2

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЕФИ-414(21)-80

Ю.Л.МАРТИРОСЯН, М.Л.ПЕТРОСЯН

ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ В АЗИМУТАЛЬНО-КОЛЬЦЕВОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

ԵՐԵՎԱՆ 1980 ЕРЕВАН

ЕФИ-414(21)-80

Yu.L.MARTIROSYAN, M.L.PETROSYAN

ELECTRON MOTION IN AZIMUTHAL-ANNULAR MAGNETIC FIELD

The electron motion in asimuthal-annular time-constant magnetic field is considered. The motion instability is found in vertical direction to suppress which two pairs of magnetic quadrupole lenses are introduced. It is shown that the motion is stable under acceleration mode as well. The results of the work make it possible to design storage rings with the time-constant magnetic field.

Yerevan Physics Institute
Yerevan 1980

ЕФИ-414(21)-80

УДК.539.124:621.384.631.5

Ю.Л.МАРТИРОСЯН, М.Л.ПЕТРОСЯН

ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ В АЗИМУТАЛЬНО-КОЛЬЦЕВОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В работе рассматривается движение электронов в азимутально-кольцевом постоянном во времени магнитном поле. Обнаружена неустойчивость движения в вертикальном направлении и для подавления неустойчивости введены пары магнитных квадрупольных линз. Показано, что движение устойчиво и в режиме ускорения. На основе результатов работы можно спроектировать кольцевые ускорители с постоянным во времени магнитным полем.

Ереванский физический институт

Ереван 1980

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЕФИ-414(21)-80

Ю.Л.МАРТИРОСЯН, М.Л.ПЕТРОСЯН

ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ В АЗИМУТАЛЬНО-КОЛЬЦЕВОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Ереван 1980

В работе [1] предлагается один из вариантов создания кольцевого ускорителя с постоянным во времени магнитным полем. Магнитная система этого ускорителя представляет собой тороидальный соленоид, и поле имеет направление равновесной орбиты движения частиц:

$$H_r = H_z = 0; \qquad H_\theta = \frac{h}{r} \tag{I}$$

(в цилиндрической системе координат),

где величина $h = R \cdot H_0$ определяет силу, искривляющую траекторию электронов (иногда называют её жесткостью), $H_0 = H_\theta (r = R)$.

Из уравнения движения Ньютона-Лоренца

$$\frac{d\,(m\vec{r})}{dt} = \frac{e}{c}\,[\vec{v}\,\vec{H}] \tag{2}$$

можно легко получить закон сохранения энергии $mc^2 = const$, , откуда в частности следует $m = const$; $v = const$.

Для выяснения, насколько устойчиво движение в такой системе, запишем уравнение (2) в цилиндрической системе координат [2] (рис.I)

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{eh}{mc}\cdot\frac{\dot{z}}{r}$$
$$\ddot{z} = \frac{eh}{mc}\cdot\frac{\dot{r}}{r} \qquad (2a)$$
$$mr^2\dot{\theta} \equiv J_z = const$$

с начальными условиями $r = R;\ z = 0;\ \theta = 0;\ \dot{r} = V_{0r};\ \dot{z} = V_{0z};$ и $\dot{\theta} \equiv \Omega = \frac{V_{0\theta}}{R}$ при $t = 0$.

где точка над буквой означает дифференцирование по времени,

R – радиус равновесной орбиты,

v – скорость электрона,

m – масса электрона,

e – заряд электрона,

c – скорость света.

Из третьего уравнения системы (2a) следует сохранение момента количества движения частицы, параллельного оси симметрии z. В первом приближении с достаточной точностью можно положить $r = R$ и $\Omega = const$.

Подставляя в знаменателях правых частей первого и второго уравнений системы (2a) $r = R$, получим

$$\ddot{r} - \Omega^2 r + \omega\dot{z} = 0$$
$$\ddot{z} - \omega\dot{r} = 0, \qquad (3)$$

где $\omega = \frac{eH_0}{mc}$ – циклическая частота.

Однократно интегрируя второе уравнение системы (3), получим

$$\dot{z} = \omega r + (V_{0z} - \omega R). \qquad (4)$$

Подставляя в первое уравнение (3), получим уравнение горизонтальных колебаний

$$\ddot{r} + \varepsilon^2 r = W \qquad (5)$$

где $\varepsilon^2 = \omega^2 - \Omega^2$; $\quad W = \omega(\omega R - V_{0z})$.

