индекс 3624

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЕФИ-449(56)-80

В.А.ДЖРБАШЯН

НОВАЯ СОХРАНЯЮЩАЯСЯ ВЕЛИЧИНА ДЛЯ СВОБОДНЫХ ЧАСТИЦ. СЛЕДСТВИЯ ОДНОРОДНОСТИ И ИЗОТРОПНОСТИ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

ԵՐԵՎԱՆ 1980 ЕРЕВАН

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЕФИ-449(56)-80

В.А.ДЖРБАШЯН

НОВАЯ СОХРАНЯЮЩАЯСЯ ВЕЛИЧИНА ДЛЯ СВОБОДНЫХ ЧАСТИЦ. СЛЕДСТВИЯ ОДНОРОДНОСТИ И ИЗОТРОПНОСТИ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Ереван 1980

© Ереванский физический институт, 1980

I. Введение

Сохранение ряда физических величин для свободных частиц следует из свойств пространства. В отсутствие внешнего поля все положения, получающиеся друг из друга параллельным переносом и вращением, эквивалентны, т.е. пространство однородно и изотропно [I]. Поскольку частицы описываются волновой функцией ψ, зависящей от их положения, а $|\psi|^2$ есть плотность вероятности найти частицу в данном положении, то эквивалентность положений естественно понимать в смысле постоянства плотности вероятности. Таким образом, из трехмерного пространства переходя к четырехмерному, его однородность и изотропность следует понимать как постоянство плотности вероятности при соответствующем преобразовании группы Лоренца. Требование сохранения этой локальной вероятности сильнее принятого требования сохранения полной вероятности (нормировки) [2,3], приводящего к унитарности преобразования. Постоянство плотности вероятности, кроме унитарности преобразования, приводит к тому, что свободная частица может быть лишь в состояниях с определенными значениями физических величин. Доказательство хорошо известных зако-

нов сохранения энергии и импульса в § 2 проводится, исходя из этого, единого для всей статьи, подхода. Обладание свободной частицей определенными энергией и импульсом, как и следовало ожидать, следует из однородности четырехмерного пространства. Наряду с однородностью, пространство обладает также и свойством изотропности – все направления в нем эквивалентны. Изотропность трехмерного пространства и её следствия рассмотрены в § 3. Показано, что корректное квантовомеханическое рассмотрение приводит к сохранению проекции на произвольную ось z и квадрата полного момента количества движения, определенного в соотношении (8). Этот результат существенно отличается от укоренившегося представления [1,2] о сохранении $\vec{L}^2$ (для бесспиновых частиц) или $\vec{L}^2 + \vec{S}$, как следствия изотропности трехмерного пространства. Он получится также, если вместо постоянства плотности вероятности изотропность пространства понимать в традиционном смысле [1], требуя, чтобы преобразованная при вращении волновая функция оставалась собственной функцией оператора Гамильтона. Необходимо учесть лишь факт, что в трехмерном координатном пространстве имеет определенное направление не только радиус-вектор, но и импульс и спин, и что все они окажутся повернутыми в новой системе координат на одинаковый угол. Естественное сохранение полного момента $\vec{J} = \vec{L}^2 + \vec{L}^P + \vec{S}$ вместо $\vec{L}^2 + \vec{S}$ обеспечивает возможность не только изотропности пространства, но совместно с этим и его однородности. Полная волновая функция свободных частиц преобразуется по неприводимым представлениям как группы трансляций, так и группы вращений в трехмерном пространстве. Ситуация коренным образом отличается от прежней. Свободная частица может быть в состоянии с определенными значения-

ми одновременно энергии, импульса и полного момента. Поскольку свободная частица обладает определенным импульсом, при традиционном понимании [1] изотропности она не могла обладать определенным моментом. Полная волновая функция не являлась собственной функцией оператора $\vec{L}^2 + \vec{S}$. Приходилось частицы классифицировать, исходя из спиновой части волновой функции. Но и при таком непоследовательном подходе положение оставалось неудовлетворительным. Спиновая часть решения свободного уравнения Дирака есть базис представления группы вращений, генерируемого не оператором $\vec{S}$, а оператором $\vec{L}^P + \vec{S}$. В § 4, используя выражение (29), выведенное автором для известного решения уравнения Дирака, непосредственно доказывается, что оно образует базис представления группы вращений, генерируемого оператором $\vec{J}$. Для решения уравнения Дирака квантовое число квадрата $J = 1/2$, проекция $\vec{J}$, как следует из общего рассмотрения § 3, сохраняется на произвольно выбранную ось z [4]. Правильнее было бы говорить, что уравнение Дирака описывает частицы не со спином, равным половине ($S = 1/2$), а с полным моментом, равным половине (биспином $J = 1/2$), поскольку сохраняющейся величиной является не $\vec{S}$, а $\vec{J}$. В рамках развиваемого подхода легко разрешается парадокс (§ 5), заключающийся в том, что свободные частицы не могут иметь определенный момент по традиционным представлениям.

Естественно, что все ценное, которое имеется в квантовой механике, остается и при нынешнем подходе. В частности, в присутствии центрально-симметричного поля, поскольку пространство остается изотропным, сохраняется опять полный момент $\vec{J}$, который сводится в этом случае к $\vec{L}^2 + \vec{S}$. Так что, проверенные опытом, известные решения в центрально-симметричном поле

остаются понятными и теперь.

Рассмотрение оставшегося специального преобразования Лоренца в §§ 6 и 7 завершает полноту картины. Хорошо известно, что в случае этого преобразования (см., например, [5]) вращаются два вектора. Вектор, связанный со временем и проекцией радиуса - вектора на направление движения и вектор, связанный с энергией - импульсом. Положение здесь полностью аналогично рассмотренному в §§ 3 - 5 случаю преобразования вращений в трехмерном пространстве, когда вращаются три вектора. Однако, к сожалению, до сих пор не был осознан тот факт, что оператор преобразования Лоренца R^4 (59) должен содержать два оператора $L^t = -i\hbar\partial/\partial\varphi_x$ и $L^E = -i\hbar\partial/\partial\varphi_M$ "моментов", связанных с вращением этих двух векторов (как и факт, что R содержит три оператора $\vec{L}^r$, $\vec{L}^p$ и $\vec{S}$, связанных с вращением упомянутых трех векторов). Из-за мнимости угла поворота при специальном преобразовании Лоренца, изотропность подпространства - "плоскости", образованной осью времени и направлением движения, не приводит к сохранению физической величины для произвольных свободных частиц. Для скалярных частиц $J^4\psi = 0$ ($J^4 = L^t + L^E$). В случае решения уравнения Дирака воздействие J приводит к матрице $-\hbar\alpha_p/2$ (65). Исключение составляют лишь частицы, описывающиеся уравнением Вейля. Для них изотропность "плоскости" приводит к сохранению спиральности (74), которая положительна для частиц и отрицательна для античастиц.

