

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЕФИ-387(45)-79

С.Г.АРУТЮНЯН

ОДНОВРЕМЕННАЯ КАРТИНА ПОЛЯ ВБЛИЗИ
ДВИЖУЩЕЙСЯ ПО КРУГУ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОЙ
ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ

ԵՐԵՎԱՆ 1979 ԵՐԵՎԱՆ

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЕФИ-387(45)-79

С. Г. АРУТЮНЯН

ОДНОВРЕМЕННАЯ КАРТИНА ПОЛЯ В БЛИЗИ ДВИЖУЩЕЙСЯ ПО
КРУГУ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ

Ереван 1979

© *Ереванский физический институт, 1979*

I. Уравнение запаздывания

Электрические и магнитные поля, создаваемые частицей, определяются по формулам Лиенара-Вихерта. Одновременную картину полей в заданный момент времени t_0 можно получить, зная решение уравнения запаздывания.

Свяжем с частицей радиус-вектор $\vec{r}_0(t)$, с точкой наблюдения радиус-вектор \vec{r} . Тогда уравнение, определяющее запаздывающий момент времени t , имеет вид

$$(\vec{r} - \vec{r}_0(t_0))^2 = c^2 (t_0 - t)^2, \quad (1)$$

Уравнение (1) для любых траекторий $\vec{r}_0(t)$ обладает ровно двумя действительными корнями. Решение $t < t_0$ соответствует запаздыванию [1].

Траекторию движения частицы удобно рассматривать относительно соприкасающейся к траектории в момент t_0 окружности, радиуса R . Действительно, если сдвигаться от точки $\vec{r}_0(t_0)$ по траектории и по соприкасающейся окружности на длину ds , то отклонение между соответствующими точками траектории и окружности будет иметь третий порядок малости по сравнению с ds^2 .

Введем цилиндрическую систему координат $(\rho + R; \theta, z)$ с осью Z проходящей через центр соприкасающейся окружности, отсчитывая угол θ от точки $\vec{r}_0(t_0)$ в направлении скорости частицы. Орты этой системы обозначим как $\vec{e}_1(\theta), \vec{e}_2(\theta), \vec{e}_3$ где $\vec{e}_1(\theta)$ - направление вдоль радиуса, $\vec{e}_2(\theta)$ - вдоль скорости частицы в момент времени t_0 . Полагая, что начала радиус-векторов \vec{r} и $\vec{r}_0(t)$ совпадают с точкой эволюты траектории, соответствующей точке $\vec{r}_0(t_0)$, запишем их в виде

$$\vec{r} = R(1+\delta)\vec{e}_1(\phi) + Rz\vec{e}_3 \quad (2)$$

$$\vec{r}_0(t) = R(1+a(t))\vec{e}_1(\Omega(t-t_0) + \int_{t_0}^t \omega(t)dt) + Rh(t)\vec{e}_3 \quad (3)$$

где $\Omega = \beta c/R$, βc - скорость частицы, функции $a(t)$ и $h(t)$ характеризуют радиальное и вертикальное отклонения от соприкасающейся окружности, $\omega(t)$ связана с $a(t)$ и $h(t)$ соотношением:

$$\omega(t) = \sqrt{\Omega^2 - a'(t)^2 - h'(t)^2} / (1+a(t)) - \Omega \quad (4)$$

Штрих означает дифференцирование по времени. Функции $a(t), h(t), \omega(t)$ таковы, что в точке t_0 они сами и первые две их производные по времени обращаются в нуль.

Уравнение запаздывания (I) при этом переписывается в виде

$$\frac{c^2}{R^2}(t-t_0)^2 = (1+\delta)^2 + (1+a(t))^2 - 2(1+\delta)(1+a(t)) \cdot \cos(\phi - \Omega(t-t_0) - \int_{t_0}^t \omega(t)dt) + (z-h(t))^2 \quad (5)$$

Специфика ускорительных задач состоит в том, что интерес представляют поля на расстояниях от частицы порядка поперечных размеров пучка, т.е. на расстояниях много меньших радиуса кривизны R .

