ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ԳԻՏԱԿԱՆ ՀԱՂՈՐԴՈՒՄ НАУЧНОЕ СООБЩЕНИЕ

ЕФИ—46(73)

В.А.Джрбашян

О МОМЕНТАХ БЕССЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

ԵՐԵՎԱՆ 1973 ЕРЕВАН

Е Р Е В А Н С К И Й   Ф И З И Ч Е С К И Й   И Н С Т И Т У Т

Научное сообщение ЕФИ-46(73)

В.А.ДЖРБАШЯН

О МОМЕНТАХ БЕССЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Ереван 1973 г.

УДК 517.564.3

Научное сообщение ЕФИ-46(73)

В.А.ДЖРБАШЯН

О МОМЕНТАХ БЕССЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Излагается метод вычисления интегралов от бесселевых функций в их области существования. Приводятся выражения для моментов бесселевых функций и их произведений, удобные как при малых, так и больших значениях пределов интегралов.

Часть публикуемых выражений получена [1] в 1961-1962 г.г. Три из них для частного вида $\int_a^\infty t^\lambda \mathscr{C}_\nu(t)\,dt$, удобные при малых a, почти одновременно получены Люком [2].

Имеющиеся в литературе формулы совпадают с частными случаями рассмотренных.

Ереванский физический институт
Ереван 1973

Scientific Report ЕФИ-46(73)

V.A. DJRBASHIAN

ON THE MOMENTS OF BESSEL FUNCTIONS AND THEIR PRODUCTS

A method of calculation of the integrals of the Bessel functions in their domain of convergence is proposed. The expressions for the moments of Bessel functions and their products, convenient for both small and large values of integration limits, are given. Some of these expressions have been obtained [1] in 1961 1962 yet. For the special case of $\int_a^\infty t^\lambda \mathscr{C}(t)dt$, three of them convenient for small a were independently obtained by Luke [2].

The formulae available in literature coincide with the proposed ones in particular cases.

Yerevan Physics Institute
Yerevan 1973

I. Введение

При решении ряда физических задач оказываются необходимыми интегралы вида:

$$\int_a^b t^\lambda \mathscr{C}_\nu(\rho t)\,dt\,, \tag{I.I}$$

$$\int_a^b t^\lambda \mathscr{C}_\mu(\rho t)\,\bar{\mathscr{C}}_\nu(\sigma t)\,dt \tag{I.2}$$

и т.д.

Здесь λ, μ, ν -комплексные, ρ, σ -действительные или мнимые числа $-\infty \leqslant a, b \leqslant \infty$; $\mathscr{C}_\mu(\rho t)$, $\bar{\mathscr{C}}_\nu(\sigma t)$-решения уравнения Бесселя. Произвольность перечисленных величин ограничивается лишь требованием существования интегралов (I.I), (I.2).

В некоторых частных случаях значения интегралов даются:

Для (I.I), (I.2) при $a=0$, $b=\infty$ формулами Вебера-Шафхейтлина; для (I.I) при $\lambda = \pm\nu + 2m + 1$, где m натуральное число или нуль, - рекуррентными формулами; для (I.2) при $\lambda = \pm 1$, $\lambda = -\mu - \nu + 1$, $\lambda = \mu + \nu + 1$ формулами Ломмеля. Если λ отличается от приведенных чётным числом, то при $\mathscr{C}_\mu \equiv \bar{\mathscr{C}}_\nu$ значения интегралов вида (I.2) могут быть найдены с помощью формулы приведения Шафхейтлина [3].

В настоящей работе излагается метод вычисления интегралов (I.I), (I.2) в их области существования. Значения интегралов, как и при известных частных случаях, даются рядами, причем, если предел b

(или a) большое число, то соответствующий ряд является асимптотическим.

В приложении приводятся наиболее применимые интегралы вида (I.I), (I.2) для всех возможных значений параметров. Применяемый подход может быть полезен и при вычислении интегралов других типов.

2. Вычисление интегралов вида (I.I),(I.2) при $b = \infty$

Рассмотрим сначала интегралы (I.I) , (I.2) в случае, когда $b = \infty$. Изложим метод вычисления таких интегралов на конкретном примере интеграла

$$\int_a^\infty t^\lambda K_\nu^2(t)\, dt \quad ,$$

где $K_\nu(t)$ – функция Макдональда (см.приложение).

Если $a = 0$, то рассматриваемый интеграл сходится при

$$Re\,(\lambda+1) > 2\,|Re\,(\nu)| \tag{2.I}$$

Если $a > 0$, то он существует для произвольных комплексных λ , ν .

Допустим сначала, что имеет место условие (2.I).
Тогда можем написать

$$\int_a^\infty t^\lambda K_\nu^2(t)\, dt = \phi_{\lambda, K_\nu^2}(\infty) - \phi_{\lambda, K_\nu^2}(a) \ , \tag{2.2}$$

где для сходящихся интегралов введено обозначение

$$\int_0^t t^\lambda K_\nu^2(t)\, dt = \phi_{\lambda, K_\nu^2}(t) \ .$$

$\phi_{\lambda, K_\nu^2}(\infty)$ мы можем вычислить непосредственно, воспользовавшись представлением Барнса [3] . При предположении (2.I) получается известное [4] выражение

$$\phi_{\lambda, K_\nu^2}(\infty) = \frac{\pi^{1/2}\,\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)}{4\,\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)} \ . \tag{2.3}$$

Найдем теперь $\phi_{\lambda, K_\nu^2}(a)$. Исходя из определения [3] функции $K_\nu(t)$ нетрудно показать, что

$$K_\nu^2(t) = 2^{2\nu-2}\,\Gamma^2(\nu)\, t^{-2\nu}\, {}_1F_2\left(-\nu+\tfrac{1}{2}; -\nu+1, -2\nu+1; t^2\right) + 2^{-1}\,\Gamma(\nu)\,\times$$

$$\times\,\Gamma(-\nu)\, {}_1F_2\left(\tfrac{1}{2}; -\nu+1, \nu+1; t^2\right) + 2^{-2\nu-2}\,\Gamma^2(-\nu)\, t^{2\nu}\, {}_1F_2\left(\nu+\tfrac{1}{2}; \nu+1, 2\nu+1; t^2\right), \tag{2.4}$$

где ${}_pF_q$ – обобщенный гипергеометрический ряд. Учитывая, что получающийся ряд сходится [5] , помножим (2.4) на t^λ и почленно проинтегрируем. Таким образом будем иметь:

$$\phi_{\lambda, K_\nu^2}(a) = \phi^{(1)}_{\lambda, K_\nu^2}(a) + \phi^{(2)}_{\lambda, K_\nu^2}(a) + \phi^{(3)}_{\lambda, K_\nu^2}(a) \ , \tag{2.5}$$

где

$$\phi^{(1)}_{\lambda, K_\nu^2}(a) = \frac{2^{2\nu-2}\,\Gamma^2(\nu)\, a^{-2\nu+\lambda+1}}{-2\nu+\lambda+1}\, {}_2F_3\left(-\nu+\tfrac{1}{2}, -\nu+\tfrac{\lambda}{2}+\tfrac{1}{2}; -\nu+\tfrac{\lambda}{2}+\tfrac{3}{2}, -\nu+1, -2\nu+1; a^2\right),$$

$$\phi^{(2)}_{\lambda, K_\nu^2}(a) = \phi^{(1)}_{\lambda, K_{-\nu}^2}(a) \ ,$$

$$\phi^{(3)}_{\lambda, K_\nu^2}(a) = \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(-\nu)\, a^{\lambda+1}}{2(\lambda+1)}\; {}_2F_3\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\lambda}{2}+\tfrac{1}{2}; \tfrac{\lambda}{2}+\tfrac{3}{2}, -\nu+1, \nu+1; a^2\right)$$

Равенства (2.2) , (2.3) и (2.5) дают решение поставленной задачи. Действительно, результат (2.2) мы получили при предположении (2.1) , когда $\phi_{\lambda,K_\nu^2}(\infty)$ и $\phi_{\lambda,K_\nu^2}(a)$ сходятся и даются формулами (2.3) и (2.5) . Однако, правая и левая части равенства (2.2), где под $\phi_{\lambda,K_\nu^2}(\infty)$ и $\phi_{\lambda,K_\nu^2}(a)$ подразумеваются правые части (2.3) и (2.5), являются аналитическими функциями от ν , λ , a при любых комплексных ν , λ и положительном a . Поэтому согласно принципу аналитического продолжения (I.2) справедливо для указанной широкой области ν , λ , a .