Изложенная в статье теория имеет ряд очевидных применений в экспериментальной физике в настоящее время [4].

2. Сохранение энергии и импульса

Приведем сначала доказательство хорошо известных законов сохранения энергии и импульса, исходя из единого подхода.

Рассмотрим однородность четырехмерного пространства, означающую эквивалентность всех положений, получающихся друг из друга параллельным переносом.

Волновая функция свободной частицы после бесконечно малого параллельного переноса выразится через начальную следующим образом

$$\psi(t+\delta t, \vec{r}+\delta\vec{r}) = (1+\delta t\,\partial/\partial t + \delta\vec{r}\,\vec{\nabla})\psi(t,\vec{r}). \qquad (1)$$

Введя операторы энергии и импульса $H = i\hbar\partial/\partial t$ и $\vec{P} = -i\hbar\vec{\nabla}$ из (I) (а также разложением $\psi(t', \vec{r}')$ в ряд Тейлора) при параллельном переносе на конечные расстояния $\tau = t' - t$, $\vec{\rho} = \vec{r}' - \vec{r}$, получим

$$\psi(t', \vec{r}') = T\psi(t,\vec{r}), \qquad (2)$$

где

$$T = e^{-i(\tau H - \vec{\rho}\vec{P})/\hbar} \qquad (3)$$

- оператор трансляции. Из однородности пространства следует постоянство плотности вероятности при параллельном переносе. То есть,

$$|\psi(t', \vec{r}')|^2 = |\psi(t,\vec{r})|^2. \qquad (4)$$

Следовательно функция $\psi(t', \vec{r}')$ может отличаться от $\psi(t,\vec{r})$ лишь постоянным фазовым множителем. Записав этот множитель в

виде $e^{-i(\tau E - \vec{P}\vec{r})/\hbar}$, где E и $\vec{P}$ постоянные, получим

$$e^{-i(\tau H - \vec{P}\vec{R})/\hbar}\,\psi_{E,\vec{P}}(t,\vec{r}) = e^{-i(\tau E - \vec{P}\vec{r})/\hbar}\,\psi_{E,\vec{P}}(t,\vec{r}), \quad (5)$$

т.е. сохранение энергии и импульса свободных частиц

$$H\psi_{E,\vec{P}}(t,\vec{r}) = E\,\psi_{E,\vec{P}}(t,\vec{r}),\ \vec{P}\,\psi_{E,\vec{P}}(t,\vec{r}) = \vec{P}\,\psi_{E,\vec{P}}(t,\vec{r}). \quad (6)$$

Из выражений (2), (3) и (5) следует, что ψ преобразуется по неприводимому представлению группы трансляций.

3. Сохранение полного момента

Рассмотрение изотропности пространства, т.е. эквивалентности всех направлений в нем, несколько сложнее. Ограничимся пока вращениями в трехмерном координатном пространстве.

Особенность здесь заключается в том, что мы вместо одного должны рассматривать три вектора $\vec{r}$, $\vec{P}$, $\vec{S}$.

Действительно, $\vec{P}$ и $\vec{S}$ являются векторами в импульсном и спиновом пространствах, соответственно. Но наряду с этим они имеют определенное направление и в координатном пространстве. При вращении системы координат на угол $-\delta\vec{\varphi}$, все три окажутся повернутыми в новой системе на угол $\delta\vec{\varphi}$. Этот факт следует также из известной инвариантности скалярных произведений $(\vec{r}\vec{P})$ и $(\vec{r}\vec{S})$ при поворотах (поскольку $\vec{r}$ вращается $\vec{P}$ и $\vec{S}$ должны вращаться, чтобы эти произведения не изменялись).

Учтем, что $\delta\vec{r} = [\delta\vec{\varphi}\vec{r}]$, $\delta\vec{P} = [\delta\vec{\varphi}\vec{P}]$ и примем во внимание известное свойство волновой функции при повороте спина

Тогда в новой системе после поворота волновая функция, зависящая от векторов $\vec{r}$, $\vec{P}$, $\vec{S}$, запишется в виде

$$\psi(\vec{r}+\delta\vec{r},\vec{P}+\delta\vec{P},\vec{S}+\delta\vec{S}) = (1+[\delta\vec{\varphi}\vec{r}]\vec{\nabla}_r+[\delta\vec{\varphi}\vec{P}]\vec{\nabla}_P+$$

$$+\delta\vec{\varphi}i\vec{S}/\hbar)\ \psi(\vec{r},\vec{P},\vec{S}) = \left\{1+\delta\vec{\varphi}([\vec{r}\vec{\nabla}_r]+[\vec{P}\vec{\nabla}_P]+\right. \quad (7)$$

$$\left.+i\vec{S}/\hbar)\right\}\psi(\vec{r},\vec{P},\vec{S}).$$

Введем оператор полного момента

$$\vec{J} = \vec{L}^r + \vec{L}^P + \vec{S}, \quad (8)$$

где $\vec{L}^r = -i\hbar[\vec{r}\vec{\nabla}_r]$, $\vec{L}^P = -i\hbar[\vec{P}\vec{\nabla}_P]$, $\vec{S}$ – оператор спина. Оператор $\vec{L}^P$ действует на углы ϑ_P, φ_P, определяющие направление импульса в трехмерном координатном пространстве. При вращении на угол φ вокруг произвольного направления, выбранного в качестве оси z, из (7) получим

$$\psi(\vec{r}',\vec{P}',\vec{S}') = R_z\,\psi(\vec{r},\vec{P},\vec{S}), \quad (9)$$

где

$$R_z = e^{i\varphi J_z/\hbar} \quad (10)$$

есть оператор вращения. Из изотропности пространства следует постоянство плотности вероятности при вращении. То есть,

$$|\psi(\vec{r}',\vec{P}',\vec{S}')|^2 = |\psi(\vec{r},\vec{P},\vec{S})|^2. \quad (11)$$

Следовательно $\psi(\vec{r}',\vec{P}',\vec{S}')$ может отличаться от $\psi(\vec{r},\vec{P},\vec{S})$ лишь постоянным фазовым множителем. Записав этот множитель в виде $e^{i\varphi\mu}$, получим

$$e^{i\varphi J_z/\hbar}\,\psi_\mu(\vec{\tau},\vec{P},\vec{S}) = e^{i\varphi\mu}\,\psi_\mu(\vec{\tau},\vec{P},\vec{S}). \qquad (12)$$