При этом

$$\delta \ll 1, \quad \frac{t}{T} \ll 1, \quad z \ll 1. \quad (6)$$

Такие условия, очевидно, соответствуют малым, по сравнению с периодом обращения частицы, значениям величины $t - t_0$, когда все функции неизвестного времени t можно разлагать по $t - t_0$. Удобно перейти к неизвестной χ по формуле

$$\phi - \Omega(t - t_0) = 2\chi. \quad (7)$$

Тогда разложения функций $a(t), h(t), \int_{t_0}^t \omega(t) dt$ имеют вид

$$a(t) = \frac{(\phi - 2\chi)^3}{\Omega^3} \left(\frac{a_0'''}{6} + \frac{a_0^{iv}}{24} \frac{(\phi - 2\chi)}{\Omega} + \dots \right), \quad (8)$$

$$h(t) = \frac{(\phi - 2\chi)^3}{\Omega^3} \left(\frac{h_0'''}{6} + \frac{h_0^{iv}}{24} \frac{(\phi - 2\chi)}{\Omega} + \dots \right), \quad (9)$$

$$\int_{t_0}^t \omega(t) dt = -\frac{a_0'''}{24} \frac{(\phi - 2\chi)^4}{\Omega^3} - \left[\frac{a_0'''}{40\Omega^6} + \frac{h_0'''}{120\Omega^4} \right] (\phi - 2\chi)^5, \quad (10)$$

где индекс нуль означает, что производные по времени берутся в момент времени t_0 .

Разлагая далее $\cos(2\chi - \int_{t_0}^t \omega(t) dt)$ в уравнении (5) по ϕ и

χ , а также $\epsilon^2/(\Omega^2 R^2)$ по χ^{-2} , получим, в результате уравнение относительно χ вида:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{4} \phi^2 - \frac{3}{4} (\delta^2 + z^2) - 3\chi\phi + 3\chi^2(\chi^{-2} - \delta) + \chi^4, \\ & + \frac{3}{4} \chi^{-2} (\delta^2 + z^2) + 3\delta\chi^{-2}\chi^2 + \delta\chi^4 - \chi^{-2}\chi^4 - \frac{2}{15} \chi^6 - \\ & - 2\chi^3 \left(z \frac{h_0'''}{\Omega^3} + \delta \frac{a_0'''}{\Omega^3} \right) - 2\chi^5 \frac{a_0'''}{\Omega^3} + \dots = 0. \end{aligned} \quad (II)$$

Это уравнение можно решать методом последовательных приближений.

Учитывая условие (6), можно заметить, что в уравнении (II) существенны первые пять членов. Анализ дискриминанта уравнения четвертого порядка, соответствующего этим членам, показывает, что в нулевом приближении можно пренебречь также членом $(3/4)\phi^2$. Следовательно, для определения нулевого приближения χ_0 получим уравнение вида

$$\chi_0^4 + 3(\chi_0^{-2} - \delta)\chi_0^2 - 3\phi\chi_0 - \frac{3}{4}(\delta^2 + z^2) = 0. \quad (I2)$$

Заметим, что это уравнение не зависит от функций $a(t)$, $h(t)$, $\omega(t)$

Можно показать, что дискриминант Q уравнения (I2), равный

$$Q = \left[\chi^{-2} (2\delta - \chi^{-2}) + z^2 \right]^3 + \frac{1}{4} \left[(2\delta - \chi^{-2})^2 - 6z^2(\chi^{-2} - \delta) - 9\phi^2\chi^{-6} \right]^2, \quad (I3)$$

строго положителен для любых δ, ϕ, z , не равных нулю одно-

временно.

Используя положительность Q , можно убедиться в том, что уравнение (12) имеет ровно два действительных корня разных знаков, не обращающихся в нуль одновременно, за исключением точки с координатами $(R, 0, 0)$, и сохраняющих знаки во всем пространстве δ, ϕ, z [3]. Положительно также выражение $4\chi_0^3 + 6\chi_0(\chi^{-2} - \delta) - 3\phi$. Здесь под χ_0 подразумевается положительный корень уравнения (12) соответствующий запаздыванию и равный:

$$\chi_0 = \frac{1}{2} [\varepsilon \sqrt{t_1} + 2 \operatorname{Re} \sqrt{t_2}], \quad (14)$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \phi > 0 \\ -1, & \phi < 0 \end{cases}$$

$$t_1 = A_+ + A_- + 2(\delta - \gamma^{-2}),$$

$$t_2 = -\frac{1}{2}(A_+ + A_-) + 2(\delta - \gamma^{-2}) - \frac{i\sqrt{3}}{2}(A_+ - A_-),$$

$$A_{\pm} = \left[\frac{1}{2}(\gamma^{-6} + 9\phi^2 + 6z^2(\gamma^{-2} - \delta)) - (2\delta - \gamma^{-2})^3 \pm \sqrt{Q} \right]^{1/3},$$

(здесь подразумеваются арифметические значения корней).