Особо следует остановиться на случаях, когда среди $-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}$, $\nu-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}$, $-\nu-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}$ есть нуль или натуральное число, а $-\frac{\lambda}{2}-1$ отлично от таких чисел. В этих случаях первый и второй члены правой части (2.2) в отдельности обращаются в бесконечность. Однако после устранения неопределенности получаем конечное выражение . Приведем значения (2.2) для наиболее простых таких случаев, когда только одно из упомянутых трех выражений есть нуль или натуральное число *)

Пусть $n, n', n'', n''' = 0, 1, 2, \ldots$

Когда $-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2} = n, \quad \nu-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2} \neq n', \quad -\nu-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2} \neq n''$

$$\int_a^\infty t^\lambda K_\nu^2(t)\,dt = \frac{(-1)^{n+1}\pi^{1/2}\,\Gamma(-\nu-n)\Gamma(\nu-n)}{4n!\,\Gamma(-n+\frac{1}{2})} \times$$

---

*) Все случаи более общего интеграла приведены в приложении

$$-8\zeta(3) + 8\sum_{K=1}^{n+n'+2n} \frac{1}{K^3} + 2\sum_{K=n''+1}^{n+n'+2n''}\frac{1}{K^3} + 2\sum_{K=n+n'+n''+1}^{n+n'+2n''}\frac{1}{K^3} +$$

$$+2\sum_{K=n+n''+1}^{n+n'+2n''}\frac{1}{K^3} + 2\sum_{K=n'+n''+1}^{n+n'+2n''}\frac{1}{K^3}\Bigg\} - \phi'_{\lambda, N_n, N_{n'}}(a) \cdot$$

(П.7к)

$$\int_\ell^\infty t^\lambda N_\mu(t) N_\nu(t)\,dt \sim F_{\lambda, N_\mu, N_\nu}(\ell) \cdot \qquad \text{(П.7л)}$$

При $\lambda = n$

$$\int_a^\ell t^n N_\mu(t)N_\nu(t)\,dt \sim \frac{(-1)^n 2^{n-1}\,\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)} \times$$

$$\times\Big[2\ln\frac{\ell}{2} - \psi\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right) -$$

$$-\psi\left(-\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right) + 2\psi(n+1) + \frac{2\pi\,\mathrm{tg}(\mu+\nu-n)\frac{\pi}{2}}{\cos^2(\mu-\nu+n)\frac{\pi}{2}}\Big] -$$

$$-\phi'_{n,N_\mu,N_\nu}(a) - F'_{n,N_\mu,N_\nu}(\ell) \cdot \qquad \text{(П.7м)}$$

При $\lambda = n, \quad -\mu-\nu-n-1 = 2n', \quad \mu \neq p'$

$$\int_a^\ell t^n N_\mu(t)N_\nu(t)\,dt \sim \frac{\mathrm{ctg}\,\mu\pi\;\mathrm{ctg}\,\nu\pi\; 2^{n-1}(n+n')!}{n!\,n'!\,\Gamma(\mu+n'+1)\Gamma(\nu+n'+1)}\Big\{4\ln\frac{\ell}{a} +$$

$$+\left[-1+\frac{(-1)^n}{\cos\mu\pi\,\cos\nu\pi}\right]\Big[2\ln\frac{\ell}{2} + 2\psi(n+1) - \psi(n'+1) - \psi(n+n'+1) -$$

$$-\psi(\mu+n'+1) - \psi(\nu+n'+1)\Big]\Big\} - \phi'_{n,N_\mu,N_\nu}(a) - F'_{n,N_\mu,N_\nu}(\ell) \cdot$$

(П.7н)

При $\lambda = n, \quad -\mu+\nu-n-1 = 2n', \quad \mu \neq p$

$$\int_a^{\ell} t^n N_\mu(t) N_\nu(t)\,dt \sim \frac{(-1)^{n'+1}\operatorname{ctg}\mu\pi\,(n+n')!\,\Gamma(\nu-n')}{\pi\, n!\, n'!\,\Gamma(\mu+n'+1)}\Big\{4\ln\frac{\ell}{a} -$$

$$-2\Big[2\ln\frac{\ell}{2} + 2\psi(n+1) - \psi(n'+1) - \psi(n+n'+1) - \psi(\mu+n'+1) -$$

$$-\psi(\nu-n')\Big] + \frac{2\pi}{\sin 2\mu\pi}\Big[1+\cos^2\nu\pi\Big]\Big\} - \phi_{n,N_\mu,N_\nu}(a) - F'_{n,N_\mu,N_\nu}(\ell). \qquad \text{(П.7о)}$$

При $\lambda = n, \quad \mu+\nu-n-1 = 2n', \quad \mu \neq p$

$$\int_a^{\ell} t^n N_\mu(t) N_\nu(t)\,dt \sim \frac{2^{n-1}(n+n')!\,\Gamma(\mu-n')\,\Gamma(\nu-n')}{\pi^2\, n!\, n'!}\Big\{4\ln\frac{\ell}{a} +$$

$$+\Big[-1+(-1)^n\cos\mu\pi\cos\nu\pi\Big]\Big[2\ln\frac{\ell}{2} + 2\psi(n+1) - \psi(n'+1) -$$

$$-\psi(n+n'+1) - \psi(\mu-n') - \psi(\nu-n')\Big]\Big\} - \phi'_{n,N_\mu,N_\nu}(a) - F'_{n,N_\mu,N_\nu}(\ell) \qquad \text{(П.7п)}$$

При $\lambda = n, \quad \nu = n', \quad \mu+n'-n-1 = 2n'', \quad \mu \geqslant n' > n''$

$$\int_a^{\ell} t^n N_\mu(t) N_\nu(t)\,dt \sim -\frac{2^n (n+n'')!\,(n-n'+n'')!\,(n'-n''-1)!}{\pi^2\, n!\, n''!}\times$$

$$\times\Big[2\Big(\ln\frac{a}{2}+C\Big) - \sum_{K=1}^{n''}\frac{1}{K} - \sum_{K=1}^{n'-n''-1}\frac{1}{K} - \sum_{K=n+1}^{n+n''}\frac{1}{K} + \sum_{K=n-n'+n''+1}^{n}\frac{1}{K}\Big] -$$

$$-\phi'_{n,N_\mu,N_\nu}(a) - F'_{n,N_\mu,N_\nu}(\ell).$$

(П.7р)

$$-\psi(n+1) + 2\psi(-\lambda) - \psi(n'+1) - \psi(\mu-n) - \psi(\nu+n+1) - \frac{\pi}{2}\Big[\operatorname{ctg}\mu\pi +$$

$$+\frac{2}{\sin 2\nu\pi}\Big]\Big\} - \phi_{\lambda,N_\mu,N_\nu}(a). \qquad \text{(П.7е)}$$

При $\mu \neq p, \quad \nu = n, \quad -\mu-n-\lambda-1 = 2n'$

$$\int_a^{\infty} t^\lambda N_\mu(t) N_\nu(t)\,dt = \frac{(-1)^{n'+1}\, 2^{\lambda-1}\,\Gamma(-\lambda)}{\pi\sin\mu\pi\; n'!\,(n+n')!\,\Gamma(-\lambda-n')\,\Gamma(-\lambda-n-n')}\times$$

$$\times\Big\{\cos\mu\pi\Big\{\Big[2\ln\frac{a}{2} - \psi(n+n'+1) - \psi(n'+1) + 2\psi(-\lambda) - \psi(-\lambda-n') -$$

$$-\psi(-\lambda-n-n')\Big]^2 - \psi'(n+n'+1) - \psi'(n'+1) + 4\psi'(-\lambda) - \psi'(-\lambda-n') -$$

$$-\psi'(-\lambda-n-n') - \frac{\pi^2}{3}\Big\} + (-1)^n\frac{2\pi^2\cos\lambda\pi}{\sin^2\lambda\pi}\Big\} - \phi'_{\lambda,N_\mu,N_n}(a). \qquad \text{(П.7ж)}$$

При $\mu \neq p, \quad \nu = n, \quad \mu-n-\lambda-1 = 2n'$

$$\int_a^{\infty} t^\lambda N_\mu(t) N_\nu(t)\,dt = \frac{(-1)^{n'+1}\, 2^{\lambda-1}\,\Gamma(-\lambda)}{\pi\sin\mu\pi\; n'!\,(n+n')!\,\Gamma(-\lambda-n')\,\Gamma(-\lambda-n-n')}\times$$

$$\times\Big\{\frac{(-1)^{n+1}\,2\pi^2\cos\mu\pi\cos\lambda\pi}{\sin^2\lambda\pi} - \Big\{\Big[2\ln\frac{a}{2} - \psi(n+n'+1) - \psi(n'+1) +$$

$$+2\psi(-\lambda) - \psi(-\lambda-n') - \psi(-\lambda-n-n')\Big]^2 - \psi'(n+n'+1) - \psi'(n'+1) +$$

$$+4\psi'(-\lambda) - \psi'(-\lambda-n') - \psi'(-\lambda-n-n') - \frac{\pi^2}{3}\Big\}\Big\} - \phi'_{\lambda,N_\mu,N_n}(a). \qquad \text{(П.7з)}$$

При $\mu = n, \quad \nu = n', \quad n-n'-\lambda-1 = 2n'', \quad n-n' > n''$

$$\int_a^{\infty} t^\lambda N_\mu(t) N_\nu(t)\,dt = \frac{(-1)^{\lambda+n''}\, 2^{\lambda+1}(n-n''-1)!\,(\lambda+n'')!\,(-\lambda-1)!}{\pi^2\, n''!\,(n'+n'')!}\times$$

$$\times\left[2\left(\ln\frac{a}{2}+C\right)-\sum_{K=1}^{\lambda+n''}\frac{1}{K}-\sum_{K=1}^{n-n''-1}\frac{1}{K}-\sum_{K=-n+n'+2n''+1}^{n'+n''}\frac{1}{K}-\sum_{K=-n+n'+2n''+1}^{n''}\frac{1}{K}\right]-$$

$$-\phi'_{\lambda,\mathcal{N}_n,\mathcal{N}_{n'}}(a) \qquad \text{(П.7и)}$$

При $\mu=n,\ \nu=n',\ -n+n'-\lambda-1=2n'',\quad n\geq n'>n''$

$$\int_a^\infty t^\lambda \mathcal{N}_\mu(t)\mathcal{N}_\nu(t)\,dt=\frac{2^\lambda (n-n'+2n'')!\,(n'-n''-1)!}{\pi^2\, n''!\,(n+n'')!\,(n-n'+n'')!}\times$$

$$\times\left\{\left[2\left(\ln\frac{a}{2}+C\right)-\sum_{K=1}^{n'-n''-1}\frac{1}{K}-\sum_{K=1}^{n''}\frac{1}{K}-\sum_{K=n-n'+2n''+1}^{n+n''}\frac{1}{K}+\right.\right.$$

$$\left.+\sum_{K=n-n'+n''+1}^{n-n'+2n''}\frac{1}{K}\right]^2-\sum_{K=1}^{n-n'+2n''}\frac{1}{K^2}-\sum_{K=1}^{n'-n''-1}\frac{1}{K^2}-\sum_{K=n''+1}^{n-n'+2n''}\frac{1}{K^2}+$$

$$\left.+\sum_{K=n-n'+2n''+1}^{n+n''}\frac{1}{K^2}-\sum_{K=n-n'+n''+1}^{n-n'+2n''}\frac{1}{K^2}\right\}-\phi'_{\lambda,\mathcal{N}_n,\mathcal{N}_{n'}}(a)\,. \qquad \text{(П.7й)}$$