Из (12) следует сохранение проекции полного момента (8) для свободных частиц

$$J_z\psi_\mu(\vec{\tau},\vec{P},\vec{S}) = \hbar\mu\,\psi_\mu(\vec{\tau},\vec{P},\vec{S}). \qquad (13)$$

Используя метод теории момента количества движения с оператором $\vec{L}^{\vec{\tau}}[I]$ можно показать, что из определения (8) и соотношения (13) следует также сохранение квадрата $\vec{J}$

$$\vec{J}^2\psi_\mu(\vec{\tau},\vec{P},\vec{S}) = \hbar^2 J(J+1)\psi_\mu(\vec{\tau},\vec{P},\vec{S}), \qquad (14)$$

где $\mu = -J(-J+1)\ldots J-1,\ J$ и соотношения

$$J_q\psi_{J\mu} = [J(J+1)]^{1/2}\sum_{\mu'} <J\mu,\ 1q|J\mu'>\psi_{J\mu'}, \qquad (15)$$

где $q = -1, 0, 1$, $J_0 = J_z$, $J_{\pm1} = \mp(J_x \pm iJ_y)/\sqrt{2}$

Из выражений (9), (10) и (12) следует, что $\psi_{J\mu}$ представляет собой базис неприводимого представления группы вращений. Для свободных частиц $J = S$.

Заметим, что при вращении вокруг осей x или y для волновой функции со свойством (13) не имеет место постоянство плотности вероятности. Это обстоятельство связано с некоммутативностью вращений вокруг осей x и z (или y и z на произвольные углы. Действительно, при поворотах на углы $\pi/2$ в правой системе координат положительное направление

оси z перейдет в положительное направление оси x при последовательных операциях вокруг осей z и x и в отрицательное направление оси y при операциях с обратной последовательностью. Следствием некоммутативности операций вращений является некоммутативность операторов проекций полного момента J_x, J_y, J_z, вытекающая из (15). Если бы неизменность локальной вероятности (11) одновременно с R_z имела бы место и для R_x, то в результате вращений $R_z R_x$ или $R_x R_z$ мы получили бы точно одну и ту же функцию, независимо от углов вращения. То есть мы должны были бы прийти в одну и ту же точку, чего не имеет место согласно сказанному выше.

Таким образом, при повороте вокруг произвольного направления для собственной функции $J_z\ \psi_{J\mu}$ имеет место лишь более слабое по сравнению с (11), хорошо известное (см. например, [2,3]) условие сохранения полной вероятности

$$\Sigma\int|\psi(\vec{\tau}',\vec{P}',\vec{S}')|^2 d\vec{\tau}' = \Sigma\int|\psi(\vec{\tau},\vec{P},\vec{S})|^2 d\vec{\tau}. \qquad (16)$$

Здесь суммирование проводится по переменным спиновой части. Следствием (16) является унитарность оператора вращения вокруг произвольного (вообще говоря, не совпадающего с осью z) направления, действующего на $\psi_{J\mu}$

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = e^{i\alpha J_z/\hbar}\,e^{i\beta J_y/\hbar}\,e^{i\gamma J_z/\hbar} \qquad (17)$$

$$R(\alpha,\beta,\gamma)\psi_{J\mu} = \sum_{\mu'} D^J_{\mu'\mu}(\alpha,\beta,\gamma)\psi_{J\mu'}.$$

Здесь α, β, γ – углы Эйлера, D – функции определяют матрицу вращения.

Из (8), (10) и (17) следует, что

$$R = R^{\vec{L}} \cdot R^{\vec{P}} \cdot R^{\vec{S}}, \qquad (18)$$

где $R^{\vec{L}}$, $R^{\vec{P}}$ и $R^{\vec{S}}$ отличаются от R заменой $\vec{J}$ на $\vec{L}$, $\vec{P}$ и $\vec{S}$, соответственно. То есть, оператор вращения представляется в виде произведения трех операторов, действующих на радиус-вектор, импульс и спин. Таким образом, из изотропности трехмерного пространства следует сохранение физических величин--квадрата и проекции полного момента. Отсюда следует также сохранение проекции спина на направление движения. Волновые функции всех свободных частиц и частиц в центрально-симметричном поле при вращениях в трехмерном пространстве преобразуются по неприводимым представлениям группы SO_3, генерируемым оператором (8). Для каждого типа частиц в этом можно убедиться непосредственным рассмотрением волновых функций. Собственные значения $\vec{J}^2$ и J_z, а также оператор и матрицу конечных вращений мы рассмотрим на примере известного решения свободного уравнения Дирака. Здесь уместно упомянуть о замечании Вигнера относительно невозможности доказательства того, что это решение преобразуется по неприводимым представлениям группы вращений, исходя из традиционного подхода $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ [2]

4. Решения уравнения Дирака как базис представления группы вращений. Биспин

В этом параграфе, независимо от способа общего рассмотрения § 3, мы покажем, что для свободных частиц, описывающихся уравнением Дирака 1) J_z и $\vec{J}^2$ сохраняются, 2) волновые

функции являются базисом представления группы вращений, генерируемого оператором (8). В решении уравнения Дирака [6]

$$\psi_\mu = \frac{1}{\sqrt{V}} U_\mu \exp\left[i(\vec{p}\vec{r} - Et)/\hbar\right] \qquad (19)$$

U_μ – биспинор, четырехкомпонентная величина, которая при $E > 0$ записывается в виде

$$U_\mu = N \begin{pmatrix} v_\mu \\ w_\mu \end{pmatrix}, \qquad (20)$$

где $N = [(1 + Mc^2/E)/2]$, v_μ – собственная функция оператора спина: $S_z v_\mu(\lambda) = \hbar\mu\, v_\mu(\lambda)$, λ – спинорный индекс,

$$w_\mu(\lambda) = \frac{2c(\vec{S}\vec{P})}{\hbar(E + Mc^2)} v_\mu(\lambda). \qquad (21)$$

Применяя обозначения $S_0 = S_z$, $S_{\pm 1} = \mp (S_x \pm i S_y)/\sqrt{2}$ и учитывая, что

$$(\vec{S}\vec{P})\, v_\mu(\lambda) = \sum_\sigma (\vec{S}\vec{P})_{\sigma\mu} v_\sigma(\lambda) = \sum_{m,\sigma} [(-1)^m S_{-m} P_m]_{\sigma\mu} v_\sigma(\lambda) =$$

$$= \sum_{m,\sigma} [(-1)^m S_{-m} P \sqrt{4\pi/3}\, Y_{1m}(\vartheta_p \varphi_p)]_{\sigma\mu} v_\sigma(\lambda) = \sqrt{4\pi/3}\, P \times \qquad (22)$$

$$\times \sum_{m,\sigma} (-1)^m (S_{-m})_{\sigma\mu} Y_{1m}(\vartheta_p \varphi_p) v_\sigma(\lambda) = \sqrt{\pi}\, \hbar p \times$$

$$\times \sum_{m,\sigma} \langle 1/2\, \sigma, 1m \,|\, 1/2\, \mu \rangle Y_{1m}(\vartheta_p \varphi_p) v_\sigma(\lambda),$$