Записав неизвестную χ в виде ряда последовательных приближений

$$\chi = \chi_0 + \chi_2 + \chi_4 + \dots \quad (15)$$

для второго члена получим следующее выражение:

$$\chi_2 = \frac{\frac{2}{15} \chi_0^6 + (\gamma^{-2} - \delta) \chi_0^4 - 3\gamma^{-2} \delta \chi_0^2 - \frac{3}{4} \gamma^{-2} (\delta^2 + z^2) - \frac{3}{4} \phi^2 + 2\chi_0^3 \left(z \frac{h_0'''}{\Omega^3} + \delta \frac{a_0'''}{\Omega^3} \right) - 2\chi_0^5 \frac{a_0'''}{\Omega^3}}{4\chi_0^3 + 6(\gamma^{-2} - \delta) \chi_0 - 3\phi} \quad (16)$$

Заметим, что в области положительных ϕ существен член χ_0 , а для отрицательных ϕ в числителе правой части формулы (16) определяющей χ_2 существен член $-3/4 \phi^2$.

Ряд последовательных приближений (15) сходится, когда кроме условий (6) выполняются следующие локальные условия на функции $a(t)$ и $h(t)$:

$$a_0^{(n)} \ll \Omega^n, \quad h_0^{(n)} \ll \Omega^n, \quad n = 3, 4, \dots \quad (17)$$

Последние соотношения можно переписать в виде

$$\left. \frac{d^n a}{ds^n} \right|_{t=t_0} \ll R^{-n}, \quad \left. \frac{d^n h}{ds^n} \right|_{t=t_0} \ll R^{-n}, \quad n = 3, 4, \dots, \quad (18)$$

здесь $ds = \beta c dt$.

П. Поле частицы, движущейся по окружности.

Как было показано в предыдущем параграфе решение уравнения запаздывания в области параметров δ, ϕ, z удовлетворяющих условиям (6) можно считать не зависящим от функций $a(t)$ и $h(t)$ т.е. оно совпадает с решением уравнения запаздывания для круговой траектории. Очевидно, что в таком приближении, поле частицы

движущейся по траектории описываемой формулой (3) совпадает с полем частицы движущейся по окружности, если для функций $a(t)$ и $h(t)$ выполнены условия (13). Поэтому в дальнейшем мы ограничимся анализом поля и силы Лоренца для частицы движущейся по окружности радиуса R .

Формулы для электрических и магнитных полей выписаны в работе [4]. Там они разложены по векторам $(\vec{e}_1(-\Delta), \vec{e}_2(-\Delta), \vec{e}_3)$ связанным с частицей в запаздывающий момент времени $t; \Delta = \mathcal{R}(t_0 - t)$. Здесь поля удобнее разложить по векторам $(\vec{e}_1(\phi), \vec{e}_2(\phi), \vec{e}_3)$ связанным с точкой наблюдения. Воспользовавшись соотношениями

$$\begin{aligned}\vec{e}_1(-\Delta) &= \vec{e}_1(\phi) \cos 2\chi - \vec{e}_2(\phi) \sin 2\chi, \\ \vec{e}_2(-\Delta) &= \vec{e}_1(\phi) \sin 2\chi + \vec{e}_2(\phi) \cos 2\chi,\end{aligned}\tag{19}$$

а также, вводя направляющие косинусы v_1, v_2 вектора $\vec{u} - \vec{z}_0(t)$ по отношению к ортам $\vec{e}_1(-\Delta), \vec{e}_2(-\Delta)$ по формулам

$$\begin{aligned}v_1 &= \beta [(1+\delta) \cos 2\chi - 1] / \Delta, \\ v_2 &= \beta (1+\delta) \sin 2\chi / \Delta,\end{aligned}\tag{20}$$

получим для электрического поля \vec{E} выражение вида

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{e\beta^2}{R^2\Delta^2(1-\beta v_2)^3} \left\{ \frac{\vec{e}_1(\phi)}{\beta(1+\delta)} [\Delta(1-\beta v_2) + (\beta v_1 - \Delta v_3^2) \cdot \right. \\ &\cdot (\chi^{-2} - \beta \Delta v_1)] + \frac{\vec{e}_2(\phi)}{\beta(1+\delta)} [(\chi^{-2} - \beta \Delta v_1)^2 - (1 - \beta v_2) \cdot \\ &\cdot (\chi^{-2} - \beta \Delta v_1 + \beta \Delta^2 v_2)] + \vec{e}_3 v_3 (\chi^{-2} - \beta \Delta v_1) \left. \right\}\end{aligned}\tag{21}$$