При $\mu=n,\ \nu=n',\ -n-n'-\lambda-1=2n'',\quad n>n'$

$$\int_a^\infty t^\lambda \mathcal{N}_\mu(t)\mathcal{N}_\nu(t)\,dt=\frac{(-1)^{n''+1}\,2^\lambda(-\lambda-1)!}{3\,n''!\,(n+n'')!\,(n'+n'')!\,(n+n'+n'')!}\times$$

$$\times\left\{\left[2\left(\ln\frac{a}{2}+C\right)-\sum_{K=1}^{n''}\frac{1}{K}-\sum_{K=1}^{n+n'+n''}\frac{1}{K}+\sum_{K=n+n''+1}^{n+n'+2n''}\frac{1}{K}+\sum_{K=n'+n''+1}^{n+n'+2n''}\frac{1}{K}\right]\times\right.$$

$$\times\left\{\left[2\left(\ln\frac{a}{2}+C\right)-\sum_{K=1}^{n''}\frac{1}{K}-\sum_{K=1}^{n+n'+n''}\frac{1}{K}+\sum_{K=n+n''+1}^{n+n'+2n''}\frac{1}{K}+\sum_{K=n'+n''+1}^{n+n'+2n''}\frac{1}{K}\right]^2+\right.$$

$$\left.+3\left[-\frac{\pi^2}{3}+\sum_{K=1}^{n''}\frac{1}{K^2}+\sum_{K=1}^{n+n'+n''}\frac{1}{K^2}-\sum_{K=n+n''+1}^{n+n'+2n''}\frac{1}{K^2}-\sum_{K=n'+n''+1}^{n+n'+2n''}\frac{1}{K^2}\right]\right\}-$$

где $\phi_{\lambda,K_\nu^2}(\infty)-\phi_{\lambda,K_\nu^2}(a)$ дается формулами (2.3), (2.5), (2.2а), (2.2б), а через $F_{\lambda,K_\nu^2}(b)$ обозначена правая часть (3.I), представляющая собой асимптотический ряд. Формула (4.I) пригодна как для положительных, так и отрицательных $a,\ b$. Однако, (см.§ 3) в некоторых случаях такие формулы непосредственно дают значения интегралов для a любого знака, но при $b>0$. Значения интегралов и их главных значений при $b<0$ даются аналитическим продолжением (см.§ 3, приложение) приводимых формул.

В приведенном примере интегралы $\int_a^\infty$, $\int_b^\infty$ сходились во всей области существования искомого интеграла $\int_a^b$. Однако, возможны более сложные примеры.

Рассмотрим интеграл $\int_a^b t^\lambda J_\nu(t)\,dt$. Для него нетрудно получить (см.(П.I)–(П.Iб)

$$\int_a^\infty t^\lambda J_\nu(t)\,dt=\frac{2^\lambda\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)}-\frac{a^{\nu+\lambda+1}}{2^\nu}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(\nu+\lambda+2m+1)\,m!\,\Gamma(\nu+m+1)}. \qquad (4.2а)$$

$$\int_b^\infty t^\lambda J_\nu(t)\,dt=-\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}b^{\lambda-\frac{1}{2}}\left[\sum_{m=0}^{p-1}\sin\left(b-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{m\pi}{2}\right)\frac{\Gamma\left(-\lambda+m+\frac{1}{2}\right)}{b^m}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{m'=0}^{m}\frac{\Gamma\left(\nu+m'+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu+m'+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\lambda+m'+\frac{1}{2}\right)2^{m'}m'!\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu+\frac{1}{2}\right)}+O(b^{-p})\right]. \qquad (4.2б)$$

Равенства (4.2а) и (4.2б) имеют место лишь при $Re(\lambda)<\frac{1}{2}$. При $Re(\lambda)>\frac{1}{2}$ интегралы в левых частях (4.2а), (4.2б) расходятся. Однако разность выражений (4.2а), (4.2б), являющаяся аналитической функцией, согласно принципу аналитического продолжения представляет собой интересующий нас интеграл, во всей области его существования.

Для вычисления интеграла $\int_a^{\ell} t^{\lambda} J_\mu(t) J_\nu(t)\,dt$ находим

$$\int_a^{\infty} t^{\lambda} J_\mu(t) J_\nu(t)\,dt = \frac{2^{\lambda}\Gamma(-\lambda)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)} -$$

$$- \frac{a^{\mu+\nu+\lambda+1}}{2^{\mu+\nu}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(\mu+\nu+2m+1)\left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(\mu+\nu+\lambda+2m+1)\,m!\,\Gamma(\mu+\nu+m+1)\Gamma(\mu+m+1)\Gamma(\nu+m+1)} \tag{4.3а}$$

а почленное интегрирование асимптотического разложения подынтегрального выражения дает

$$\int_{\ell}^{\infty} t^{\lambda} J_\mu(t) J_\nu(t)\,dt = \frac{\ell^{\lambda-1}}{2\pi} \sum_{m=0}^{p-1} \cos\left(2\ell-\frac{\mu\pi}{2}-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{m\pi}{2}\right) \frac{\Gamma(-\lambda+m+1)}{(2\ell)^m} \times$$

$$\times \sum_{m'=0}^{m} \frac{1}{\Gamma(-\lambda+m'+1)} \sum_{m''=0}^{m'} \frac{\Gamma\left(\mu+m''+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\mu+m''+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+m'-m''+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu+m'-m''+\frac{1}{2}\right)}{m''!\,(m'-m'')!\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu+\frac{1}{2}\right)} -$$

$$- \frac{\ell^{\lambda}}{\pi} \sum_{m=0}^{p} \frac{\cos(\mu-\nu-m)\frac{\pi}{2}}{(\lambda-m)(2\ell)^m} \sum_{m'=0}^{m} \frac{(-1)^{m'}\Gamma\left(\mu+m'+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\mu+m'+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+m-m'+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu+m-m'+\frac{1}{2}\right)}{m'!\,(m-m')!\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu+\frac{1}{2}\right)} +$$

$$+ O\left(\ell^{\lambda-p-1}\right). \tag{4.3б}$$

Причем при целом неотрицательном λ в (4.3б) положено $p+1 > \lambda$.

(4.3а) и (4.3б) имеют место при $Re(\lambda) < 0$; а если λ целое отрицательное число, то расходятся обе части равенств (4.3а) и (4.3б).

Теперь учтем, что последний конечный ряд в(4.3б) может быть просуммирован.

Действительно

$$\sum_{m'=0}^{m} \frac{(-1)^{m'}\Gamma\left(\mu+m'+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\mu+m'+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+m-m'+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu+m-m'+\frac{1}{2}\right)}{m'!\,(m-m')!\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu+\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu+\frac{1}{2}\right)}{m!\,\Gamma\left(\nu-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu-m+\frac{1}{2}\right)}\, {}_3F_2\left[\begin{matrix}\mu+\frac{1}{2},\ -\mu+\frac{1}{2},\ -m;\\ \nu-m+\frac{1}{2},\ -\nu-m+\frac{1}{2}\end{matrix}\right], \tag{4.4}$$

где через ${}_3F_2\left[\begin{matrix}\mu+\frac{1}{2},\ -\mu+\frac{1}{2},\ -m;\\ \nu-m+\frac{1}{2},\ -\nu-m+\frac{1}{2}\end{matrix}\right]$ обозначен обобщенный гипергеометрический ряд с аргументом, равным единице. Воспользовавшись (4.4) и формулой (2) работы [6] второй член в (4.3б) со своим знаком при $p \to \infty$ можем представить в виде

$$- \ell^{\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 2^m \ell^{-m}\, \Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)}{(\lambda-m)\,m!\,\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}-\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)}.$$

Таким образом,возникающие при λ целом неотрицательном расходящиеся члены в $\int_a^{\infty}$ и $\int_{\ell}^{\infty}$ сократятся. Эта разность и в данном случае является аналитической функцией и представляет интеграл $\int_a^b$ (см.(П.5)-(П.5г)).