Решение уравнения (5) запишем в виде

$$r = a \sin(\varepsilon t + \varphi) + \frac{W}{\varepsilon^2}, \tag{6}$$

где

$$a = \sqrt{\frac{V_{0r}}{\varepsilon^2} + \left(R - \frac{W}{\varepsilon^2}\right)^2}; \qquad \cos\varphi = \frac{V_{0r}}{a\varepsilon}.$$

Из (4) для вертикальных колебаний получаем решение

$$z = -\frac{a\omega}{\varepsilon}\cos(\varepsilon t + \varphi) + (V_{0z} - \omega R)\frac{\Omega^2}{\varepsilon^2}t + \frac{\omega V_{0r}}{\varepsilon^2}. \tag{7}$$

Итак, получается система решений

$$\begin{aligned} r &= a \sin(\varepsilon t + \varphi) + \frac{W}{\varepsilon^2} \\ z &= -\frac{a\omega}{\varepsilon}\cos(\varepsilon t + \varphi) + (V_{0z} - \omega R)\frac{\Omega^2}{\varepsilon^2}t + \frac{\omega V_{0r}}{\varepsilon^2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что движение электронов происходит по спиралеобразной траектории, по тороиду. Однако, как видно из второго уравнения системы (8), движение по z неустойчиво наблюдается дрейф электрона в вертикальном направлении со скоростью

$$V_{Dz} = \frac{(V_{0z} - \omega R)\,\Omega^2}{\varepsilon^2}. \tag{9}$$

К такому результату можно было прийти непосредственным вычислением дрейфовой скорости с учетом магнитного градиента, возникающего из-за изогнутости магнитных силовых линий, и центробежной силы [3].

Представляет интерес рассмотрение подавления неустойчивости движения заряженных частиц в азимутально-симметричном поле с помощью подставления на пути частицы по кольцу пары собирающе-рассеивающих магнитных квадрупольных линз.

Для дальнейшего исследования устойчивости движения удобно использовать матричный метод анализа устойчивости в периодических магнитных структурах [4] .

Запишем уравнение вертикальных колебаний в зависимости от переменной дуги окружности

$$\frac{d^2 z}{d\ell^2} - \frac{a}{V^2} \sin \frac{\varepsilon \ell}{V} = 0 , \qquad (10)$$

где для простоты принимали

$V_{0z} = V_{0r} = 0$; $V_{0\theta} = V$ и $\frac{d^2}{dt^2} = V^2 \frac{d^2}{d\ell^2}$; $a = -\frac{\omega \Omega^2}{\varepsilon} \cdot R.$

Из (10) следует

$$z = z_1 + \ell z_1' + \frac{a}{\varepsilon V}\left(\ell - \frac{V}{\varepsilon} \sin \frac{\varepsilon \ell}{V}\right)$$
$$z' = 0 \cdot z_1 + z_1' + \frac{a}{\varepsilon V}\left(1 - \cos \frac{\varepsilon \ell}{V}\right) , \qquad (11)$$

где $z_1 = z$ при $\ell = 0 (\theta = 0)$; $z' = \frac{dz}{d\ell}$; $z_1' = z'(\ell = 0)$.

После прохождения частицей полуокружности (при входе в магнитную линзу) вертикальная координата и соответствующий ей угол отклонения от равновесной орбиты в матричном обозначении будут

$$\begin{pmatrix} z_2 \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \pi R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_1' \end{pmatrix} + \frac{a}{\varepsilon V} \begin{pmatrix} \pi R - \frac{V}{\varepsilon} \sin \frac{\pi R \varepsilon}{V} \\ 1 - \cos \frac{\pi R \varepsilon}{V} \end{pmatrix} . \qquad (12)$$

После прохождения частицей магнитной линзы с магнитным потенциалом

$$V = G \cdot x \cdot z \quad , \tag{13}$$

где $G \equiv \frac{\partial H_z}{\partial x} \equiv \frac{\partial H_x}{\partial z}$ магнитный градиент, угол и координата будут

$$\begin{pmatrix} z_3 \\ z_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \frac{1}{K}\sin\alpha \\ -K\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_2 \\ z_2' \end{pmatrix} \tag{14}$$

– для собирающей линзы,

$$\begin{pmatrix} z_4 \\ z_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\alpha & \frac{1}{K}sh\alpha \\ K\,sh\alpha & ch\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_3 \\ z_3' \end{pmatrix} \tag{15}$$

– для рассеивающей линзы,

где $K^2 \equiv \frac{eG}{mcv}$; $\alpha \equiv KL$.