и для магнитного поля \vec{H} выражение вида

$$\vec{H} = \frac{e\beta^2}{R^2\Delta^2(1-\beta v_2)^3} \left\{ \frac{\vec{e}_1(\phi)v_3}{(1+\delta)} [(\beta+\Delta v_1)(\gamma^{-2}-\beta\Delta v_1) + \right. \\ \left. + \Delta^2 v_2(1-\beta v_2)] + \frac{\vec{e}_2(\phi)v_3}{(1+\delta)} [-\Delta v_2(\gamma^{-2}-\beta\Delta v_1) + (\beta+\Delta v_1) \cdot \right. \\ \left. \cdot \Delta(1-\beta v_2)] - \vec{e}_3 \beta [v_1(\gamma^{-2}-\beta\Delta v_1) + \Delta v_2(1-\beta v_2)] \right\}. \quad (22)$$

Здесь $v_3 = (\text{sign } z) \sqrt{1-v_1^2-v_2^2}$ - направляющий косинус вектора $\vec{z} - \vec{z}_0(t)$ по отношению к орту \vec{e}_3 .

Представляет интерес нахождение нейтральной линии W магнитного поля \vec{H} . Такая линия лежит в плоскости траектории и определяется соотношением:

$$\Delta(v_2 - \beta) + v_1 \gamma^{-2} = 0. \quad (23)$$

Последнее позволяет выразить W через Δ в параметрическом виде

$$\text{tg}(\phi + \Delta) = \frac{\Delta \lambda_2(\Delta)}{\beta + \Delta \lambda_1(\Delta)}, \quad (24)$$

$$\delta = \sqrt{1 + 2 \frac{\Delta}{\beta} \lambda_1(\Delta) + \frac{\Delta^2}{\beta^2}} - 1,$$

где

$$\lambda_1(\Delta) = \gamma^2 \Delta \left(\frac{\beta \mp \sqrt{1 + \gamma^2 \Delta^2}}{1 + \gamma^4 \Delta^2} \right), \quad \lambda_2(\Delta) = \frac{\beta \Delta^2 \gamma^4 \pm \sqrt{1 + \gamma^2 \Delta^2}}{1 + \gamma^4 \Delta^2};$$

верхний и нижний знаки определяют соответственно ветви W_+ и W_- кривой W . Обе ветви начинаются от частицы, касаясь траектории. В интервале значений $1 \gg \Delta \gg \gamma^{-1}$ обе ветви идут почти параллельно радиусу, проходящему через точку нахождения частицы, при $\Delta \rightarrow \infty$ асимптотически стремясь к спиральям, определяемым

условиями $V_2 = \beta$, $V_1 = \pm \gamma^{-1}$. Расстояние между ветвями W_{\pm} при $\Delta \gg \gamma^{-1}$ порядка R/γ^3 .

Как видно из формул (21), (22), магнитное и электрическое поля содержат множитель $(1 - \beta V_2)^{-3}$, достигающий своего максимума в области, где $V_2 \sim 1 - \alpha^2 \gamma^{-2}$, $\alpha \sim 1$. Обозначим эту область через D_3 . Для удобства её можно считать ограниченной поверхностями $V_2 = \beta$, $V_1 > 0$ и $V_2 = \beta$, $V_1 < 0$. Сечения этих поверхностей плоскостями $z = \text{const}$ задаются через Δ в параметрическом виде

$$\begin{aligned} \text{tg}(\phi + \Delta) &= \frac{\beta \Delta}{\beta \pm \Delta \sqrt{\gamma^{-2} - \beta^2 z^2 / \Delta^2}}, \\ \delta &= \sqrt{1 + \frac{\Delta^2}{\beta^2} - z^2 \pm 2 \Delta \sqrt{\gamma^{-2} - \beta^2 z^2 / \Delta^2} / \beta} - 1. \end{aligned} \quad (25)$$

Толщина области D_3 , определенная как максимум расстояний между ветвями сечений D_3 плоскостями $z = \text{const}$, порядка R/γ^3 и определяется плоскостью окружности.

В области D_3 поля \vec{E} и \vec{H} экстремальны и пропорциональны γ^4 .

Явные выражения полей через координаты точки наблюдения в интересующем нас случае получаются при разложении \vec{E} и \vec{H} по χ и γ^{-2} , с использованием первых членов разложения (15) уравнения запаздывания.