Наконец, рассмотрим интеграл $\int_a^b t^\lambda I_\nu(t)\,dt$.
Воспользовавшись (4.2а), (4.2б) и подставив $I_\nu(t) = e^{\mp\frac{i\nu\pi}{2}} J_\nu(e^{\pm\frac{\pi}{2}} t)$ получим:

$$\int_a^b t^\lambda I_\nu(t)\,dt \sim e^{\mp(\nu+\lambda+1)\frac{\pi i}{2}} \frac{2^\lambda \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)} - \frac{a^{\nu+\lambda+1}}{2^\nu} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(\nu+\lambda+2m+1)\, m!\, \Gamma(\nu+m+1)} + \frac{b^{\lambda-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{1/2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(-\lambda+m+\frac{1}{2}\right)}{b^m} \times$$

$$\times \sum_{m'=0}^{m} \frac{\Gamma\left(\nu+m'+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu+m'+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\lambda+m'+\frac{1}{2}\right) 2^{m'} m'!\, \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu+\frac{1}{2}\right)} - \frac{b^{\lambda-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{1/2}} e^{-b\mp(\nu+\frac{1}{2})\pi i} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma\left(-\lambda+m+\frac{1}{2}\right)}{b^m} \sum_{m'=0}^{m} \frac{\Gamma\left(\nu+m'+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu+m'+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\lambda+m'+\frac{1}{2}\right) 2^{m'} m'!\, \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu+\frac{1}{2}\right)} \qquad (4.5)$$

Возникающая здесь кажущаяся неоднозначность представляет собою проявление явления Стокса [3] . При $\nu+\lambda+1=-2n$, где n целое неотрицательное число, вместо первых двух членов в (4.5) следует подставить

$$- \frac{2^\lambda}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)} \left[2\ln\frac{a}{2} - \psi(n+1) - \psi(\nu+n+1)\right] -$$

$$- \frac{a^{\nu+\lambda+1}}{2^\nu} \sum_{m=0}^{\infty}{}' \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(\nu+\lambda+2m+1)\, m!\, \Gamma(\nu+m+1)} .$$

В заключение заметим следующее.

Бесселевые функции, вообще говоря, являются многозначными функциями. В настоящей статье приведены формулы, которые справедливы лишь на первом листе римановой поверхности (т.е.рассмотрена регулярная ветвь; аргументы пределов равны нулю или π). Для получения значения интегралов на других листах необходимо пользоваться аналитическим продолжением (см.приложение).

5. Асимптотическое разложение при больших индексах

Найдем асимптотическое поведение интеграла $\int_a^\infty t^\lambda K_\nu^2(t)\,dt$ при $\nu = ia$, $a \gg 1$.
Воспользовавшись [3] интегральным представлением $K_{ia}(at)$ имеем

$$\int_a^\infty t^\lambda K_{ia}^2(t)\,dt = a^{\lambda+1} e^{-a\pi} \int_1^\infty t^\lambda\,dt\, \mathrm{Re}^2 \int_0^\infty e^{ia(\xi - t\,\mathrm{sh}\,\xi)}\,d\xi . \qquad (5.1)$$

Рассмотрим крайние случаи:

I) $|\lambda| \ll a^{2/3}$ (5.2)

Интегрируем (5.I) по частям:

$$\int_a^\infty t^\lambda K_{ia}^2(t)\,dt = a^{\lambda+1} e^{-a\pi} \left\{ \left[t^\lambda \int^t dt'\, \mathrm{Re}^2 \int_0^\infty e^{ia(\xi - t'\mathrm{sh}\,\xi)}\,d\xi \right]_1^\infty - \right.$$

$$\left. - \lambda \int_1^\infty dt\, t^{\lambda-1} \int^t dt'\, \mathrm{Re}^2 \int_0^\infty e^{ia(\xi - t'\mathrm{sh}\,\xi)}\,d\xi \right\} . \qquad (5.3)$$

Повторяя эту процедуру с интегралом по t в правой части (5.3) m раз, $m \gg Re(\lambda-1)$, наряду с интегрированными членами, получим интеграл такого же типа, где, однако, реальная часть показателя t будет не больше нуля. Но так как в подынтегральном выражении $t^{\lambda-1-m}$ умножается на существенно положительную величину, то при замене $t^{\lambda-1-m}$ на 1 абсолютное значение последнего интеграла не уменьшится.

Теперь учтем, что:

$$4Re^2\int_0^\infty e^{ia(\xi-t'sh\xi)}d\xi=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ia[\xi+\xi'-t'(sh\xi+sh\xi')]}d\xi d\xi'. \tag{5.4}$$

Воспользовавшись тем, что интеграл (5.4) по ξ, (или ξ') на действительной оси не имеет особенностей, мы можем сместить путь интегрирования в нижнюю полуплоскость.

$$\int^t dt'\,4Re^2\int_0^\infty e^{ia(\xi-t'sh\xi)}d\xi=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ia[\xi+\xi'-t(sh\xi+sh\xi'-i\varepsilon)]}}{-ia(sh\xi+sh\xi'-i\varepsilon)}d\xi d\xi'. \tag{5.5}$$

Учитывая сказанное выше и (5.5), легко убедиться, что при условии (5.2) в (5.3) можно ограничиться первым членом. Таким образом:

$$\int_a^\infty t^\lambda K_{ia}^2(t)\,dt\approx\frac{a^\lambda}{2}e^{-a\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\,Im\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\frac{e^{ia(\xi+\xi'-sh\xi-sh\xi')}}{sh\xi+sh\xi'-i\varepsilon}+\frac{e^{ia(\xi-\xi'-sh\xi+sh\xi')}}{sh\xi-sh\xi'-i\varepsilon}\right]d\xi d\xi'. \tag{5.6}$$

Дважды применив метод перевала, после ряда преобразований и вычислений некоторых контурных интегралов из (5.6) окончательно получаем для первого члена асимптотического разложения [ж)]

$$\int_a^\infty t^\lambda K_{ia}^2(t)\,dt\approx\frac{1}{4}\Gamma^2\left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{6}{a}\right)^{1/3}a^\lambda e^{-a\pi}. \tag{5.7}$$

2) Пусть теперь $|\lambda|\gg a^{2/3}$. (5.8)

Если $Re\,\lambda>0$, то потребуем еще, чтобы

$$Re\,\lambda\ll a^{2/3} \tag{5.8a}$$

Интегрируя снова по частям, имеем:

$$\int_a^\infty t^\lambda K_{ia}^2(t)\,dt=\left[\frac{t^{\lambda+1}K_{ia}^2(t)}{\lambda+1}\right]_a^\infty-\frac{a^{\lambda+1}}{\lambda+1}\int_1^\infty t^{\lambda+1}\frac{d}{dt}K_{ia}^2(at)\,dt. \tag{5.9}$$

Согласно следствию уравнения Бесселя

$$\frac{d}{dt}K_{ia}^2(at)=2aK_{ia}(at)K'_{ia}(at)=-\frac{2}{t}\int_{at}^\infty z\left\{\left[K'_{ia}(z)\right]^2+\left[1-\frac{a^2}{z^2}\right]K_{ia}^2(z)\right\}dz \tag{5.10}$$

Так как $K'_{ia}(z)$ и $K_{ia}(z)$ действительны, то, учитывая пределы интегрирования, выражение в фигурных скобках - положительно. Аналогично, воспользовавшись уравнением Бесселя, легко убедиться, что

ж) В справедливости (5.7) легко убедиться переходя в левой части (5.6) от переменной интегрирования t к at. Тогда для получающегося интеграла правая часть не будет зависеть от λ и можно воспользоваться известной формулой для $\lambda=1$ (см. сноску на стр. 6).

$$(-1)^n \frac{d^n}{dt^n} K_{ia}^2(at) > 0 , \qquad n = 0,1,2 .$$

Следовательно, если интеграл в правой части (5.9) еще проинтегрировать по частям, то для остающегося интеграла получим следующее неравенство:

$$\left| \int_1^\infty t^{\lambda+2} \frac{d^2}{dt^2} K_{ia}^2(at)\,dt \right| \le \int_1^\infty t^{Re\,\lambda+2} \frac{d^2}{dt^2} K_{ia}^2(at)\,dt \lesssim$$

$$\lesssim \int_1^\infty \frac{d^2}{dt^2} K_{ia}^2(at)\,dt = \left[\frac{d}{dt} K_{ia}^2(at) \right]_1^\infty \qquad (5.II)$$

Последнее неравенство в (5.II) в случае $Re\,\lambda + 2 > 0$ имеет место благодаря *) (5.8a)

Таким образом, в полученном из (5.9) выражении последний член меньше или порядка предпоследнего. Но из (5.4) следует, что при условии (5.8) оба они намного меньше предыдущего.
Окончательно получаем:

$$\int_a^\infty t^\lambda K_{ia}^2(t)\,dt \approx - \frac{1}{2(\lambda+1)} \Gamma^2\left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{a}{6}\right)^{1/3} a^\lambda e^{-a\pi} . \qquad (5.I2)$$

---

*) В этом легко убедиться,интегрируя по частям.

ПРИЛОЖЕНИЕ

МОМЕНТЫ БЕССЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Ниже приведены значения интегралов вида (I.I), (I,2), во всей области существования, вычисленных методом §§ 2,3,4. Сначала даны интегралы $\int_a^\infty$, удобные для малых a и $\int_\ell^\infty$, удобные для больших ℓ. По этим значениям определяется $\int_a^\ell$: (без ограничения на $Re\,\lambda$, необходимого в некоторых случаях для существования $\int_a^\infty$)

$$\int_a^\ell = \int_a^\infty - \int_\ell^\infty$$

Затем приведены значения $\int_a^\ell$ для тех случаев, когда выражения для $\int_a^\infty$, $\int_\ell^\infty$ расходятся.