где $p = |\vec{P}|$, ϑ_p и φ_p – углы, определяющие направление импульса, $\langle 1/2\, \sigma, 1m \,|\, 1/2\, \mu \rangle$ – коэффициент векторного сложения,

согласно выражениям(20) и (2I), биспинор можно представить в виде [4]

$$U_\mu(L,\lambda)=\sqrt{2\pi[1+(-1)^L/\gamma]}\sum_{m,\sigma}\langle S\sigma, Lm|J\mu\rangle Y_{Lm}(\vartheta_p\varphi_p)U_\sigma(\lambda). \quad (23$$

Здесь $L=0,1$, $\lambda=1/2$, $-1/2$, $S=J=1/2$, $\gamma=E/Mc^2$.

Условие ортонормированности принимает вид:

$$\sum_{L,\lambda} U^*_{\mu'}(L,\lambda)U_\mu(L,\lambda)=\delta_{\mu'\mu}. \quad (24$$

Воспользуемся известным разложением плоской волны по сферическим функциям

$$e^{i\vec{p}\vec{r}/\hbar}=\sum_{L_1m_1} g_{L_1}(pr/\hbar)(-1)^m Y_{L_1-m_1}(\vartheta_p\varphi_p)Y_{L_1m_1}(\vartheta_r\varphi_r), \quad (25)$$

где радиальная функция $g_L(pr/\hbar)$ равна

$$g_{L_1}(pr/\hbar)=(2\pi)^{3/2}i^{L_1}\frac{J_{L_1+1/2}(pr/\hbar)}{\sqrt{pr/\hbar}} \quad (26)$$

($J_{L+1/2}(z)$ - функция Бесселя).

Подставляя (23) и (25) в выражение (I9) и учитывая, что

$$Y_{Lm}(\vartheta_p\varphi_p)Y_{L_1-m_1}(\vartheta_p\varphi_p)=\sum_{L_2m_2}\left[\frac{(2L+1)(2L_1+1)}{4\pi(2L_2+1)}\right]^{1/2}\times \quad (27)$$

$$\times\langle L0, L_10|L_20\rangle\langle Lm, L_1-m_1|L_2m_2\rangle Y_{L_2m_2}(\vartheta_p\varphi_p),$$

$$(-1)^{m_1}\langle Lm, L_1-m_1|L_2m_2\rangle=(-1)^{L_1}(2L_2+1)^{1/2}(2L+1)^{-1/2}\langle L_1m_1, L_2m_2|Lm\rangle, \quad (28)$$

выразим волновую функцию через ряды Клебша-Гордана

$$\psi_\mu=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{L_1L_2}(-1)^{L_1}\left\{[1+(-1)^L/\gamma](2L_1+1)/2\right\}^{1/2}\langle L0, L_10|L_20\rangle\times$$

$$\times g_{L_1}(pr/\hbar)\sum_{m\sigma}\langle S\sigma, Lm|J\mu\rangle U_\sigma(\lambda)\sum_{m_1m_2}\langle L_1m_1, L_2m_2|Lm\rangle\times \quad (29)$$

$$\times Y_{L_1m_1}(\vartheta_r\varphi_r)Y_{L_2m_2}(\vartheta_p\varphi_p)\exp(-iEt/\hbar).$$

Функции $Y_{L_1m_1}(\vartheta_r\varphi_r)$, $Y_{L_2m_2}(\vartheta_p\varphi_p)$ и $U_\sigma(\lambda)$ -собственные функции квадрата и третьей проекции операторов моментов количества движения $\vec{L}^r$, $\vec{L}^p$ и $\vec{S}$.

$$L^r_qY_{L_1m_1}(\vartheta_r\varphi_r)=[L_1(L_1+1)]^{1/2}\sum_{m_1'}\langle L_1m_1, 1q|L_1m_1'\rangle Y_{L_1m_1'}(\vartheta_r\varphi_r), \quad (30)$$

$$L^p_qY_{L_2m_2}(\vartheta_p\varphi_p)=[L_2(L_2+1)]^{1/2}\sum_{m_2'}\langle L_2m_2, 1q|L_2m_2'\rangle Y_{L_2m_2'}(\vartheta_p\varphi_p), \quad (31)$$

$$S_qU_\sigma(\lambda)=[S(S+1)]^{1/2}\sum_{\sigma'}\langle S\sigma, 1q|S\sigma'\rangle U_{\sigma'}(\lambda). \quad (32)$$

Здесь $q=-1, 0, 1$.

Воздействуя на выражение (29) операторами J_z и $\vec{J}^2$, в силу (8) и (30)-(32) получим

$$J_z\psi_\mu=\hbar\mu\psi_\mu \quad (33)$$

$$\vec{J}^2\psi_\mu=\hbar^2J(J+1)\psi_\mu \quad , \quad J=1/2. \quad (34)$$

То есть ψ является собственной функцией J_z и $\vec{J}^2$. $\hbar\mu$ является собственным значением проекции $\vec{J}$ на произвольную ось z . Собственное значение квадрата полного момента в рассмат-

риваемом случае равно $1/2\,(1/2+1)\,\hbar^2$. Соответствующая сохраняющаяся величина для частиц, описывающихся уравнением Дирака, в работе [4] была названа биспином.

Использование сохранения J_z при произвольности направления оси z дало возможность в работе [4] вычислить вероятность испускания электронов при распаде поляризованных связанных $\mu^{\pm}$ – мезонов в магнитном поле.