Для \vec{E} получим выражение вида

$$\vec{E} = \frac{1}{[\frac{4}{3} \chi^3 + 2 \chi (\gamma^{-2} \delta) - \phi]^3} \left\{ \vec{e}_1(\phi) \left[-\frac{4}{3} \chi^4 + 2(\gamma^{-2} z^2) \chi^2 - \right. \right.$$

$$-2\phi\chi + \phi^2 - (\delta - z^2)(\delta - \gamma^{-2}) + \vec{e}_2(\phi) \left[\frac{16}{3}(\delta - \gamma^{-2})\chi^3 + 6\phi\chi^2 - 2\phi^2\chi + \phi(\gamma^{-2} - \delta) \right] + \vec{e}_3 z [2\chi^2 + \gamma^{-2} - \delta] \}. \quad (26)$$

Для \vec{H} получим выражение вида

$$\frac{R^2}{e} \vec{H} = \frac{1}{\left[\frac{4}{3}\chi^3 + 2\chi(\gamma^{-2} - \delta) - \phi \right]^3} \left\{ \vec{e}_1(\phi) z [2\chi^2 + \gamma^{-2} - \delta - 2\phi\chi] - \vec{e}_2(\phi) z \left[\frac{8}{3}\chi^3 + \phi \right] + \vec{e}_3 \left[\frac{4}{3}\chi^4 - 2\gamma^{-2}\chi^2 + 2\phi\chi - \delta(\gamma^{-2} - \delta) \right] \right\}. \quad (27)$$

Заметим, что в области положительных ϕ , а также отрицательных ϕ , таких что $\phi^2 \ll \delta^2 + z^2$, можно ограничиться первым членом разложения (15), т.е. положить $\chi = \chi_0$.

Видно, также, что в области значений параметров много больших γ^{-2} и много меньших единицы поле не зависит от γ . Обозначим эту область через D_1 , а область значений параметров ϕ, δ, z порядка γ^{-2} через D_2 . Действительно, вне области D_2 для определения χ_0 можно решать уравнение

$$\chi_0^4 - 3\delta\chi_0^2 - 3\phi\chi_0 - \frac{3}{4}(\delta^2 + z^2) = 0, \quad (28)$$

коэффициенты которого не зависят от γ .

Учтем, что

$$\Delta(1 - \beta V_2) = \frac{4}{3}\chi_0^3 + 2\chi_0(\gamma^{-2} - \delta) - \phi + \dots \quad (29)$$

Тогда, как видно из формулы (16), второй член разложения (15) χ_2 также не зависит от γ , поскольку знаменатель правой

части формулы (16) рассматривается вне области D_3

Поле имеет достаточно простой вид для значений $\phi \sim \delta \sim z \gg \gamma^{-2}$. Решение уравнения запаздывания при этом имеет вид

$$\chi = \begin{cases} (3\phi)^{1/3} & \phi > 0, \\ \frac{\phi^2 - \delta^2 - z^2}{4\phi} & \phi < 0. \end{cases} \quad (30)$$

Подставляя это соотношение в формулы (26), (27) получим выражение для электрического поля:

$$\frac{R^2}{e} \vec{E} = \begin{cases} -\frac{2\vec{e}_1(\phi)}{(3\phi)^{5/3}} + \frac{2\vec{e}_2(\phi)}{(3\phi)^{4/3}} + \frac{2z\vec{e}_3}{(3\phi)^{2/3}}, & \phi > 0 \\ \frac{1}{2\phi^3} [(\delta^2 - z^2 - \phi^2)\vec{e}_1(\phi) + 2\phi\delta\vec{e}_2(\phi) + 2z\delta\vec{e}_3], & \phi < 0. \end{cases} \quad (31)$$

Для магнитного поля получим выражение вида

$$\frac{R^2}{e} \vec{H} = \begin{cases} +\frac{2z\vec{e}_1(\phi)}{(3\phi)^{2/3}} - \frac{z\vec{e}_2(\phi)}{3\phi^2} + \frac{2\vec{e}_3}{(3\phi)^{5/3}}, & \phi > 0, \\ \frac{1}{2\phi^3} [2\delta z\vec{e}_1(\phi) + 2z\phi\vec{e}_2(\phi) + (z^2 - \phi^2 - \delta^2)\vec{e}_3], & \phi < 0. \end{cases} \quad (32)$$