Выражения для $\int_a^\infty$ справедливы для действительных a. Однако при $a \le 0$ интеграл $\int_a^\infty$ существует при дополнительном условии сходимости интеграла $\int_0^\infty$.

При его нарушении, но при соблюдении других условий, которые приводятся, существует главное значение интеграла $⨍$. Оно дается выражением для $\int_a^\infty$ (или $\int_\ell^\infty$) в предположении, что a под логарифмом (если он входит в ответ) понимается в смысле абсолютного значения.

Основное выражение для $\int_a^\infty$, при некоторых значениях параметров λ, μ, ν, обращается в неопределенность.

Для этих случаев $\int_a^\infty$ приводится отдельно, причем через ϕ' (F' для $\int_\ell^\infty$) тогда обозначается $\phi\,(F)$ за вычетом обращающихся в бесконечность членов. Интегралы $\int_\ell^\infty$ представлены асимптотическими рядами. В случаях, когда в подынтегральную функцию не входят $J_\nu(t)$ или $N_\nu(t)$, эти формулы справедливы при действительных ℓ. В противном случае они непосредственно справедливы только при $\ell > 0$, а при $\ell < 0$ интегралы $\int_\ell^\infty$ даются аналитическим продолжением, которое просто (см. § 3) получи⁻ с помощью приведенных формул и аналитического продолжения [ ] бесселевых функций.

Последнее дается формулами:

$$J_\nu(z e^{im\pi}) = e^{im\nu\pi} J_\nu(z)$$

$$N_\nu(z e^{im\pi}) = e^{-im\nu\pi} N_\nu(z) + 2i \frac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi} \cos\nu\pi\, J_\nu(z)$$

$$K_\nu(z e^{im\pi}) = e^{-im\nu\pi} K_\nu(z) - i\pi \frac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi} I_\nu(z)$$

$$I_\nu(z e^{im\pi}) = e^{im\nu\pi} I_\nu(z)$$

Здесь m - целое.

С помощью этих же формул рассмотренная здесь (см. § 4) регулярная ветвь может продолжаться на другие листы поверхности Римана.

Ниже введены следующие обозначения

$$n, n', \ldots = 0, 1, 2, \ldots$$

$$P = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

C - постоянная Эйлера: $C = 0.577\ 215\ 6649 \ldots$,

ζ - дзета функция Римана: $\zeta(3) = 1.202\ 056\ 9032 \ldots$,

$E(q)$ - целая часть числа q

Если $n < n' - 1$ $\qquad \lim\limits_{\nu \to -n'} \dfrac{\psi(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu+n+1)} = (-1)^{n'-n}(n'-n-1)!$

$$J_\nu(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{t}{2}\right)^{2m}}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)}$$

$$\phi_{\lambda,J_\nu}(a) \equiv \frac{a^{\nu+\lambda+1}}{2^\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(\nu+\lambda+2m+1)\, m!\, \Gamma(\nu+m+1)}$$

$$\int_a^\infty t^\lambda J_\nu(t)\,dt = \frac{2^\lambda \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)} - \phi_{\lambda,J_\nu}(a) \qquad (\text{П.I})$$

При $a < 0$ $\int_a^\infty$ существует, если дополнительно $R(\nu+\lambda+1) > 0$; при $Re(\nu+\lambda+1) \le 0$ существует $\int_a^\infty$, если $\nu+\lambda+1$ действ. четн.

При $-\nu-\lambda-1 = 2n$, $\quad n+\lambda \ne n'$

$$\int_a^\infty t^\lambda J_\nu(t)\,dt = \frac{(-1)^{n+1} 2^\lambda}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)}\left[2\ln\frac{a}{2} - \psi(n+1) - \psi(\nu+n+1)\right] - \phi'_{\lambda,J_\nu}(a). \qquad (\text{П.Ia})$$

$$\int_b^\infty t^\lambda J_\nu(t)\,dt \sim -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} b^{\lambda-\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \sin\left(b-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{m\pi}{2}\right)\times$$

$$\times\frac{\Gamma(-\lambda+m+\frac{1}{2})}{b^m}\sum_{m'=0}^{m}\frac{\Gamma(\nu+m'+\frac{1}{2})\Gamma(-\nu+m'+\frac{1}{2})}{\Gamma(-\lambda+m'+\frac{1}{2})\,2^{m'}m'!\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(-\nu+\frac{1}{2})} \qquad (\text{П.1б})$$

$$N_\nu(t) = \frac{1}{\sin\nu\pi}\left[\cos\nu\pi\, J_\nu(t) - J_{-\nu}(t)\right]$$

$$N_{p+\frac{1}{2}}(t) = (-1)^{p+1} J_{-p-\frac{1}{2}}(t)$$

$$N_{-n}(t) = (-1)^n N_n(t)$$

$$\phi_{\lambda,N_\nu}(a) \equiv \frac{1}{\sin\nu\pi}\left[\cos\nu\pi\,\phi_{\lambda,J_\nu}(a) - \phi_{\lambda,J_{-\nu}}(a)\right]$$

$$\phi_{\lambda,N_n}(a) \equiv \frac{1}{\pi}\left\{2\,\phi_{\lambda,J_n}(a)\left(\ln\frac{a}{2}+C\right) - \frac{a^{n+\lambda+1}}{2^{n-1}}\times\right.$$

$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(n+\lambda+2m+1)^2\,m!\,(n+m)!} - \frac{a^{-n+\lambda+1}}{2^{-n}}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{2m}(n-m-1)!}{(-n+\lambda+2m+1)\,m!} -$$

$$\left.-\frac{a^{n+\lambda+1}}{2^n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(n+\lambda+2m+1)\,m!\,(n+m)!}\left[\sum_{K=1}^{n+m}\frac{1}{K}+\sum_{K=1}^{m}\frac{1}{K}\right]\right\}$$

$$\int_a^\infty t^\lambda N_\nu(t)\,dt = \frac{2^\lambda}{\pi}\sin(-\nu+\lambda)\frac{\pi}{2}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right) - \phi_{\lambda,N_\nu}(a); \qquad (\text{П.2})$$

$$Re(\lambda) < \frac{1}{2}$$

При $a<0$ $\int_a^\infty$ существует $(\nu \neq p+\frac{1}{2})$, если дополнительно $Re(\lambda+1)>|Re(\nu)|$; при $Re(\lambda+1)\leq|Re(\nu)|$ существует $\int_a^\infty$, если $\mp\nu+\lambda+1$ дейст.четн. при $Re(\pm\nu)\geq 0$, $|Re(\lambda+1)| \leq |Re(\nu)|$ или, если ν и $\lambda+1$ действ.целые числа одинаковой четности при $|Re(\lambda+1)|>|Re(\nu)|$.

При $\nu \neq p$, $-\nu-\lambda-1=2n$

$$\int_a^\infty t^\lambda N_\nu(t)\,dt = \frac{(-1)^{n+1}2^\lambda \operatorname{ctg}\nu\pi}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)}\left[2\ln\frac{a}{2}-\psi(n+1)-\psi(\nu+n+1)-\frac{2\pi}{\sin 2\nu\pi}\right]-\phi'_{\lambda,N_\nu}(a). \qquad (\text{П.2а})$$

При $\nu-\lambda-1=2n$, $-\nu+n\neq n'$

$$\int_a^\infty t^\lambda N_\nu(t)\,dt = \frac{2^\lambda\Gamma(\nu-n)}{n!\,\pi}\left[2\ln\frac{a}{2}-\psi(n+1)-\psi(\nu-n)\right]-\phi'_{\lambda,N_\nu}(a). \qquad (\text{П.2б})$$

При $\nu=n$, $-n-\lambda-1=2n'$

$$\int_a^\infty t^\lambda N_\nu(t)\,dt = \frac{(-1)^{n'+1}2^{\lambda-1}}{n'!\,(n+n')!\,\pi}\left\{\left[2\left(\ln\frac{a}{2}+C\right)-\sum_{K=1}^{n+n'}\frac{1}{K}-\sum_{K=1}^{n'}\frac{1}{K}\right]^2+\right.$$

$$\left.+\sum_{K=1}^{n+n'}\frac{1}{K^2}+\sum_{K=1}^{n'}\frac{1}{K^2}-\frac{2\pi^2}{3}\right\}-\phi'_{\lambda,N_n}(a) \qquad (\text{П.2в})$$

$$\int_b^\infty t^\lambda N_\nu(t)\,dt \sim \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} b^{\lambda-\frac{1}{2}}\sum_{m=0}^{\infty}\cos\left(b-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{m\pi}{2}\right)\frac{\Gamma(-\lambda+m+\frac{1}{2})}{b^m}\times$$

$$\times\sum_{m'=0}^{m}\frac{\Gamma(\nu+m'+\frac{1}{2})\Gamma(-\nu+m'+\frac{1}{2})}{\Gamma(-\lambda+m'+\frac{1}{2})\,2^{m'}m'!\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(-\nu+\frac{1}{2})}. \qquad (\text{П.2г})$$

$$K_\nu(t)=\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left[e^{\frac{i\nu\pi}{2}}J_{-\nu}(it)-e^{-\frac{i\nu\pi}{2}}J_\nu(it)\right]$$

$$K_{-n}(t)=K_n(t)$$

$$\phi_{\lambda,K_\nu}(a)\equiv\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left[e^{-\frac{i(-\nu+\lambda+1)\pi}{2}}\phi_{\lambda,J_{-\nu}}(ia)-e^{-\frac{i(\nu+\lambda+1)\pi}{2}}\phi_{\lambda,J_\nu}(ia)\right]$$

$$\phi_{\lambda,K_n}(a)\equiv(-1)^{n+1}e^{-\frac{i(n+\lambda+1)\pi}{2}}\phi_{\lambda,J_n}(ia)\left(\ln\frac{a}{2}+C\right)+(-1)^n\frac{a^{n+\lambda+1}}{2^n}\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(n+\lambda+2m+1)^2m!(n+m)!}-\frac{a^{-n+\lambda+1}}{2^{-n+1}}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(-1)^m(n-m-1)!\left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(-n+\lambda+2m+1)m!}+$$

$$+(-1)^n\frac{a^{n+\lambda+1}}{2^{n+1}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(n+\lambda+2m+1)m!(n+m)!}\left[\sum_{K=1}^{n+1}\frac{1}{K}+\sum_{K=1}^{m}\frac{1}{K}\right].$$

$$\int_a^\infty t^\lambda K_\nu(t)dt=2^{\lambda-1}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)-\phi_{\lambda,K_\nu}(a).\quad(\text{П.3})$$

