальном синхротроне.

Подставляя в (37)  $\Delta = \hat{\Delta S} = 0$ , получим для функций  $U_{\pm}(k)$

$\beta_{\pm}(k)$  и  $\alpha_{\pm}(k)$  выражения:

$$U_{\pm}(k) = \left| \frac{\sin \pi k \left( Q_0 \pm \frac{f_H}{f_0} \right)}{\sin \pi \left( k \pm \frac{f_H}{f_0} \right)} \right|$$

$$\beta_{\pm}(k) = \pi (k+1) \left( \omega_0 \pm \frac{f_H}{f_0} \right)$$

$$\alpha_{\pm}(k) = \mp \left( 2\pi \frac{f_H}{f_0} k + \xi \right) \quad (37a)$$

Откуда следует, что, если частота  $f_H$  выбрана так, чтобы выполнялись условия

$$Q_0 \pm f_H/f_0 = N \quad (N - \text{целое}) \quad (38)$$

то имеем:

$$U_{\mp}(k) = \begin{cases} k \\ \left| \frac{\sin(k 2\pi f_H/f_0)}{\sin(2\pi f_H/f_0)} \right| \end{cases}$$

$$\text{при } Q_0 + \frac{f_H}{f_0} = N \quad (39)$$

$$\text{при } Q_0 - \frac{f_H}{f_0} = N$$

$$b_{\pm}(k) = \begin{cases} \pi(k+1)N & \text{при } Q_{\mp} = \frac{f_H}{f_0} = N \\ \pi(k+1)(N \mp 2\frac{f_H}{f_0}) & \text{при } Q_{\circ} = \frac{f_H}{f_0} N \end{cases} \quad (40)$$

Очевидно, что при  $k \gg 1/\sin(2\pi f_H/f_0)$  одним из членов в фигурных скобках в (36) можно пренебречь по отношению к другому, в зависимости от того, какое из условий (38) выполняется. Другими словами, при одном из условий (38) отклонение частицы ( $A, \chi$ ) в точке  $S=0$ , на "к"-ом обороте после включения возмущения, можно записать в виде:

$$Y(k) \approx A \cos[2\pi Q_{\circ} \cdot k - \chi] + \varepsilon(-1)^{N(k+1)} B_{\max} \cdot k \cdot \sin[2\pi \frac{f_H}{f_0} k + \xi] \quad (41)$$

Отсюда видно, что функция  $|Y(k)|$  является растущей по "к" функцией. И, поскольку частицы в ускорителе движутся в ограниченном стенками вакуумной камеры объеме, то при выполнении одного из условий (38) будут наблюдаться потери частиц на стенках камеры, по мере того, как отклонения частиц  $|Y(k)|$  будут достигать значения  $d$  - полуширины (полувысоты) камеры.

Из условия

$$|Y(k)| = d \quad (42)$$

можно найти связь между амплитудой возмущения  $\hat{F}$  и необходимым временем действия возмущения  $\hat{h}_{\max}$  для обеспечения полного разрушения пучка на стенках камеры. Очевидно, что первыми

достигнут стенок камеры те частицы, для которых имеет место условие

$$A_{\max} + B_{\max} \cdot k_1 = d \quad (43)$$

и последними - те частицы, для которых

$$B_{\max} \cdot k_2 - A_{\max} = d, \quad (44)$$

где  $2A_{\max}$  - характеризует поперечный размер пучка.

Таким образом, условие (44) является условием полного разрушения пучка синхронных частиц на стенках вакуумной камеры в идеальном синхротроне. Из (44) получим:

$$\frac{\Delta H}{H_0} = \frac{2(d+A) \rho}{B_{\max} \Delta S \cdot k_{\text{раз}}} \quad (45)$$

(Здесь и далее допускается, что  $\frac{\Delta H}{H_0} = \text{const}$  за время действия возмущения). Этот результат совпадает с выводом работы [1] лишь с той разницей, что в последней рассматривалась только центральная частица пучка ( $A=0$ ).

