индекс 3624

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЕФИ-411(18)-80

Р.Л.МКРТЧЯН

ПРОСТРАНСТВО ПАРАМЕТРОВ ДВУХИНСТАНТОННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ САМОДУАЛЬНОСТИ

ԵՐԵՎԱՆ 1980 ЕРЕВАН

© Ереванский физический институт, 1980

Поля Янга-Миллса A_μ^a в четырехмерном евклидовом пространстве, имеющие конечное действие

$$S = \frac{1}{4}\int F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a d^4x$$

разбиваются на классы, отвечающие различным значениям топологического заряда к [I] :

$$K = \frac{1}{16\pi}\int \tilde{F}_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a d^4x, \qquad \tilde{F}_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}^a$$

Потенциалы A_μ^a , имеющие минимальное действие в данном классе, удовлетворяют уравнению (анти) самодуальности [I] :

$$\tilde{F}_{\mu\nu}^a = \pm F_{\mu\nu}^a \qquad \text{(I)}$$

Целью настоящей работы является полное описание топологического пространства, гомеоморфного пространству всех двухин - стантонных (т.е. с K =2) решений уравнения (I), факторизованного по отношению калибровочной эквивалентности. Благодаря свойству гомеоморфности все топологические инварианты (например, гомотопические и гомологические группы) этих двух пространств совпадают, и, следовательно, наше описание обеспечивает базу для полного топологического исследования случая K =2 (исследование общего случая $K \geq 1$ см.например, [2]).

В остальной части работы описывается искомое пространство параметров (с кратким выводом) и в конце кратко обсуждается следствие некоторых его топологических свойств.

Наиболее простая форма двухинстантонного решения приведена в [3] , однако в этой форме калибровочная свобода не изгнана полностью,т.е. два решения в этой форме с различным набором параметров могут быть иногда связаны калибровочным преобразованием[3]. Поэтому мы используем общую процедуру для K-инстантонного решения,данную в[4]и упрощенную в[5], для $K = 2$.

Пусть a , b , c , e , f - действительные кватернионы *) C , B , M - матрицы с кватернионными элементами:

$$C = \begin{pmatrix} e & f \\ a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = x_\mu \sigma_\mu, \qquad M = C + B\cdot x$$

Далее,пусть P_0, P_1, P_2 - действительные кватернионы, решения уравнения $P + M = 0$. Тогда, [5] , $A_\mu = P^+ \partial_\mu P$ является решением уравнения (I) с $K = 2$, если матрица C удовлетворяет некоторым ограничениям,о которых говорится ниже.Все матрицы C' ,связанные с преобразованием

$$C' = SCR, \qquad R \in O(2), \quad S = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}, \quad g \in SU(2), \quad (2)$$

---

*) Обозначим : $\sigma_\mu = (-i\vec{\sigma}, 1)$, $\vec{\sigma}$ - матрицы Паули.

Действительный кватернион P -это двумерная матрица $P = P_\mu \sigma_\mu$, P_μ - действительные, (μ =I,2,3,4)

Также $|P| = \sqrt{P_\mu P_\mu}$.

приводят к одним и тем же A_μ^a . Матрица C^+C :

$$C^+C = \begin{pmatrix} a^+a + b^+b + e^+e, & a^+b + b^+c + e^+f \\ b^+a + c^+b + f^+e, & b^+b + c^+c + f^+f \end{pmatrix}$$

должна быть симметричной кватернионной матрицей. Легко подсчитать, что с учетом эквивалентности (2), количество независимых параметров матрицы C равно I3, в соответствии с общей формулой $8K - 3$, [6,7] для группы $SU(2)$. Таким образом, мы должны параметризовать матрицу C с учетом эквивалентности (2). Прежде всего, используя трансляционную инвариантность, зафиксируем начало координат требованием $c = -a$.Затем, используя (I) потребуем, чтобы C^+C было бы диагональной, т.е. $a^+b - b^+a + e^+f = 0$. Этим мы определим матрицу R с точностью до диагональной, кроме того случая, когда $|e| = |f|$, когда C^+C пропорциональна единичной матрице. Заметим, что тогда e и f фиксируются, с точностью до эквивалентности (2) , величинами a, b , и $y \equiv |e| - |f|$. Диагональные R - матрицы приводят к эквивалентности $b \sim -b$. И,наконец, заметим, что перестановка $a \leftrightarrow c$, $e \leftrightarrow f$, приводит к перестановке $P_1 \leftrightarrow P_2$, т.е. перестановке индексов I и 2 , что не меняет A_μ^a , таким образом (a , y) эквивалентны $(-a, -y)$. Прежде чем записать всю полученную информацию в компактном виде, позаботимся о том, чтобы исключить те точки в простанстве (a, b, y), которые отвечают I и 0 - инстантонным решениям. Это, во-первых,точки с $b = 0$,когда решение одноинстантонное, и точки с $y = 0$ и $a = \alpha b$, $\alpha \in R$, когда решение 0-инстантонное,так как $|e| = |f| = 0 \Rightarrow A_\mu^a = 0$