При $a<0$ $\int_a^\infty$ существует, если $Re(\lambda+1)>|Re(\nu)|$; при $Re(\lambda+1)\leq|Re(\nu)|$ существует $\int_a^\infty$, если $\mp\nu+\lambda+1$ действ. четн. при $Re(\pm\nu)\geq 0$, $|Re(\lambda+1)|\leq|Re(\nu)|$ или, если ν и $\lambda+1$ действ. целые одинаковой четности при $|Re(\lambda+1)|>|Re(\nu)|$.

При $-\nu-\lambda-1=2n$, $\nu+n\neq n'$

$$\int_a^\infty t^\lambda K_\nu(t)dt=\frac{(-1)^{n+1}2^{\lambda-1}\Gamma(-\nu-n)}{n!}\left[2\ln\frac{a}{2}-\psi(n+1)-\psi(-\nu-n)\right]-\phi'_{\lambda,K_\nu}(a).\quad(\text{П.3а})$$

При $\nu-\lambda-1=2n$, $-\nu+n\neq n'$

$$\int_a^\infty t^\lambda K_\nu(t)dt=\frac{(-1)^{n+1}2^{\lambda-1}\Gamma(\nu-n)}{n!}\left[2\ln\frac{a}{2}-\psi(n+1)-\psi(\nu-n)\right]-\phi'_{\lambda,K_\nu}(a).\quad(\text{П 3б})$$

При $\nu=n$, $-n-\lambda-1=2n'$

$$\int_a^\infty t^\lambda K_\nu(t)dt=\frac{(-1)^n2^{\lambda-2}}{n'!(n+n')!}\left\{\left[2\left(\ln\frac{a}{2}+C\right)-\sum_{K=1}^{n+n'}\frac{1}{K}-\sum_{K=1}^{n'}\frac{1}{K}\right]^2+\right.$$

$$\left.+\sum_{K=1}^{n+n'}\frac{1}{K^2}+\sum_{K=1}^{n'}\frac{1}{K^2}+\frac{\pi^2}{3}\right\}-\phi'_{\lambda,K_\nu}(a).\quad(\text{П.3в})$$

$$\int_b^\infty t^\lambda K_\nu(t)dt\sim\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}b^{\lambda-\frac{1}{2}}e^{-b}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma(-\lambda+m+\frac{1}{2})}{b^m}\times$$

$$\times\sum_{m'=0}^{m}\frac{\Gamma(\nu+m'+\frac{1}{2})\Gamma(-\nu+m'+\frac{1}{2})}{\Gamma(-\lambda+m'+\frac{1}{2})2^{m'}m'!\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(-\nu+\frac{1}{2})}.\quad(\text{П.3г})$$

$$I_\nu(t)=e^{-\frac{i\nu\pi}{2}}J_\nu(it)$$

$$F_{\lambda,I_\nu}(b)\equiv-\frac{b^{\lambda-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{1/2}}e^b\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(-\lambda+m+1)}{b^m}\sum_{m'=0}^{m}\frac{\Gamma(\nu+m'+\frac{1}{2})\Gamma(-\nu+m'+\frac{1}{2})}{\Gamma(-\lambda+m'+\frac{1}{2})2^{m'}m'!\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(-\nu+\frac{1}{2})}+$$

$$+\frac{b^{\lambda-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{1/2}}e^{-b-i(\nu+\frac{1}{2})\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma(-\lambda+m+\frac{1}{2})}{b^m}\sum_{m'=0}^{m}\frac{\Gamma(\nu+m'+\frac{1}{2})\Gamma(-\nu+m'+\frac{1}{2})}{\Gamma(-\lambda+m'+\frac{1}{2})2^{m'}m'!\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(-\nu+\frac{1}{2})}$$

$$\int_a^b t^\lambda I_\nu(t)dt\sim e^{-i(\nu+\lambda+1)\frac{\pi}{2}}\frac{2^\lambda\Gamma(\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2}-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2})}-\frac{a^{\nu+\lambda+1}}{2^\nu}\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(\nu+\lambda+2m+1)m!\Gamma(\nu+m+1)}-F_{\lambda,I_\nu}(b).\quad(\text{П.4})$$

Интеграл $\int_a^\infty$ не существует.

При $a<0$, $0<b<\infty$ $\int_a^b$ существует, если $Re(\nu+\lambda+1)>0$; при $Re(\nu+\lambda+1)\le 0$ существует $\int_a^b$, если $\nu+\lambda+1$ действ.четн.

При $-\nu-\lambda-1=2n$

$$\int_a^b t^\lambda I_\nu(t)\,dt \sim -\frac{2^\lambda}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)}\left[2\ln\frac{a}{2}-\psi(n+1)-\psi(\nu+n+1)\right]-$$

$$-\frac{a^{\nu+\lambda+1}}{2^\nu}\sum_{m=0}^{\infty}{}'\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(\nu+\lambda+2m+1)\,m!\,\Gamma(\nu+m+1)}-F_{\lambda,I_\nu}(b). \qquad (\text{П.4а})$$

$$\Phi_{\lambda,J_\mu,J_\nu}(a)\equiv\frac{a^{\mu+\nu+\lambda+1}}{2^{\mu+\nu}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma(\mu+\nu+2m+1)\left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(\mu+\nu+\lambda+2m+1)\,m!\,\Gamma(\mu+\nu+m+1)\Gamma(\mu+m+1)\Gamma(\nu+m+1)}$$

$$F_{\lambda,J_\mu,J_\nu}(b)\equiv\frac{b^{\lambda-1}}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\cos\left(2b-\frac{\mu\pi}{2}-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{m\pi}{2}\right)\frac{\Gamma(-\lambda+m+1)}{(2b)^m}\sum_{m'=0}^{m}\frac{1}{\Gamma(-\lambda+m'+1)}\times$$

$$\times\sum_{m''=0}^{m'}\frac{\Gamma(\mu+m''+\frac{1}{2})\Gamma(-\mu+m''+\frac{1}{2})\Gamma(\nu+m'-m''+\frac{1}{2})\Gamma(-\nu+m'-m''+\frac{1}{2})}{m''!\,(m'-m'')!\,\Gamma(\mu+\frac{1}{2})\Gamma(-\mu+\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(-\nu+\frac{1}{2})}-$$

$$-b^\lambda\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m 2^m b^{-m}\,\Gamma(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{m}{2}+\frac{1}{2})}{(\lambda-m)\,m!\,\Gamma(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{m}{2}+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}-\frac{m}{2}+\frac{1}{2})\Gamma(-\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{m}{2}+\frac{1}{2})}$$

$$\int_a^\infty t^\lambda J_\mu(t)J_\nu(t)\,dt=\frac{2^\lambda\Gamma(-\lambda)\Gamma(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2})\Gamma(-\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2})}-\Phi_{\lambda,J_\mu,J_\nu}(a).$$

$$Re(\lambda)<0 \qquad (\text{П.5})$$

При $a<0$ $\int_a^\infty$ существует, если дополнительно $Re(\mu+\nu+\lambda+1)>0$; при $Re(\mu+\nu+\lambda+1)\le 0$ существует $\int_a^\infty$, если $\mu+\nu+\lambda+1$ действ. четн.