Воздействуем на функцию (29) оператором вращения (I7), учитывая, что $Y_{L_1 m_1}(\vartheta_r \varphi_r)$, $Y_{L_2 m_2}(\vartheta_p \varphi_p)$ и $U_\sigma(\lambda)$ являются базисами представлений группы вращений, преобразуясь через соответствующие D -функции

$$R^r Y_{L_1 m_1}(\vartheta_r \varphi_r) = \sum_{m_1'} D^{L_1}_{m_1' m_1}(\alpha\beta\gamma)\, Y_{L_1 m_1'}(\vartheta_r \varphi_r),$$

$$R^p Y_{L_2 m_2}(\vartheta_p \varphi_p) = \sum_{m_2'} D^{L_2}_{m_2' m_2}(\alpha\beta\gamma)\, Y_{L_2 m_2'}(\vartheta_p \varphi_p), \qquad (35)$$

$$R^s U_\sigma(\lambda) = \sum_{\sigma'} D^{s}_{\sigma'\sigma}(\alpha\beta\gamma)\, U_{\sigma'}(\lambda) .$$

Здесь α , β , γ – углы Эйлера, обуславливающие вращение. Для D – функций, определяющих матрицы вращения, имеют место соотношения [7] .

$$D^{L_1}_{m_1' m_1} D^{L_2}_{m_2' m_2} = \sum_{L' m' m} \langle L_1 m_1', L_2 m_2' | L' m' \rangle D^{L'}_{m' m} \langle L_1 m_1, L_2 m_2 | L' m \rangle,$$

$$D^{s}_{\sigma'\sigma}\, D^{L}_{m' m} = \sum_{J' \mu' \mu} \langle s\sigma', L m' | J' \mu' \rangle D^{J'}_{\mu' \mu} \langle s\sigma, L m | J' \mu \rangle . \qquad (36)$$

Из выражений (I7), (I8), (29), (35) и (36) следует, что

$$R\psi_\mu = \sum_{\mu'} D^{J}_{\mu' \mu}(\alpha, \beta, \gamma)\, \psi_{\mu'} , \qquad (37)$$

т.е. решение уравнения Дирака при вращениях в трехмерном пространстве преобразуется по неприводимому представлению группы SO_3 , генерируемому оператором (8), с квантовым числом квадрата $J = 1/2$.

Заметим, что для скалярной частицы, используя лишь разложение (25) , таким же образом можно показать, что имеют место (33), (34) и (37) с $J = 0$.

5. Разрешение парадокса

Согласно существующим представлениям ж для свободной частицы наряду с состоянием, в котором она обладает определенными импульсом и энергией могут быть такие состояния, в которых частица обладает определенными абсолютной величиной –(квадратом) и z – компонентой момента, оператор которого есть $\vec{L}^r$. В нерелятивистском приближении решение уравнения Шредингера приводит к волновым функциям

$$\psi_{E L m} = R_{E L}(r)\, Y_{L m}(\vartheta_r \varphi_r) , \qquad (38)$$

где

$$R_{E L}(r) = \sqrt{\frac{\kappa}{r}}\, J_{L+1/2}(\kappa r) . \qquad (39)$$

ж см. например, книгу Ландау и Лифшица [I] § 33.

$K = P/\hbar = \sqrt{2ME}/\hbar$. Таким образом, для выражения (38) имеют место

$$H\psi_{E\ell m} = E\psi_{E\ell m}\,, \tag{40}$$

$$\vec{L}^2\psi_{E\ell m} = \hbar^2 \ell(\ell+1)\psi_{E\ell m}\,, \tag{41}$$

$$L_z\psi_{E\ell m} = \hbar m \psi\,. \tag{42}$$

Сохранение момента с оператором $\vec{L}^2$ следует из традиционного представления об изотропности пространства (см.I § 24). Однако легко видеть, что в состояниях, описываемых функцией (38) импульс (конкретнее – его направление) не сохраняется. Действительно, воспользовавшись разложением (25), представляя (38) в виде

$$\psi_{E\ell m} = \frac{i^\ell}{(2\pi)^{3/2}\hbar}\int Y_{\ell m}(\vartheta_p\varphi_p)\, e^{i\vec{p}\vec{r}/\hbar}\, d\Omega_p \tag{43}$$

видим, что $\psi_{E\ell m}$ не является собственной функцией оператора $-i\hbar\vec{\nabla}_r$. То есть, следствие изотропности пространства в традиционном представлении не совместимо со следствием однородности пространства (6). Кроме того, что не менее важно, оно находится в противоречии с принципом соответствия. Результаты, получаемые в квантовой механике, должны совпасть с результатами классической физики в границах её применимости.

Утверждение о сохранении момента с оператором $\vec{L}^2$ (и следовательно возможности несохранения импульса) для свободной частицы не согласуется с первым законом Ньютона, который гласит, что каждое тело продолжает оставаться в состоянии покоя

или прямолинейно равномерного движения, пока другие тела не вывели его из этого состояния.

Причиной противоречия является упущение факта, что наряду с радиус-вектором в координатном пространстве имеют направление импульс и спин, вследствие чего изотропность пространства для свободной частицы приводит к сохранению физической величины, оператор которого является не $\vec{L}^2$, а $\vec{L}^2 + \vec{L}^p + \vec{S}$, т.е. полного момента (см. § 3). Таким образом, состояния, описываемые функцией (38), в природе не осуществляются. Кстати, это выражение не используется в конкретных расчетах, результаты которых претендуют на сравнение с экспериментом.

Для свободных частиц пространство и однородно и изотропно, вследствие чего их волновая функция есть собственная функция и операторов энергии и импульса (6) и полного момента (8). В том, что эти требования совместимы, мы убедились на примере решения релятивистского уравнения Дирака в § 4. Не представляет трудности убедиться в этом и в других конкретных случаях.

Операторы $\vec{J}$ и $\vec{P}$ имеют общую волновую функцию, хотя и не коммутируют. То есть, известная теорема, утверждающая невозможность такой ситуации, не имеет места. Это связано с нарушением её условия, предполагающего, что ни один из операторов не действует на собственное значение другого .($\hat{L}\hat{M}\psi_{LM} = \hat{L}M\psi_{LM}$, $\hat{M}\hat{L}\psi_{LM} = ML\psi_{LM}$, если бы $\hat{L}$ не действовал на M , то $(\hat{L}\hat{M}-\hat{M}\hat{L})\psi = 0$, $\psi = \Sigma a_{LM}\psi_{LM}$). Здесь же $\vec{J}$ действует на собственное значение оператора импульса.

При наличии внешнего поля, вообще говоря, нарушаются однородность и изотропность пространства. Однако, в частном случае центрально симметричного поля изотропность трехмерного про-

странства остается наряду с однородностью оси времени. При движении частицы в таком поле импульс не сохраняется, сохраняются энергия и полный момент (8). Последний сводится в этом случае к $\vec{L}^{r} + \vec{S}$, поскольку в результате воздействия $\vec{L}^{p}$ на волновую функцию получается нуль из-за независимости этой функции от ϑ_p, φ_p [6]. Значения квантового числа квадрата $\vec{J}$ задаются соотношениями $L - S \le J \le L + S$ при $S \le L$ и $S - L \le J \le S + L$ при $S \ge L$.