Из (45) следует, что разрушения пучка можно добиться при помощи сколь угодно малого возмущения за счет простого увеличения времени его действия. При этом, из условий (38) следует, что такое разрушение должно иметь место при двух значениях частот ,

$$f_H^{(1)} + f_H^{(2)} = f_0 \quad (46)$$

Тогда частота  $Q_0$  может быть определена однозначно из соотношения

$$Q_0 = N + \frac{f_H^{(1)}}{f_0} \quad (47)$$

где  $N$  - меньшее значение целого числа, ближайшего к  $Q_0$ .

Экспериментальный подбор частоты  $f_H$  при измерениях может быть осуществлен с некоторой погрешностью, т.е. условие (38), с учетом этого, должно быть записано в виде:

$$Q_0 \pm \frac{f_H}{f_0} = N + \delta \quad (38a)$$

Это приводит к следующим видоизменениям функций (39) и (40)

$$U_{\mp}(k) = \begin{cases} \left| \frac{\sin \delta \pi k}{\sin \pi \delta} \right| \text{ при } Q_0 \mp \frac{f_H}{f_0} = N + \delta \\ \left| \frac{\sin k \pi (2 \frac{f_H}{f_0} + \delta)}{\sin \pi (2 \frac{f_H}{f_0} + \delta)} \right| \text{ при } Q_0 \pm \frac{f_H}{f_0} = N + \delta \end{cases} \quad (39a)$$

$$\phi_{\mp}(k) = \begin{cases} \pi(k-1)(N+\delta) \text{ при } Q_0 \mp \frac{f_H}{f_0} = N + \delta \\ \pi(k-1)(N \mp 2 \frac{f_H}{f_0} + \delta) \text{ при } Q_0 \pm \frac{f_H}{f_0} = N + \delta \end{cases} \quad (40a)$$

Как видно из (39a), функции  $U_{\mp}(k)$  в этом случае остаются ограниченными в своем росте ( $[U_{\mp}(k)]_{\max} = 1/\sin \pi \delta$ )

при неограниченном возрастании "k". На рис. I, в качестве примера, приведены функции  $U_{-}(k)$  для двух значений  $\delta$  ( $\delta = 0,01$  и  $\delta = 0,0012$ ). Очевидно, что необходимое минимальное значение амплитуды возмущающего поля для полного разрушения пучка определяется из условия

$$B_{\max} [U_{-}(k)]_{\max} - A_{\max} = d \quad (44a)$$

При этом время действия возмущения  $K_g$  должно удовлетворять условию

$$K_g \geq \frac{1}{2\delta}$$

В этом случае частота  $Q_0$  определяется с ошибкой  $\delta$ , которая может быть оценена из условия  $\delta = \frac{1}{2K_{\text{раз}}}$ , где  $K_{\text{раз}}$  - число оборотов пучка с момента включения возмущения до момента начала потерь частиц на стенках вакуумной камеры.

б). Поведение синхронной частицы в "реальном" синхротроне.

Рассмотрим теперь случай, когда за время действия возмущения, частота  $Q_c$  синхронных частиц изменяется по закону

$$Q_c = Q_0 + \Delta (K - K_0) \quad (48)$$

здесь  $Q_0$  - значение  $Q_c$  в момент  $K_0$ . Учитывая это и подставляя в (37)  $\hat{\delta} Q = 0$  не получится простых выражений для функций  $U_{\pm}(k)$ . Однако, проведя численные расчеты на ЭВМ, можно убедиться, что и в этом случае, при одном из условий

$$Q_0 \pm \frac{f_H}{f_0} = N$$

одна из функций  $U_{\pm}(k)$  оказывается много больше другой (в зависимости от того, какое из условий (38) выполняется).

На рис. I представлены результаты расчетов для случая

$$Q_0 - \frac{f_H}{f_0} = N (= 5)$$

для двух значений  $\Delta$  ( $\Delta = 2 \cdot 10^{-4}$ ,  $\Delta = 3 \cdot 10^{-5}$ ) и двух значений  $K_0$  ( $K_0 = 1$ ,  $K_0 = 250$ ) в течение  $K_{max} = 500$  оборотов действия возмущения. Там же для сравнения приведена функция  $U(K)$  для первого случая а).