При $-\mu-\nu-\lambda-1=2n,\ -\mu-\nu+\lambda-1\ne 2n',\ -\mu+\nu+\lambda-1\ne n'',\ \mu-\nu+\lambda-1\ne 2n'''$

$$\int_a^\infty t^\lambda J_\mu(t)J_\nu(t)\,dt=\frac{(-1)^{n+1}2^\lambda\Gamma(-\lambda)}{n!\,\Gamma(\mu+\nu+n+1)\Gamma(\mu+n+1)\Gamma(\nu+n+1)}\left[2\ln\frac{a}{2}-\psi(n+1)+2\psi(-\lambda)-\right.$$

$$\left.-\psi(\mu+\nu+n+1)-\psi(\mu+n+1)-\psi(\nu+n+1)\right]-\Phi'_{\lambda,J_\mu,J_\nu}(a). \qquad (\text{П.5а})$$

$$\int_b^\infty t^\lambda J_\mu(t)J_\nu(t)\,dt \sim F_{\lambda,J_\mu,J_\nu}(b). \qquad (\text{П.5б})$$

При $\lambda=n$

$$\int_a^b t^n J_\mu(t)J_\nu(t)\,dt\sim\frac{(-1)^n 2^{n-1}\Gamma(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{n}{2}+\frac{1}{2})}{n!\,\Gamma(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{n}{2}+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}-\frac{n}{2}+\frac{1}{2})\Gamma(-\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{n}{2}+\frac{1}{2})}\times$$

$$\times\left[2\ln\frac{b}{2}-\psi(\tfrac{\mu}{2}+\tfrac{\nu}{2}+\tfrac{n}{2}+\tfrac{1}{2})-\psi(\tfrac{\mu}{2}+\tfrac{\nu}{2}-\tfrac{n}{2}+\tfrac{1}{2})-\psi(\tfrac{\mu}{2}-\tfrac{\nu}{2}-\tfrac{n}{2}+\tfrac{1}{2})-\right.$$

$$\left.-\psi(-\tfrac{\mu}{2}+\tfrac{\nu}{2}-\tfrac{n}{2}+\tfrac{1}{2})+2\psi(n+1)\right]-\Phi_{\lambda,J_\mu,J_\nu}(a)-F'_{\lambda,J_\mu,J_\nu}(b). \qquad (\text{П.5в})$$

При $\lambda = n$, $-\mu-\nu-n-1=2n'$, $-\mu+\nu+n-1\neq 2n''$, $\mu-\nu+n-1\neq 2n'''$

$$\int_a^b t^n J_\mu(t)J_\nu(t)\,dt \sim \frac{2^{n-1}(n+n')!}{n!\,n'!\,\Gamma(\mu+n'+1)\Gamma(\nu+n'+1)}\Big[2\ln\frac{2b}{a^2} - 2\psi(n+1)+$$

$$+\psi(n'+1)+\psi(n+n'+1)+\psi(\mu+n'+1)+\psi(\nu+n'+1)\Big] - \Phi'_{n,J_\mu,J_\nu}(a) - F'_{n,J_\mu,J_\nu}(b).$$

(П.5г)

$$\Phi_{\lambda,J_\mu,N_\nu}(a) \equiv \frac{1}{\sin\nu\pi}\Big[\cos\nu\pi\,\Phi_{\lambda,J_\mu,J_\nu}(a) - \Phi_{\lambda,J_\mu,J_{-\nu}}(a)\Big]$$

$$\Phi_{\lambda,J_\mu,N_n}(a) \equiv \frac{1}{\pi}\Big\{2\Phi_{\lambda,J_\mu,J_n}(a)\Big(\ln\frac{a}{2}+C\Big) -$$

$$-\frac{a^{\mu+n+\lambda+1}}{2^{\mu+n-1}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma(\mu+n+2m+1)\left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(\mu+n+\lambda+2m+1)^2 m!(n+m)!\Gamma(\mu+n+m+1)\Gamma(\mu+m+1)} -$$

$$-\frac{a^{\mu-n+\lambda+1}}{2^{\mu-n}}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)!\,\Gamma(\mu-n+2m+1)\left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(\mu-n+\lambda+2m+1)\,m!\,\Gamma(\mu-n+m+1)\Gamma(\mu+m+1)} -$$

$$-\frac{a^{\mu+n+\lambda+1}}{2^{\mu+n}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma(\mu+n+2m+1)\left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(\mu+n+\lambda+2m+1)\,m!(n+m)!\Gamma(\mu+n+m+1)\Gamma(\mu+m+1)}\times$$

$$\times\Big[\sum_{k=1}^{n+m}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}-\sum_{k=n+m+1}^{n+2m}\frac{1}{\mu+k}-\sum_{k=m+1}^{n+2m}\frac{1}{\mu+k}\Big]\Big\}$$

$$F_{\lambda,J_\mu,N_\nu}(b) \equiv \frac{b^{\lambda-1}}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\sin\Big(2b-\frac{\mu\pi}{2}-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{m\pi}{2}\Big)\frac{\Gamma(-\lambda+m+1)}{(2b)^m}\sum_{m'=0}^{m}\frac{1}{\Gamma(-\lambda+m'+1)}\times$$

$$\times\sum_{m''=0}^{m'}\frac{\Gamma(\mu+m''+\frac12)\Gamma(-\mu+m''+\frac12)\Gamma(\nu+m'-m''+\frac12)\Gamma(-\nu+m'-m''+\frac12)}{m''!\,(m'-m'')!\,\Gamma(\mu+\frac12)\Gamma(-\mu+\frac12)\Gamma(\nu+\frac12)\Gamma(-\nu+\frac12)} -$$

$$-\frac{b^\lambda}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(\mu-\nu-m)\frac{\pi}{2}\;2^m b^{-m}}{(\lambda-m)\;m!}\,\frac{\Gamma(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{m}{2}+\frac12)\Gamma(\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{m}{2}+\frac12)}{\Gamma(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{m}{2}+\frac12)\Gamma(\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}-\frac{m}{2}+\frac12)}$$

$$\int_a^\infty t^\lambda J_\mu(t)N_\nu(t)\,dt = \frac{\sin(\mu-\nu+\lambda)\frac{\pi}{2}\;2^\lambda\Gamma(-\lambda)\Gamma(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac12)\Gamma(\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac12)}{\pi\;\Gamma(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{\lambda}{2}+\frac12)\Gamma(\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}-\frac{\lambda}{2}+\frac12)} - \Phi_{\lambda,J_\mu,N_\nu}(a).$$

(П.6)

$Re(\lambda) < 0$

При $a<0$ $\int_a^\infty$ существует, $(\nu\neq p+\frac12)$ если дополнительно $Re(\mu+\lambda+1) > |Re(\nu)|$, при $Re(\mu+\lambda+1)\leqslant|Re(\nu)|$ существует $\int_a^\infty$, если $\mu\mp\nu+\lambda+1$ действ.четн. при $Re(\pm\nu)\geqslant 0$, $|Re(\mu+\lambda+1)|\leqslant|Re(\nu)|$ или, если ν и $\mu+\lambda+1$ действ. целые числа одинаковой четности при $|Re(\mu+\lambda+1)| > |Re(\nu)|$.

При $\nu\neq p$, $-\mu-\nu-\lambda-1=2n$, $-\mu-\nu+\lambda-1\neq 2n'$, $-\mu+\nu+\lambda-1\neq 2n''$

$$\int_a^\infty t^\lambda J_\mu(t)N_\nu(t)\,dt = \frac{(-1)^{n+1}\,\mathrm{ctg}\,\nu\pi\;2^\lambda\,\Gamma(-\lambda)}{n!\,\Gamma(\mu+\nu+n+1)\Gamma(\mu+n+1)\Gamma(\nu+n+1)}\times$$

$$\times\Big[2\ln\frac{a}{2}-\psi(n+1)+2\psi(-\lambda)-\psi(\mu+\nu+n+1)-\psi(\mu+n+1)-\psi(\nu+n+1)-$$

$$-\frac{2\pi}{\sin 2\nu\pi}\Big] - \Phi'_{\lambda,J_\mu,N_\nu}(a).$$

(П.6а)

При $-\mu+\nu-\lambda-1=2n$, $-\nu+n\neq n'$, $-\mu-\nu+\lambda-1\neq 2n''$, $-\mu+\nu+\lambda-1\neq 2n'''$

$$\int_a^\infty t^\lambda J_\mu(t)N_\nu(t)\,dt = \frac{2^\lambda\Gamma(-\lambda)\Gamma(\nu-n)}{\pi\;n!\;\Gamma(\mu-\nu+n+1)\Gamma(\mu+n+1)}\Big[2\ln\frac{a}{2}-\psi(n+1)+$$

$$+2\psi(-\lambda)-\psi(\mu-\nu+n+1)-\psi(\mu+n+1)-\psi(\nu-n)\Big] - \Phi'_{\lambda,J_\mu,N_\nu}(a).$$

(П.6б)

При $\nu = n$, $-\mu-n-\lambda-1=2n'$, $-\mu+n+\lambda-1 \neq 2n''$

$$\int_a^\infty t^\lambda J_\mu(t)\mathcal{N}_\nu(t)dt = \frac{(-1)^{n'+1}\,2^{\lambda-1}\,\Gamma(-\lambda)}{\pi\, n'!\,(n+n')!\,\Gamma(-\lambda-n')\Gamma(-\lambda-n-n')}\times$$

$$\times\Big\{\Big[2\ln\frac{a}{2}-\psi(n+n'+1)-\psi(n'+1)+2\psi(-\lambda)-\psi(-\lambda-n')-\psi(-\lambda-n-n')\Big]^2-$$

$$-\psi'(n+n'+1)-\psi'(n'+1)+4\psi'(-\lambda)-\psi(-\lambda-n')-\psi'(-\lambda-n-n')-\frac{\pi^2}{3}\Big\}-\Phi_{\lambda,J_\mu,\mathcal{N}_n}(a). \qquad \text{(П.6в)}$$

$$\int_\ell^\infty t^\lambda J_\mu(t)\mathcal{N}_\nu(t)dt \sim F_{\lambda,J_\mu,\mathcal{N}_\nu}(\ell). \qquad \text{(П.6г)}$$

При $\lambda = n$

$$\int_a^\ell t^n J_\mu(t)\mathcal{N}_\nu(t)dt \sim \frac{\sin(\mu-\nu-n)\frac{\pi}{2}\,2^{n-1}\,\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)}\times$$

$$\times\Big[2\ln\frac{\ell}{2}-\psi\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)-\psi\left(\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)-\psi\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)-$$

$$-\psi\left(\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)+2\psi(n+1)-\pi\,\mathrm{ctg}(\mu-\nu+n)\frac{\pi}{2}\Big]-\Phi_{\lambda,J_\mu,\mathcal{N}_\nu}(a)-F'_{\lambda,J_\mu,\mathcal{N}_\nu}(\ell). \qquad \text{(П.6д)}$$