6. Специальное преобразование Лоренца

Для исчерпания рассматриваемой проблемы остается рассмотрение следствия изотропности при вращении в подпространстве четырехмерного пространства – "плоскости", образованной осями времени и направления движения. При вращении в этой плоскости две компоненты четырехмерного радиуса вектора, перпендикулярные направлению движения, не преобразуются. Остальная часть, которую мы обозначим через $\vec{x}$, преобразуется как двухмерный

$$\vec{x} = \hat{t}\,ct + \hat{P}\,i r_{\vec{p}}\,, \qquad (44)$$

где $r_{\vec{p}}$ – проекция радиуса вектора на направление движения, $\hat{t}$ и $\hat{p}$ взаимно ортогональные единичные векторы.

Преобразования

$$ct' = ct\cos\varphi - i r_{\vec{p}} \sin\varphi \qquad (45)$$
$$i r'_{\vec{p}} = ct \sin\varphi + i r_{\vec{p}} \cos\varphi$$

можно записать с помощью этого вектора, если учесть, что согласно (44)

$$ct = x\cos\varphi_x\,, \qquad i r_{\vec{p}} = x \sin\varphi_x\,, \qquad (46)$$

$$\varphi_x = \operatorname{arctg} \frac{i r_{\vec{p}}}{ct}\,. \qquad (47)$$

Длина вектора $\vec{x}$ является инвариантом преобразования $(ct)^2 + (i r_{\vec{p}})^2 = x^2$. Подставляя (46) в (45) получим

$$ct' = x\cos(\varphi_x + \varphi)\,, \qquad i r'_{\vec{p}} = x \sin(\varphi_x + \varphi)\,. \qquad (48)$$

Теперь по аналогии с очевидным случаем вращения в трехмерном подпространстве (§ 3) мы должны принять, что существует еще вектор, который наряду с $\vec{x}$ вращается при повороте системы координат.

Указанным вектором является $\vec{M}c^2$. Для него имеют место соотношения

$$\vec{M}c^2 = \hat{t}\,E + \hat{P}\,ipc\,,$$

$$E = Mc^2\cos\varphi_M\,, \qquad ipc = Mc^2 \sin\varphi_M\,, \qquad (50)$$

$$\varphi_M = \operatorname{Arctg} \frac{ipc}{E}\,, \qquad E^2 + (ipc)^2 = M^2c^4\,. \qquad (51)$$

Обозначая $v = Pc^2/|E|$, имеем

при $E > 0$ $\quad \varphi_M = \operatorname{acctgi} \frac{v}{c} = i \operatorname{arcth} \frac{v}{c}\,,$

при $E < 0$ $\quad \varphi_M = \pi - \operatorname{arctgi} \frac{v}{c} = \pi - i \operatorname{arcth} \frac{v}{c}\,. \qquad (51a)$

При преобразовании Лоренца вектор $\vec{M}c^2$ поворачивается в новой системе на тот же угол φ, что и вектор $\vec{x}$

$$E' = Mc^2\cos(\varphi_M + \varphi)\,, \qquad ip'c = Mc^2 \sin(\varphi_M + \varphi)\,. \qquad (51б)$$

Учитывая (аналогично трехмерному случаю), что $\delta\vec{x} = [\delta\vec{\varphi}\,\vec{x}]$ и $\delta\vec{M}c^2 = [\delta\vec{\varphi}\,\vec{M}c^2]$ в новой системе после поворота волновая функция, зависящая от векторов $\vec{x}$, $\vec{M}c^2$ запишется в виде

$$\psi(\vec{x}+\delta\vec{x},\ \vec{M}c^2+\delta\vec{M}c^2) = (1+[\delta\vec{\varphi}\,\vec{x}]\,\vec{\nabla}_x + \\ +[\delta\vec{\varphi}\,\vec{M}c^2]\,\vec{\nabla}_{Mc^2})\,\psi(\vec{x},\vec{M}c^2) = \\ =\left\{1+\delta\vec{\varphi}\,([\vec{x}\,\vec{\nabla}_x]+[\vec{M}c^2\vec{\nabla}_{Mc^2}])\right\}\psi(\vec{x},\vec{M}c^2). \tag{52}$$

Введем оператор полного момента для вращения в рассматриваемой плоскости

$$\vec{J}^4 = \vec{L}^t + \vec{L}^E, \tag{53}$$

где

$$\vec{L}^t = -i\hbar[\vec{x}\,\vec{\nabla}_x], \qquad \vec{L}^E = -i\hbar[\vec{M}c^2\vec{\nabla}_{Mc^2}]. \tag{54}$$

Учитывая, что согласно (44), (45), (46), (48), (50) и (54)

$$\vec{L}^t = -i\hbar[\hat{t}\,\hat{P}]\left(ct\frac{\partial}{\partial i\tau_{\vec{P}}} - i\tau_{\vec{P}}\frac{\partial}{\partial ct}\right) = [\hat{t}\,\hat{P}]\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi_x}\right) = [\hat{t}\,\hat{P}]\,L^t \tag{55}$$

$$\vec{L}^E = [\hat{t}\,\hat{P}]\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi_M}\right) = [\hat{t}\,\hat{P}]\,L^E, \tag{56}$$

$$\delta\vec{\varphi} = [\hat{t}\,\hat{P}]\,\delta\varphi \tag{57}$$

для вращения на конечный угол φ из (52) получим

$$\psi(\vec{x}',\vec{M}'c^2) = R^4\psi(\vec{x},\vec{M}c^2), \tag{58}$$

где

$$R^4 = e^{i\varphi J^4/\hbar} \tag{59}$$

оператор преобразования Лоренца (вращения в рассматриваемой плоскости),

$$J^4 = L^t + L^E, \tag{60}$$

$$L^t = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi_x}, \qquad L^E = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi_M}, \tag{61}$$

$$R^4 = R^t\cdot R^E, \qquad R^t = e^{i\varphi L^t/\hbar}, \qquad R^E = e^{i\varphi L^E/\hbar}. \tag{62}$$

Согласно (53–57) $\vec{L}^t$, $\vec{L}^E$ и $\vec{J}^4$ направлены перпендикулярно к направлению движения и умножаясь на $\vec{\varphi}$ дают скалярные величины. Специальное преобразование Лоренца заключается в переходе к системе координат, движущейся относительно первоначальной со скоростью $\vec{v}$. Согласно (45) $-iv/c = tg\varphi$, т.е. в выражении (59) $i\varphi = arcth\,v/c$. Из-за мнимости φ изотропность не приводит, вообще говоря, к сохранению отличной от нуля физической величины. Исключение составляют лишь частицы, описывающиеся уравнением Вейля (см.§ 6). При специальном преобразовании Лоренца решения уравнения Дирака постоянство плотности вероятности не имеет места. Это преобразование имеет вид

$$\psi_{v,\lambda}(t',\vec{\tau}',E',\vec{P}',s,J,J_z) = e^{i\varphi(L^t+L^E)/\hbar}\psi_{v,\lambda}(t,\vec{\tau},E,\vec{P},s,J,J_z), \tag{63}$$