Как видно из этих формул, при $\phi > 0$, электрическое и магнитное поля имеют, соответственно, радиальное и вертикальное направления, а при $\phi < 0$ касательны к семейству сфер радиусов μ , задаваемых уравнением:

$$\delta^2 + z^2 + (\phi - \mu)^2 = \mu^2, \quad \mu > 0. \quad (33)$$

Аналогичный результат можно получить из следующих соображений. Рассмотрим точные формулы полей (21), (22), соответствующие нахождению частицы на азимуте $-\Delta$. Тогда, при выполнении условия $1 - v_2 \gg \gamma^{-2}$, $\Delta \gg \gamma^{-2}$, что соответствует положению точки наблюдения вне областей \mathcal{D}_2 и \mathcal{D}_3 , электрическое и магнитное поля пропорциональны

$$\begin{aligned} \vec{E} &\sim (1 - v_2 - v_1^2) \vec{e}_1(-\Delta) + v_1(1 - v_2) \vec{e}_2(-\Delta) - v_1 v_3 \vec{e}_3, \\ \vec{H} &\sim -v_1 v_3 \vec{e}_1(-\Delta) + (1 - v_2) v_3 \vec{e}_2(-\Delta) + (v_1^2 + v_2^2 - v_2) \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (34)$$

Видно, что здесь поля \vec{E} и \vec{H} перпендикулярны вектору $\frac{R\Delta}{\beta} (v_1 \vec{e}_1(-\Delta) + v_2 \vec{e}_2(-\Delta) + v_3 \vec{e}_3)$. Для фиксированных Δ и различных v_1 , v_2 , v_3 этот вектор описывает сферу радиусом $R\Delta/\beta$. В области значений δ , ϕ , z малых по сравнению с единицей они совпадают со сферами определяемыми уравнением (33). Силовые линии электрического поля в этой области при $z = 0$ изображены на рисунке.

III. Сила Лоренца

Для решения задач физики ускорителей и накопителей интерес представляют не сами поля, а силы Лоренца действующие между частицами.

Найдем силу Лоренца действующую на частицу, находящуюся в

точке с координатами $((\delta+1)R, \phi, zR)$ в момент времени t_0 , со стороны частицы, равномерно движущейся по окружности, находящейся в момент времени t_0 в точке с координатами $(R, 0, 0)$. Энергии обеих частиц примем равными по величине, а скорость $\beta'c$ пробной частицы такой, что её радиальная и вертикальная компоненты $\lesssim \beta c/\gamma$. Скорость $\vec{\beta}'c$ представим в виде

$$\vec{\beta}'c = \beta c (\alpha_1 \gamma^{-1} \vec{e}_1(\phi) + (1 - \frac{1}{2} \alpha_2^2 \gamma^{-2}) \vec{e}_2(\phi) + \alpha_3 \gamma^{-1} \vec{e}_3), \quad (35)$$

где параметры $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ связаны соотношением

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2 + \frac{1}{4} \alpha_2^4 \gamma^{-2} = 0.$$

Воспользовавшись формулами полей (21), (22) и разложив компоненты силы Лоренца по χ и γ^{-2} , имеем

$$\begin{aligned} \frac{R^2}{e^2} \vec{F} = & \frac{1}{[\frac{4}{3} \chi^3 + 2\chi(\gamma^{-2} - \delta) - \phi]^3} \left\{ \vec{e}_1(\phi) \left[\frac{16}{9} \chi^6 + 4\chi^4(\gamma^{-2} - \delta) - \right. \right. \\ & - \frac{8}{3} \phi \chi^3 + 2((\gamma^{-2} - \delta)(3\gamma^{-2} - 2\delta) - z^2) \chi^2 - 6\phi(\gamma^{-2} - \delta)\chi + \phi^2 + \\ & + (\gamma^{-2} - \delta)[(\gamma^{-2} - \delta)\delta - z^2] - \frac{\gamma^{-2} \alpha_2^2}{2} \left[\frac{4}{3} \chi^4 - 2\gamma^{-2} \chi^2 + 2\phi\chi - \right. \\ & \left. \left. - \delta(\gamma^{-2} - \delta) \right] + \gamma^{-1} \alpha_3 z \left(\frac{8}{3} \chi^3 + \phi \right) + \vec{e}_2(\phi) \left[\frac{16}{3} (\delta - \gamma^{-2}) \cdot \right. \right. \\ & \cdot \chi^3 + 6\phi\chi^2 - 2\phi^2\chi + \phi(\gamma^{-2} - \delta) - \gamma^{-1} \alpha_1 \left[\frac{4}{3} \chi^4 - 2\gamma^{-2} \chi^2 + 2\phi\chi - \right. \\ & \left. \left. - \delta(\gamma^{-2} - \delta) \right] + \gamma^{-1} \alpha_3 z (2\chi^2 + \gamma^{-2} \delta - 2\phi\chi) + \vec{e}_3 z \left[\gamma^{-2} (2\chi^2 + \gamma^{-2} \delta - \right. \right. \\ & \left. \left. - \phi\chi) - \gamma^{-1} \alpha_1 \left(\frac{8}{3} \chi^3 + \phi \right) - \frac{\gamma^{-2} \alpha_2^2}{2} (2\chi^2 + \gamma^{-2} \delta - 2\phi\chi) \right] \right\}. \quad (36) \end{aligned}$$