Наличие четко выраженных максимумов у этих функций указывает на то, что в этом случае время действия возмущения и минимальное значение амплитуды возмущения строго определены и зависят они как от величины скорости изменения ( $\Delta = \frac{dQ}{dK}$ ) частоты бетатронных колебаний, так и от численного значения  $K_0$ . Кроме того, необходимое время возмущения ( $K_{кр}$ ) также зависит от численных значений величин  $\Delta$  и  $K_0$  (см. рис. 1).

Очевидно, что разрушение пучка, осуществляемое при минимальных (для данного  $\Delta$ )  $F_{min}$  значениях, происходит при наибольшем значении функций  $U(K_{кр}, K_0)$ , и, тем самым, из условия

$$Q_0 = N + f_H/f_0$$

всегда определяется частота  $Q_0$  в точке  $K_0$ , значение которой, как показывают расчеты, составляет (см. рис. 2)

$$K_0 \approx K_{кр}/2 \quad (49)$$

Обычно при экспериментальных измерениях правильность представления частоты  $(f_H)_{опт}$  определяется из условия, что при отклонении от этой величины в ту или иную сторону наблюдаемые потери частиц уменьшаются. Это происходит по той причине, что при изменении  $f_H$  разрушение пучка осуществляется при других

значениях  $K_0$ , для которых функция  $[U(K_{кр}, K_0)]_{max}$  меньше чем при  $K_0 = (K_0)_{опт}$  т.е.

$$U(K_{кр}^{(1)}, K_0) \leq U(K_{кр}^{(1)}, (K_0)_{опт}) \quad (50)$$

На рис. 2 приведены графики зависимости  $U(K_{кр}, K_0)$  от  $K_0$  для трех значений  $\Delta$  ( $\Delta = 3 \cdot 10^{-5}$ ,  $4 \cdot 10^{-5}$ ,  $5 \cdot 10^{-5}$ ). Там же показаны соответствующие значения  $U(K_{кр}, K_0^{опт})$

Как и следовало ожидать, при меньших значениях  $\Delta$  величины  $U(K_{кр}, K_0^{опт})$  больше. При этом и значение  $K_{кр}$  больше.

Условие полного (частичного) разрушения пучка, в рассматриваемом случае, на стенках камеры запишется в виде:

$$B_{max} [U(K_{кр}, K_0^{опт})] = d + A \quad (51)$$

причем

$$A = \begin{cases} A_{max} & \text{при полном разрушении} \\ A < A_{max} & \text{при частичном разрушении} \end{cases}$$

в). Поведение несинхронных частиц в идеальном синхротроне.

Рассмотрим теперь несинхронную частицу в идеальном синхротроне, т.е. допустим, что частота  $Q_c = Q_0$  синхронной частицы в таком синхротроне остается постоянной за время действия возмущения. Для этого достаточно подставить в (37)  $\Delta = 0$ .

Результаты расчетов на ЭВМ показывают, что и в этом случае при одном из условий (38) одна из функций  $U(K)$  при  $K > 100$  оказывается много больше другой. Эти результаты, при  $Q_0 = \frac{f_H}{f_0} = N$

(=5), ( $\xi = \zeta = 0$ ) и различных значениях  $q$  приведены в виде графиков на рис.3. Для сравнения там же приведена кривая  $U_-(K)$  для случая а).

Результаты расчетов также показывают, что значения функций  $U_-(K, \xi, \zeta)$  несущественно отличаются от значений  $U_-(K, 0, 0)$  и поэтому они не приведены на рис.3.

Если проводить сравнение со случаем а), то можно заметить, что и здесь наблюдается бесконечный рост  $U_-(K)$  с увеличением "к", но в случае в), "прямая" а) оказывается "модулированной" с частотой синхротронных колебаний и, кроме того (что более существенно), наклон кривой к оси времени (или числу оборотов) оказывается существенно зависящим только от величины параметра  $q$ .