где решение свободного уравнения Дирака

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{e^{-i[\varphi_M - (1-2\xi)\pi/2]\alpha_p/2}}{\sqrt{chi2\xi[\varphi_M - (1-2\xi)\pi/2]}} \upsilon_\mu(\lambda)\chi_\xi(\nu) e^{-iMc\chi\cos(\varphi_M - \varphi_\chi)/\hbar} \quad (64)$$

Здесь $\xi = E/2|E|$, $\chi_\xi(\nu) = \delta_{\xi\nu}$ –спинор в пространстве орбитального момента [5] , $\alpha_p = \beta_\chi 2S_p/\hbar$ –матрица Дирака , $\beta_\chi \chi_\xi(\nu) = \chi_{-\xi}(\nu)$, $-iMc\chi\cos(\varphi_M - \varphi_\chi) = -iMc\chi(\cos\varphi_M\cos\varphi_\chi + \sin\varphi_M\sin\varphi_\chi) = -i(Et - \vec{P}\vec{r})$, согласно (46) и (50). $\sqrt{V}\sqrt{chi2\xi[\varphi_M - (1-2\xi)\pi/2]} = \sqrt{V_0}$ –инвариант. Записывая (64) в виде

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} U_{\xi\mu}(\nu,\lambda)\exp[i(\vec{p}\vec{r} - 2\xi\varepsilon t)/\hbar];$$

где $U_{\xi\mu}(\nu,\lambda) = (\exp\xi\alpha_p \operatorname{arcth}\upsilon/c)\chi_\xi(\nu)\upsilon_\mu(\lambda)/\sqrt{charcth\upsilon/c}$ –биспинор , для значений величины $U_{\xi\mu}(\nu,\lambda)/N$ $(N = \sqrt{(Mc^2+\varepsilon)/\varepsilon}$, $\varepsilon = |E|$, $P_\pm = P_x \pm iP_y)$ имеем:

ν	ξ	1/2		-1/2	
	λ \ μ	1/2	-1/2	1/2	-1/2
1/2	1/2	1	0	$\frac{-P_z c}{Mc^2+\varepsilon}$	$\frac{-P_- c}{Mc^2+\varepsilon}$
	-1/2	0	1	$\frac{-P_+ c}{Mc^2+\varepsilon}$	$\frac{P_z c}{Mc^2+\varepsilon}$
-1/2	1/2	$\frac{P_z c}{Mc^2+\varepsilon}$	$\frac{P_- c}{Mc^2+\varepsilon}$	1	0
	-1/2	$\frac{P_+ c}{Mc^2+\varepsilon}$	$\frac{-P_z c}{Mc^2+\varepsilon}$	0	1

С учетом (61) выражение (63) эквивалентно разложению Тейлора, приводящему к замене в (64) φ_x и φ_M на $\varphi_x + \varphi$ и $\varphi_M + \varphi$, соответственно, в согласии с (46), (48), (50) и (51б).

В системе покоя частицы $t = t_0$, $\vec{r} = \vec{r}_0$, $E = 2\xi Mc^2$, $\vec{P} = 0$. Согласно (51а)

$$\varphi_M^\circ = (1-2\xi)\pi/2 = \begin{cases} 0 & \text{при } E > 0 \\ \pi & \text{при } E < 0 \end{cases},$$

$$[\psi_{J,\lambda}(t,\vec{r},E,\vec{P},S,J,J_z)]_{\varphi_x = \varphi_x^\circ,\ \varphi_M = \varphi_M^\circ} = \frac{1}{\sqrt{V}}\upsilon_\mu(\lambda)\chi_\xi(\nu)e^{-i2\xi Mc^2 t_0/\hbar}.$$

При переходе в систему (лабораторную), движущуюся относительно системы покоя частицы со скоростью $-\vec{\upsilon} = -\vec{P}c/E$ φ_x° и φ_M°, получат приращение $\operatorname{arctg} ipc/E = 2\xi\operatorname{arctg} i\upsilon/c = 2i\xi\operatorname{arcth}\upsilon/c$ $(\upsilon = pc^2/|E|)$, становясь $\varphi_x = \varphi_x^\circ + 2\xi\operatorname{arctg} i\upsilon/c$, $\varphi_M = (1-2\xi)\pi/2 + 2\xi\operatorname{arctg} i\upsilon/c$. В результате t_0, r_0, $2\xi Mc^2$ и 0 по формулам (46), (48), (50) и (51а) перейдут в t , $\vec{r}$, E и $\vec{P}$, соответственно.

Следствием сохранения полной вероятности является унитарность матрицы $_{\mu'\xi'}U_{\mu\xi} = {}_{\mu'\xi'}\{\exp\{-i[\varphi_M - (1-2\xi)\pi/2]\times$

$\times\alpha_p/2\}\}_{\mu\xi}/\sqrt{chi2\xi[\varphi_M - (1-2\xi)\pi/2]}$ в выражении (64). Действительно

$$_{\mu'\xi'}(U^+U)_{\mu\xi'} = \frac{_{\mu'\xi'}[e^{(\xi'+\xi)\alpha_p \operatorname{arcth}\upsilon/c}]_{\mu\xi}}{charcth\upsilon/c} =$$

$$= \frac{\delta_{\mu'\mu}\delta_{\xi'\xi}\operatorname{ch}(\xi'+\xi)\operatorname{arcth}\upsilon/c + {}_{\mu'\xi'}(\alpha_p)_{\mu\xi}(\xi'+\xi)\operatorname{sharcth}\upsilon/c}{charcth\upsilon/c} = \delta_{\mu'\mu}\delta_{\xi'\xi}.$$

Из (60), (6I), (63) и (64) следует, что

$$J^4\psi = -\frac{\hbar d_p}{2}\psi . \qquad (65)$$

Заметим, что следуя Паули [8] принято считать (см.напри - мер , [6,9]) , что при собственном преобразовании Лоренца решение уравнения Дирака преобразуется как $\psi' = S\psi$, $S = \exp(-i\varphi d_p/2)$ $\varphi = i\,\mathrm{arcth}\,v/c$. Исходя из вышеизложенного, нетрудно видеть, что это преобразование в отличие от (59) не преобразует t , $\vec{\tau}$, E , $\vec{P}$, от которых в инвариантной форме зависит плоская волна. Наряду с неточностью в доказательстве релятивистской инвариантности, в литературе [6] допущена неточность и при рассмотрении инвариантности уравнения Дирака при повороте. Второй спинор, не говоря, о полной волновой функции, не преобразуется с помощью оператора $1+i\vec{\delta}\vec{\Sigma}/2$ (см.§§ 3,4 настоящей статьи).