Также как поля \vec{E} и \vec{H} сила Лоренца принимает большие значения в области D_3 . Заметим, что при малых δ, ϕ, z значения радиальной и вертикальной компонент силы Лоренца отличаются от соответствующих компонент полей на множитель много меньший единицы, причем для вертикальной компоненты силы Лоренца этот множитель пропорционален γ^{-1} . В области параметров $\phi \sim \delta \sim z \gg \gamma^{-2}$ сила Лоренца может быть представлена в виде

$$\frac{R^2}{e^2} \vec{F} = \begin{cases} \frac{\vec{e}_1(\phi)}{3\phi} + \frac{2\vec{e}_2(\phi)}{(3\phi)^{4/3}}, & \phi > 0, \\ \frac{1}{\phi^2} [-\phi\vec{e}_1(\phi) + \delta\vec{e}_2(\phi)], & \phi < 0. \end{cases} \quad (37)$$

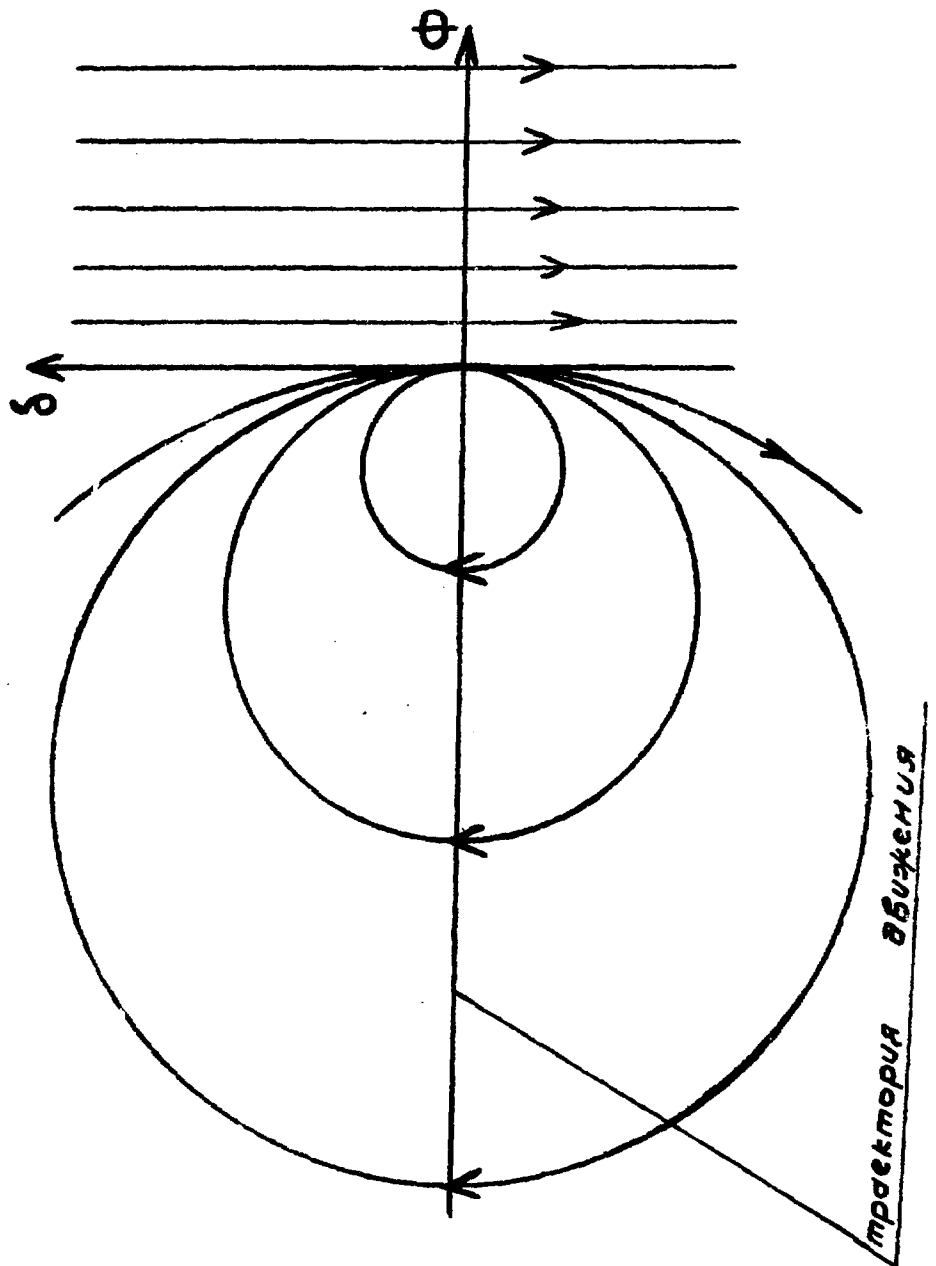
В существующих и проектируемых ускорителях и накопителях (см., например [5]) радиальные и вертикальные размеры пучков таковы, что $\delta \sim \frac{R}{10\gamma}$, $z \sim \frac{R}{100\gamma}$. Среднее расстояние между частицами пучка $\bar{\rho} = \left(\frac{2\pi R \delta z}{N} \right)^{1/3} \sim \frac{R}{5} (N\gamma^2)^{-1/3} \sim \frac{R}{5\gamma^{5/3}}$, где N - полное число частиц в пучке порядка γ^3 . Отсюда следует, что для произвольной частицы пучка её ближайшие соседи находятся в основном в области D_1 , а она сама, в основном, вне областей D_2 и D_3 , связанных с соседними частицами.