На рис.3 приведены графики функций  $U_-(K)$  для различных значений параметра  $q$ , соответствующих различным значениям  $\frac{f_c}{f_0}$  и при одном и том же значении  $\delta Q$  ( $= 0,026$ ). Там же, для сравнения, приведены две кривые (сплошная и пунктирная), соответствующие такой паре параметров  $\frac{f_c}{f_0}$  и  $\delta Q$ , которые дают одни и те же значения параметра  $q$  ( $= 0,207$ ). Эти кривые подтверждают, что поведение функций  $U_-(K)$  зависит только от величины параметра  $q$ .

Если воспользоваться малостью величины  $\pi \frac{f_c}{f_0} < 1$  (для Ереванского синхротрона диапазон изменения  $f_c/f_0$  по циклу ускорения составляет  $0,04 + 0,0095$ ), то разложив  $\sin \pi \frac{f_c}{f_0}$  в ряд до кубических членов, из уравнения для сепаратрисы фазовых колебаний [6], для параметров  $q$  получим выражение:

$$q = \frac{Q_0}{h d \pi} \sqrt{1 - \phi_s \operatorname{ctg} \phi_s} \left[ 1 + \left( \pi \frac{f_c}{f_0} \right)^2 / 6 \right]. \quad (52)$$

Откуда следует, что значение  $q$  слабо зависит от изменяющегося по циклу ускорения параметра  $f_c/f_0$ .

Иными словами, можно считать, что в течение цикла ускорения параметр  $q$  для данного ускорителя ( $Q_0, h, \alpha, \phi_s = \text{const}$ ) остается постоянным, а его величина зависит от значений  $h$  - кратности радиочастоты,  $\alpha$  - коэффициента уплотнения орбиты,  $\phi_s$  - равновесной фазы ускоряющего поля, изменяющегося по закону

$$V = V_{в.ч} \cos \phi. \quad (53)$$

На рис.4 и 5 представлены графики функций  $U_-(K)$  (кривые в) для значений параметров  $q$  при двух значениях равновесной фазы ( $\phi_s = 28,2^\circ$  и  $\phi_s = 45,0^\circ$ ) для случая Ереванского синхротрона с параметрами  $h = 96$ ,  $\alpha = 0,04$ ,  $Q_0 = 5,25$ .

Из рис.3 видно, что в разных ускорителях (т.е. для разных значений  $q$ ), наклон кривых  $U_-(K)$  к оси времени разный, причем этот наклон уменьшается с увеличением значения параметра  $q$ . Это означает, что при одном и том же значении амплитуды возмущающего поля (значении  $V_{max}$ ), необходимые для разрушения пучка времена действия возмущения могут существенно отличаться друг от друга для различных ускорителей.

При этом, как и в случае а), нет никаких ограничений на величину  $\Delta H$ ; т.е. разрушение пучка можно осуществить при любых значениях (достаточно малых) амплитуды возмущающего поля.

г). Поведение несинхронной частицы в реальном синхротроне.

Рассмотрим, наконец, процесс разрушения несинхронных частиц в реальном синхротроне, т.е. когда квази-частота бетатронных колебаний частиц изменяется по закону (5).

На рис.4 и 5 представлены результаты расчетов на ЭВМ при условии  $Q_0 - \frac{f_H}{f_0} = \text{целое } (=5)$  и для значений параметра  $\Delta = 2 \cdot 10^{-5}$  и  $3 \cdot 10^{-5}$ , при которых, за время действия возмущения ( $K_{\max} = 500$ ) видны четко выраженные максимумы функций  $U(K)$ , а также их поведение при  $K > K_{кр}$  где

$$U_-(K_{кр}) = [U_-(K)]_{\max} \quad (54)$$

(Заметим, что и здесь, как и в предыдущих случаях,

$$U_+(K) \ll U_-(K).$$

Кроме того, заметна слабая зависимость  $U_-(K)$  от  $f_c/f_0$  (см.рис.4).