7. Сохранение спиральности для частиц, описывающихся уравнением Вейля

Волновая функция частиц со спином I/2, рождающихся при слабом взаимодействии, имеет вид:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\gamma_5)\psi_D , \qquad (66)$$

где ψ_D дается выражением (64). При $E \gg Mc^2$, что имеет место, в частности, для $e^{\pm}$, ν_e , $\bar{\nu}_e$, ν_μ , $\bar{\nu}_\mu$, рождающихся при распаде мюонов, волновая функция (66) практически является решением уравнения Вейля

$$-2ic(\vec{S}\vec{\nabla})\psi = E\psi . \qquad (67)$$

Действительно, учитывая, что [4] $\gamma_5 = -\beta_x$ из (50), (5Ia),(64) и (66) имеем $v = c$,

$$\psi = \frac{1}{2\sqrt{V}}\left[\chi_{1/2}(\nu)\cdot\chi_{-1/2}(\nu)\right]\left[1+2c(\vec{S}\vec{P})/\hbar E\right]v_\mu(\lambda)\exp\left[i(\vec{P}\vec{\tau}-Et)/\hbar\right], \qquad (68)$$

откуда видно, что (67) удовлетворяется.

Важность биспина особенно наглядна для частиц, описывающихся уравнением Вейля.

Записав (68) в виде

$$\psi = \frac{1}{2\sqrt{V}}\left[\chi_{1/2}(\nu)+\chi_{-1/2}(\nu)\right]\sum_{Lm,6}(-1)^{L(1-E/|E|)/2}\langle S6, Lm|J\mu\rangle \times \qquad (69)$$

$$\times Y_{Lm}(\vartheta_p\varphi_p)v_6(\lambda)\exp\left[i(\vec{P}\vec{\tau}-Et)/\hbar\right],$$

где $J = S = 1/2$, нетрудно убедиться, что как и в случае решения уравнения Дирака,

$$J_z\psi = \hbar\mu\psi , \qquad (70)$$

$$\vec{J}^2\psi = \hbar^2 J(J+1)\psi . \qquad (7I)$$

Здесь $\vec{J}$ - есть оператор полного момента, названного для рассматриваемого случая $J = I/2$, биспином [4] . $\hbar\mu$ в выражениях (68) и (69) не может рассматриваться как проекция спина. Как видно из (68), проекция спина S_z имеет определенное значение, и при том одно ($\hbar/2$ для частиц и $-\hbar/2$ для античастиц), лиш

когда ось z совпадает с направлением движения. В выражении (68), когда ось z не совпадает с направлением движения, μ может принимать два значения $\pm 1/2$. Как следует из (68) и (70), решение уравнения Вейля описывает состояния с определенными импульсом и проекцией биспина $\hbar\mu$.

Записав в выражении (68) $1+2\xi(\vec{S}\vec{P})/\hbar E = 1+4\xi(\vec{S}\vec{P})/\hbar|\vec{P}|$, поскольку

$$\rho_x[\chi_{1/2}(\nu)+\chi_{-1/2}(\nu)] = \chi_{1/2}(\nu)+\chi_{-1/2}(\nu) \qquad (72)$$

и

$$S_p[1+4\xi(\vec{S}\vec{P})/\hbar|\vec{P}|] = \hbar\xi[4\xi(\vec{S}\vec{P})/\hbar|P|+1] \quad , \qquad (73)$$

согласно (65), (66) и (68) имеем

$$J^4\psi = -\frac{\hbar\alpha_p}{2}\psi = -\beta_x S_p\psi = -S_p\psi = -\hbar\xi\psi \, . \qquad (74)$$

Для частиц, двигающихся со скоростью света из (45-48) и (5Ia) следует, что

$$\varphi_x = \varphi_x^\circ + 2\xi\,\mathrm{arctg}\,i \quad , \qquad (75)$$

$$\varphi_м = (1-2\xi)\pi/2 + 2\xi\,\mathrm{arctg}\,i \, .$$

Учитывая, что после воздействия оператора (59) фазы φ_x и $\varphi_м$ получат приращение $2\xi\,\mathrm{arctg}\,iv/c$ и

$$2\xi\,\mathrm{arctg}\,i + 2\xi\,\mathrm{arctg}\,iv/c = 2\xi\,\mathrm{arctg}\,i\frac{1+v/c}{1+v/c} = 2\xi\,\mathrm{arctg}\,i, \qquad (76)$$

то φ_x, $\varphi_м$ и следовательно волновая функция, а заодно и плотность вероятности не изменятся.

Таким образом для частиц, описывающихся уравнением Вейля,

из изотропности четырехмерного пространства следует постоянство плотности вероятности при поворотах в "плоскости", составленной осью времени и направлением движения, т.е. при специальных преобразованиях Лоренца. Последнее приводит к тому, что спиральность сохраняется и имеет знак энергии. Справедливость этого утверждения известна из экспериментов по изучению слабого взаимодействия.

Автор выражает благодарность коллегам по институту за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

I. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика, ГИТТЛ, М.-Л., I948, ФМ. М.,I963.

2. Вигнер Е. Теория групп и её приложения к квантовомеханической теории атомных спектров, ИЛ, М., I96I.

3. Мурадян Р.М.. Препринт ОИЯИ Р2-3902, I968.

4. Джрбашян В.А. ДАН СССР, 254, 5, III6, I980.

5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.. Теория поля, ГИТТЛ, М.-Л., I948.

6. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика, ГИТТЛ, М., I953, I959.

7. Бор О., Моттельсон Б. Структура атомного ядра, I, "Мир",М. I97I.

8. Паули В. Общие принципы волновой механики, ГИТТЛ, М.,-Л, I947.

9. Бъёркен Дж.Д., Дрелл С.Д. Релятивистская квантовая теория, I, "Наука", М.I978.

Рукопись поступила 3-го октября I980 г.

Редактор Л.П.Мукаян

Тех. редактор А.С.Абрамян

Заказ 848 ВФ- 03408 Тираж 299

Препринт ЕФИ Формат издания 60х-84/I6

Подписано к печати 5/XП-80г. 2,0уч.изд.л. Ц. I4к.

Издано Отделом научно-технической информации
Ереванского физического института, Ереван-36, пер.Маркаряна 6