Введем переменную $z = a + ib$, $z \in C^4$ - четырехмерному ком-

плексному пространству. Тогда искомое пространство параметров есть $R^4 \times V$, где V описывается следующим образом.
Пусть $\tilde{\tilde{V}} = C^4 \times R_+$, $R_+ = [0, \infty)$, точку в $\tilde{\tilde{V}}$ обозначим (z , y). Пусть Z_2 - группа из двух элементов, нетривиальный элемент которой переводит точку (z , y) в (z^*, y) , и пусть $U(1)$ - группа, действующая тривиально на точки с $y = 0$, а точку (z , 0) переводящая в точку ($z \cdot e^{i\varphi}$, 0) $\varphi \in [0, 2\pi]$.
Тогда $\tilde{V} \equiv \tilde{\tilde{V}} / Z_2 \times U(1)$ — фактор-пространство по действию группы $Z_2 \times U(1)$. Наконец V получается из $\tilde{V}$ выбрасыванием образов (при факторизации $\tilde{\tilde{V}} \to \tilde{V}$) точек с $\mathrm{Im}\, z = 0$.
Этим завершено описание пространства параметров $R^4 \times V$.

Отметим, что и в общем случае $K > 2$ будет иметь место явление, аналогичное тому, которое мы наблюдали в случае $K = 2$, а именно: при совпадении n, $n \leq K$ собственных значений матрицы $C^+ C$ необходимо произвести факторизацию по группе $O(n)$. .

В заключение обсудим локальное устройство пространства параметров. Ясно, что любая точка с $y \neq 0$ имеет открытую окрестность, гомеоморфную R^{13} . Можно доказать, что и все остальные точки также обладают этим свойством.Это важно для ответа на вопрос [7] о существовании группы преобразований, транзитивно действующей на пространстве K - инстантонов, так как наличие точек, у которых нет окрестности, гомеоморфной R^{13}, означало бы, что эти точки нельзя перевести элементом группы в точки,у которых такая окрестность есть, т.е.транзитивно действующей группы в этом случае не существовало бы.

Я благодарен Р.Арутюняну и А.Седракяну за интересные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. A.Belavin, A.Polyakov, A.Schwarz, Yu.Tyupkin, Phys.Lett. 59B, 85, 1975.
2. M.F.Atiyah, J.D.Jones, Commun.Math.Phys.61, 97 (1978.
3. R.Jackiw, C.Nohl, C.Rebby, Phys.Rev. D16, 1642, 1977.
4. M.F.Atiyah, N.J.Hitchin, V.G.Drinfeld, Yu.I.Manin, Phys.Lett. 65A, 185, 1978
5. N.H.Christ, E.J.Weinberg, N.K.Stanton, Phys.Rev.D18,2013, 1978
6. A.Schwarz, Phys.Lett. B67, 172, 1977
7. R.Jackiw, C.Rebby, Phys.Lett. B67, 189, 1977

Рукопись поступила 9-апреля 1980 г.

Ереванский Физический
ИНСТИТУТ
Зал препринтов

Редактор Л.П.Мукаян

Тех.редактор А.С.Абрамян

Заказ 665 ВФ-03321 Тираж 299

Препринт ЕФИ Формат издания 60 х 84/16

Подписано к печати 9/VII-80г. 0,6 уч.изд.л.Ц. 4 к,

Издано Отделом научно-технической информации

Ереванского физического института, Ереван-36, пер.Маркаряна2