Заметим, что сила Лоренца, действующая на пробную частицу, находящуюся в области D_1 , и которая здесь описывается формулой (37), не содержит множителя порядка γ^{-2} по сравнению с силой Лоренца, действующей со стороны равномерно и прямолинейно движущегося заряда. Отсюда следует, что сдвиг частоты бета-

гронных колебаний обязанный собственному полю пучка должен существенно отличаться от сдвига частоты полученного в приближении равномерного и прямолинейного движения частиц пучка, которым обычно пользуюсь (см., например, [6]).

Из-за разброса скоростей и энергий частиц в реальных пучках, частицы также пересекают области \mathcal{D}_3 . Такие пересечения, в зависимости от амплитуд бетатронных колебаний, происходят за времена порядка и меньше $R/(c\gamma)$ и сопровождаются изменениями импульсов частиц. Эти изменения импульсов частиц, которые можно считать δ -образными и случайными, учитывая, что $R/(c\gamma)$ много меньше периода бетатронных колебаний, аналогично квантовым флуктуациям излучения частиц [7], могут приводить к раскачке бетатронных колебаний.

Автор выражает искреннюю благодарность А.Ц.Аматуни за внимание к работе и ценные замечания, Г.А.Нагорскому за многочисленные стимулирующие дискуссии и обсуждения проблемы, способствующие выполнению работы, а также А.А.Оганджянчу и Г.М.Бабуджану за помощь в проверке формул и полезные замечания.



Силовые линии электрического поля в области D_1 в плоскости траектории частицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля, "Наука", 1973.
2. Г.Е.Шилов. Математический анализ. 3, М. "Наука", 1970.
3. Г.Корн, Т.Корн. Справочник по математике, М. "Наука", 1973.
4. С.Г.Арутюнян, Г.А.Нагорский. Нелинейная зависимость эффектов интенсивности от числа частиц в кольцевом токе, "Атомная энергия". (В печати) 1980.
5. PEP Conceptual Design Report, SLAC-189, 1976.
6. Г.Брук. Циклические ускорители заряженных частиц, М.Атомиздат, 1970.
7. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев. Теория циклических ускорителей, М.Физматгиз 1962.

Рукопись поступила 4-го октября 1979 г.



Редактор Л.П.Мукаян
Тех.редактор А.С.Абрамян

Заказ 357

ВФ-06068

Тираж 299

Препринт ЕФИ

Формат издания 60x84/16

Подписано к печати 12/ХП-79г.

1,5 уч.изд.л. Ц10 к.

Издано Отделом научно-технической информации
Ереванского физического института, Ереван-36, пер.Маркарян 2