Итак, после прохождения частицей первой полуокружности и первой пары квадрупольных линз (первого "сектора") получаем

$$\begin{pmatrix} z_4 \\ z_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\alpha & \frac{1}{K}sh\alpha \\ K\,sh\alpha & ch\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \frac{1}{K}\sin\alpha \\ -K\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \pi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_1' \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} ch\alpha & \frac{1}{K}sh\alpha \\ K\,sh\alpha & ch\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \frac{1}{K}\sin\alpha \\ -K\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi R - \frac{v}{\varepsilon}\sin\frac{\pi R\varepsilon}{v} \\ 1 - \cos\frac{\pi R\varepsilon}{v} \end{pmatrix} \cdot \frac{a}{\varepsilon v} . \tag{16}$$

Так как дальше цикл повторяется, то для полного оборота получается квадрат матрицы перехода.

Совершенно аналогичным образом можно получить матрицу перехода для горизонтальных колебаний.

Перемножая матрицы и применяя критерий устойчивости, получаем

$$-1 \le ch\alpha \cos\alpha + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R}{L} \cdot \alpha \left(sh\alpha \cos\alpha - ch\alpha \sin\alpha \right) \le 1 \qquad (17)$$

- для вертикальных колебаний,

$$-3{,}76 \le \cos\psi - 2{,}048 \frac{\sin\psi}{\xi} \le 1 \quad (eq.\ crc) \qquad (18)$$

- для горизонтальных колебаний,

где $\psi = \pi R \xi$, $\xi = \frac{\omega}{v}$; L - длина квадрупольной линзы.

Анализ этих неравенств показывает, что условие устойчивости выполняется при $0 < \alpha \le \frac{\pi}{6}$ (если принимать приблизительно $\frac{L}{R} \approx 10^{-1}$) и в очень узких окрестностях точек $\frac{\pi}{2} n$, где n = 1,2,3 ..., которые не представляют физического интереса, так как накладывают очень жесткие условия на устройство (рис.2).

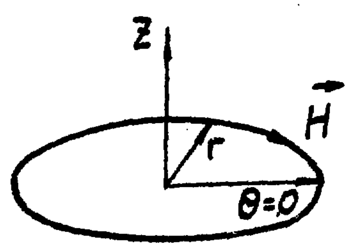

Рис.I Форма магнитного поля в цилиндрической системе координат.

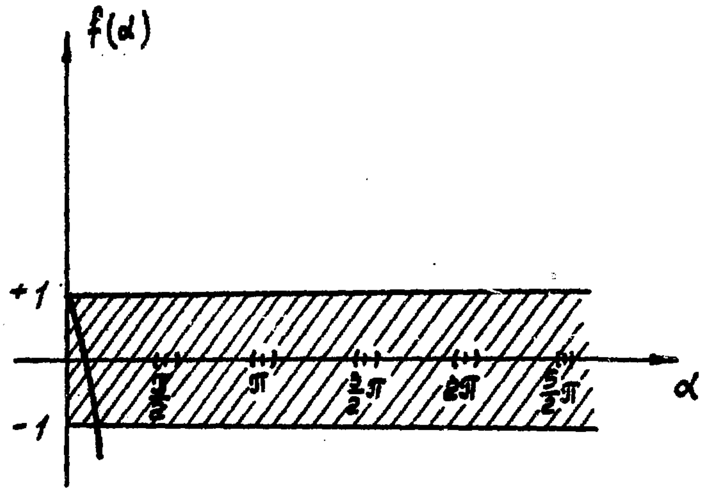

Рис.2 Графическое изображение области устойчивости по вертикальному направлению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б.И.Рамеев. "Устройство для ускорения движения заряженных частиц". Авт.св.СССР № 74398, Ежемес.бюллет.изобр. № 3,1949.
2. Дж.Джексон. "Классическая электродинамика", М-1965.
3. Л.А.Арцимович, С.Ю.Лукьянов. "Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях", Москва, 1972.
4. Дж.Ливингуд. "Принципы работы циклических ускорителей", Москва, 1963.

Рукопись поступила 12-го марта 1980 г.

Редактор Л.П.Мукаян

Тех.редактор А.С .Абрамян

Заказ 666	ВФ-033I9	Тираж 299

Препринт ЕФИ — Формат издания 60x84/I6

Подписано к печати 9/УП-80г. 0,8 уч.изд.л. Ц. 6 к.

Издано Отделом научно-технической информации
Ереванского физического института, Ереван-36, пер.Маркаряна 2

индекс 3624