Из сравнения рис.4 и 5 видно, что величины  $U_-(K)$  зависят от параметра  $q$ , а именно:

$$U_-(K, q_1) > U_-(K, q_2) \quad (55)$$

при  $q_1 < q_2$ .

Далее, из тех же рисунков следует, что всегда

$$U_-(K_{кр}, K_0 = 1) < U_-(K_{кр}, K_0 = 250). \quad (56)$$

Проводя аналогично пункту б) расчеты, легко убедиться, что в этом случае имеет место неравенство

$$U_-(K_{кр}, K_0) / \overset{6)}{=} \leq U_-(K_{кр}, K_0) / \overset{6)}{=} \quad (57)$$

причем, знак равенства соответствует предельному значению

$$q = 0.$$

Резюмируя все вышеприведенное, можно утверждать, что в случае изменения частоты синхронной частицы в течение времени действия возмущения, разрушение пучка, при минимальных значениях амплитуды возмущающего поля и при  $\frac{f_H}{f_0} = \left(\frac{f_H}{f_0}\right)_{\text{онт}}$ , происходит в соответствии с законом изменения одной из функций

$U_{\mp}(K_{кр}, K_0^{\text{онт}}, q, \Delta)$ . Поэтому, наиболее общее условие разрушения пучка при  $Q_0 - \left(\frac{f_H}{f_0}\right)_{\text{онт}} = N$  принимает вид:

$$B_{\max} \cdot U_-(K_{кр}, K_0^{\text{онт}}, q, \Delta) = d + A, \quad (58)$$

причем  $A = \begin{cases} A_{\max} & \text{при полном разрушении} \\ A < A_{\max} & \text{при частичном разрушении} \end{cases}$

Здесь  $K_{кр}$  - минимально необходимое время действия возмущения, а  $K_0^{\text{онт}}$  - момент, при котором определяется, по формуле  $Q_0 = N + \left(\frac{f_H}{f_0}\right)_{\text{онт}}$ , значение частоты  $Q_c$  синхронной частицы. При этом, параметры  $q$ ,  $\Delta$  - характеризуют только данный синхротрон.

В заключение перечислим основные выводы проведенной работы, которые в неявном виде содержатся в формуле (58).

I. Поведение синхронных и несинхронных частиц, при условии, что частота  $Q_c = Q_0 = \cos \delta t$  за время действия возмущения, существенно могут отличаться друг от друга, если параметр  $q$  сильно отличается от значения  $q = 0$ .

Это отличие сказывается лишь в том, что при одном и том же значении амплитуды возмущающего поля для несинхронных частиц требуется больше времени для достижения стенок вакуумной камеры, по сравнению с тем же временем для синхронной частицы.

2. Поведение частиц при резонансном разрушении пучка существенно зависит от численного значения скорости изменения частоты  $Q_c$  синхронной частицы за время действия возмущения.

В отличие от случая  $Q_c = \text{const}$ , огибающая отклонений частиц, при резонансных условиях  $Q_0 \pm f_n/f_0 = N$ , имеет конечный максимум при неограниченном увеличении времени действия возмущения. При этом, максимум достигается в момент  $K = K_{кр}$ .

Численное значение  $K_{кр}$  зависит от скорости изменения ( $\Delta$ ) бетатронной частоты, а численные значения  $U(K_{кр})$  зависят от параметров  $q$  и  $\Delta$ .

3. По наблюдениям потерь частиц на стенках вакуумной камеры (либо изменение центра тяжести пучка) при минимальных значениях амплитуды возмущающего поля, всегда можно определить значение  $Q_0$  в момент  $K_0^{opt}$ , которая составляет

$$K_0^{opt} \approx K_{кр} / 2$$

При этом, экспериментальный подбор частоты  $(f_n/f_0)_{opt}$  возмущающего поля существенно облегчается благодаря существованию значения функции  $U(K_{кр}, K_0^{opt})$ , численное значение которой наибольшее из всех других значений  $U(K_{кр}, K_0)$  т.е.

$$U(K_{кр}, K_0) < U(K_{кр}, K_0^{opt})$$

Для точного определения значения  $K_{кр}$  необходимо производить полное разрушение пучка с тем, чтобы по моментам начала разрушения ( $K_1$ ) и конца его ( $K_2$ ) вычислить  $K_{кр} \approx (K_1 + K_2)/2$  и тем самым найти значение  $K_0 \approx (K_1 + K_2)/4$ , в котором  $Q^c = Q_0$ .

4. Мощность возмущающего вч поля, необходимого для полного разрушения пучка, зависит от поперечных размеров разрушаемого пучка (см. формулу (58)).

5. Изменение значения  $H_0$  за время действия возмущения не вносит существенных изменений (см. рис. I) в поведение частиц в резонансных условиях.

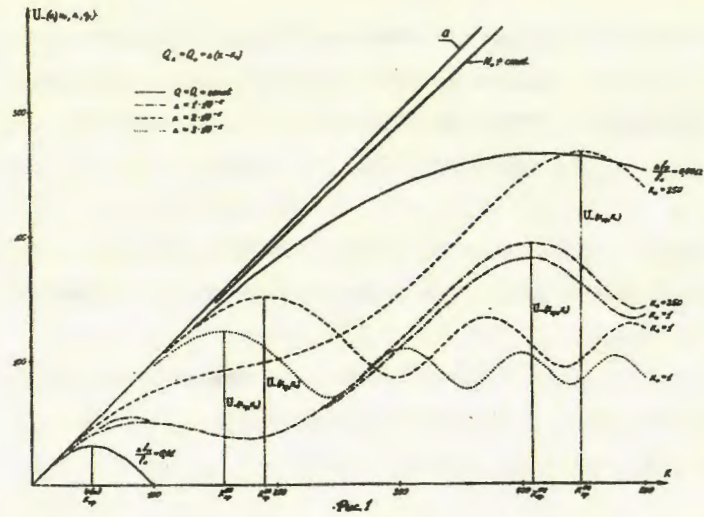


Рис.1

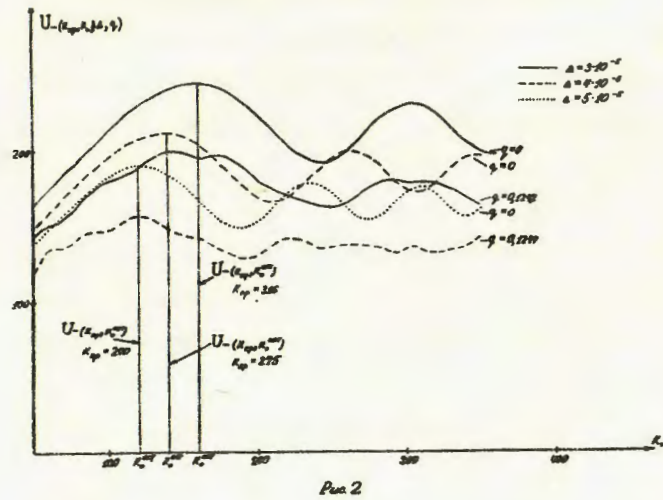


Рис.2

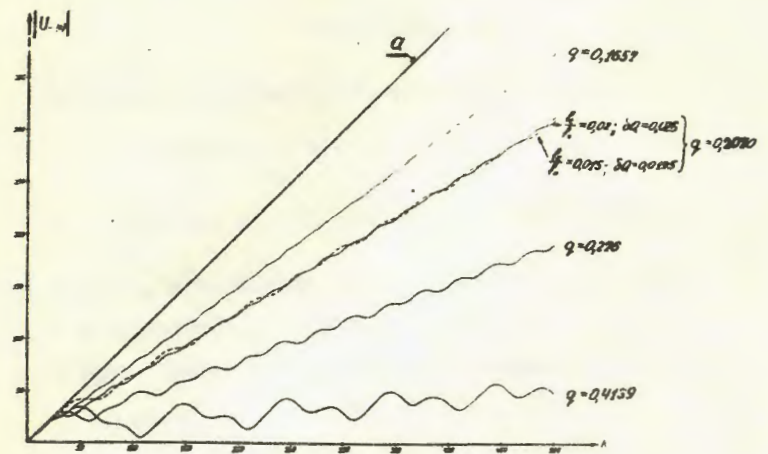
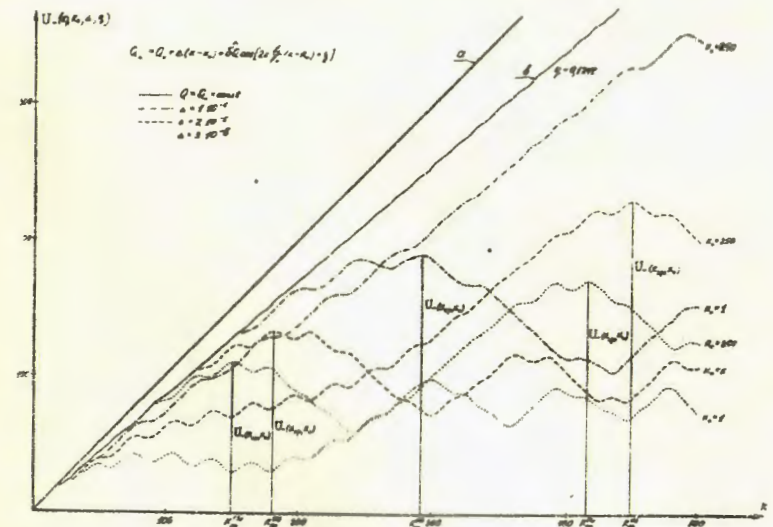


Рис.3



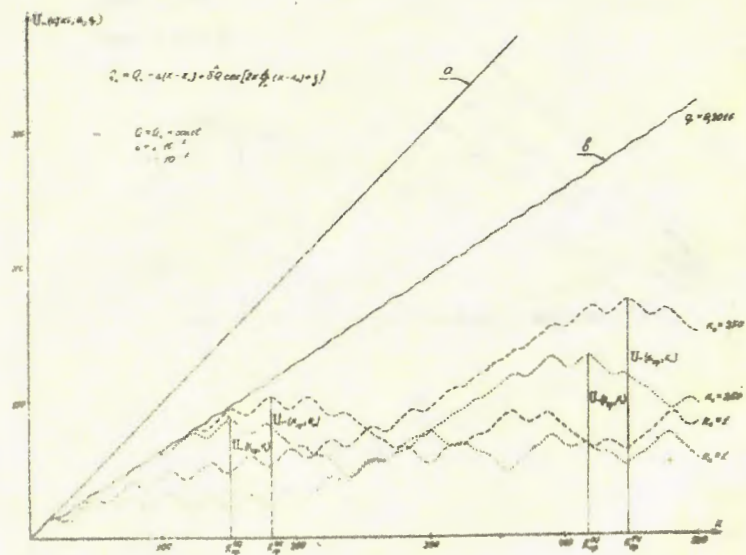


Рис. 5

ЛИТЕРАТУРА

1. С.К.Есин. Изв.АН Арм.ССР, Физика, 3, 1968.
2. С.L. Hammer et al., Rev.Sci. Instr. V.26, 6, 1955.
3. F.T. Cole and et al., Rev.Sci.Instr. V.28, 6, 1957.
4. Э.А.Мяз, В.А.Обозный. ПТЭ, 6, 1962.
5. А.А.Журавлёв и др. ЖТФ, 32, 8, 1962.
6. Г.Брук. Циклические ускорители, Атомиздат, М., 1965.
7. G.Guignard, CERN 77-10, ISR, 1977.

Рукопись поступила 8-го августа 1978 г.

Ереванский Физический  
ИНСТИТУТ  
Зал препринтов

Редактор Л.П.Мукаян  
Тех. редактор А.С.Абрамян

Заказ 410                      ВФ-03479                      Тираж 299

---

Подписано к печати 2/XI-78 г.      Формат издания 60x84/16

2.0 уч. изд. л. Ц. 14 к.

---

Издано Отделом научно-технической информации  
Ереванского физического института, Ереван-36, пер.Маркаряна 2