При $\lambda = n$, $-\mu-\nu-n-1=2n'$, $\nu \neq p$

$$\int_a^\ell t^n J_\mu(t)\mathcal{N}_\nu(t)dt \sim \frac{\mathrm{ctg}\,\nu\pi\,2^{n-1}\,(n+n')!}{n!\,n'!\,\Gamma(\mu+n'+1)\Gamma(\nu+n'+1)}\Big[2\ln\frac{2\ell}{a^2}-$$

$$-2\psi(n+1)+\psi(n'+1)+\psi(n+n'+1)+\psi(\mu+n'+1)+\psi(\nu+n'+1)+\frac{2\pi}{\sin 2\nu\pi}\Big]-$$

$$-\Phi'_{n,J_\mu,\mathcal{N}_\nu}(a)-F'_{n,J_\mu,\mathcal{N}_\nu}(\ell). \qquad \text{(П.6е)}$$

При $\lambda = n$, $-\mu+\nu-n-1=2n'$, $-\nu+n' \neq n''$

$$\int_a^\ell t^n J_\mu(t)\mathcal{N}_\nu(t)dt \sim \frac{(-1)^{n'+1}\,2^{n-1}(n+n')!\,\Gamma(\nu-n')}{\pi\,n!\,n'!\,\Gamma(\mu+n'+1)}\Big[2\ln\frac{2\ell}{a^2}-$$

$$-2\psi(n+1)+\psi(n'+1)+\psi(n+n'+1)+\psi(\mu+n'+1)+\psi(\nu-n')\Big]-$$

$$-\Phi'_{n,J_\mu,\mathcal{N}_\nu}(a)-F'_{n,J_\mu,\mathcal{N}_\nu}(\ell). \qquad \text{(П.6ж)}$$

При $\lambda = n$, $\nu = n'$, $-\mu-n-n'-1=2n''$

$$\int_a^\ell t^n J_\mu(t)\mathcal{N}_\nu(t)dt \sim \frac{(-1)^{n+n'+n''+1}\,2^{n-1}(n+n'')!\,(n+n'+n'')!}{\pi\,n!\,n''!\,(n'+n'')!}\Big[2\Big(\ln\frac{\ell}{2}+$$

$$+C\Big)-\sum_{K=1}^{n''}\frac{1}{K}-\sum_{K=1}^{n'+n''}\frac{1}{K}-\sum_{K=n+1}^{n+n''}\frac{1}{K}-\sum_{K=n+1}^{n+n'+n''}\frac{1}{K}\Big]-\Phi'_{n,J_\mu,\mathcal{N}_{n'}}(a)-F'_{n,J_\mu,\mathcal{N}_{n'}}(\ell). \qquad \text{(П.6з)}$$

$$\Phi_{\lambda,\mathcal{N}_\mu,\mathcal{N}_\nu}(a) \equiv \frac{1}{\sin\mu\pi}\Big[\cos\mu\pi\,\Phi_{\lambda,J_\mu,\mathcal{N}_\nu}(a)-\Phi_{\lambda,J_\mu,\mathcal{N}_\nu}(a)\Big]$$

При $n \geq n'$

$$\Phi_{\lambda,\mathcal{N}_n,\mathcal{N}_{n'}}(a) \equiv \frac{1}{\pi^2}\Big\{\frac{a^{n+n'+\lambda+1}}{2^{n+n'}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\,(n+n'+2m)!\left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(n+n'+\lambda+2m+1)\,m!\,(n+n'+m)!\,(n+m)!\,(n'+m)!}\times$$

$$\times\Big\{\Big[2\Big(\ln\frac{a}{2}+C\Big)-\frac{2}{n+n'+\lambda+2m+1}-\sum_{K=1}^{n'+m}\frac{1}{K}-\sum_{K=1}^{m}\frac{1}{K}+\sum_{K=n+n'+m+1}^{n+n'+2m}\frac{1}{K}+$$

$$+\sum_{K=n+m+1}^{n+n'+2m}\frac{1}{K}\Big]^2+\frac{4}{(n+n'+\lambda+2m+1)^2}-\sum_{K=m+1}^{n+n'+2m}\frac{1}{K^2}-\sum_{K=n+m+1}^{n+n'+2m}\frac{1}{K^2}-$$

$$-\sum_{K=n'+m+1}^{n+n'+2m}\frac{1}{K^2}-\sum_{K=n+n'+m+1}^{n+n'+2m}\frac{1}{K^2}\Big\}-\frac{a^{n-n'+\lambda+1}}{2^{n-n'-1}}\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{n'-1}\frac{(n'-m-1)!\,(n-n'+2m)!\left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(n-n'+\lambda+2m+1)\,m!\,(n+m)!\,(n-n'+m)!}\Big[2\Big(\ln\frac{a}{2}+C\Big)-$$

$$
-\frac{2}{n-n'+\lambda+2m+1}-\sum_{K=1}^{m}\frac{1}{K}-\sum_{K=1}^{n'-m-1}\frac{1}{K}-\sum_{K=n-n'+2m+1}^{n+m}\frac{1}{K}+\sum_{K=n-n'+m+1}^{n-n'+2m}\frac{1}{K}\Bigg]-
$$

$$
-\frac{a^{n'-n+\lambda+1}}{2^{n'-n}}\sum_{m=0}^{E\left(\frac{n-n'-1}{2}\right)}\frac{(-1)^m (n-m-1)!\,(n-n'-m-1)!\,\left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(n'-n+\lambda+2m+1)\,m!\,(n'+m)!\,(n-n'-2m-1)!}\times
$$

$$
\times\left[2\left(\ln\frac{a}{2}+C\right)-\frac{2}{n'-n+\lambda+2m+1}-\sum_{K=1}^{m}\frac{1}{K}-\sum_{K=1}^{n'+m}\frac{1}{K}+\sum_{K=-n+m+1}^{n'-n+2m}\frac{1}{K}+\right.
$$

$$
\left.+\sum_{k=n'-n+m+1}^{n'-n+2m}\frac{1}{K}\right]+(-1)^{n-n'}\frac{a^{n'-n+\lambda+1}}{2^{n'-n-1}}\sum_{m=E\left(\frac{n-n'+1}{2}\right)}^{n-n'-1}\frac{(-1)^m (n-m-1)!}{(n'-n+\lambda+2m+1)}\times
$$

$$
\times\frac{(n'-n+2m)!\,(n-n'-m-1)!}{m!\,(n'+m)!}+\frac{a^{-n-n'+\lambda+1}}{2^{-n-n'}}\sum_{m=0}^{n'-1}\frac{(n-m-1)!\,(n'-m-1)!\,(n+n'-m-1)!\,\left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(-n-n'+\lambda+2m+1)\,m!\,(n+n'-2m-1)!}\Bigg\}
$$

$$
F_{\lambda,N_\mu,N_\nu}(b)\equiv-\frac{b^{\lambda-1}}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\cos\left(2b-\frac{\mu\pi}{2}-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{m\pi}{2}\right)\frac{\Gamma(-\lambda+m+1)}{(2b)^m}\sum_{m'=0}^{m}\frac{1}{\Gamma(-\lambda+m'+1)}\times
$$

$$
\times\sum_{m''=0}^{m'}\frac{\Gamma(\mu+m''+\frac{1}{2})\Gamma(-\mu+m''+\frac{1}{2})\Gamma(\nu+m'-m''+\frac{1}{2})\Gamma(-\nu+m'-m''+\frac{1}{2})}{m''!\,(m'-m'')!\,\Gamma(\mu+\frac{1}{2})\Gamma(-\mu+\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(-\nu+\frac{1}{2})}-
$$

$$
-b^{\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m 2^m b^{-m}\,\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)}{(\lambda-m)\,m!\,\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}-\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)}
$$

$$
\int_a^\infty t^\lambda N_\mu(t)N_\nu(t)\,dt=\frac{2^{\lambda-1}}{\pi^3}\left[\cos\mu\pi\cos(-\mu+\nu+\lambda)\frac{\pi}{2}+\cos\nu\pi\cos(\mu-\nu+\lambda)\frac{\pi}{2}+\right.
$$

$$
\left.+\sin\lambda\pi\sin(-\mu-\nu+\lambda)\frac{\pi}{2}\right]\Gamma(-\lambda)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)\times
$$

$$
\times\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)-\Phi_{\lambda,N_\mu,N_\nu}(a).
$$

$$
Re(\lambda)<0 \qquad (\text{П}.7)
$$

При $a<0$ $\int_a^\infty$ существует, $(\mu,\nu\neq p+\frac{1}{2})$ если дополнительно $Re(\lambda+1)>|Re(\mu)|+|Re(\nu)|$; при $Re(\lambda+1)\leqslant|Re(\mu)|+|Re(\nu)|$ существует $\int_a^\infty$, если

1) $|Re(\lambda+1)|\leqslant\big||Re(\mu)|-|Re(\nu)|\big|$; $\mp\mu+\nu+\lambda+1$ действ. четн., $Re(\pm\mu)\geqslant 0$, $|Re(\mu)|\geqslant|Re(\nu)|$, $\nu=p$
2) $|Re(\lambda+1)|>\big||Re(\mu)|-|Re(\nu)|\big|$, $Re(\lambda+1)\geqslant 0$; $\mp\mu\mp\nu+\lambda+1$ действ.четн., $Re(\pm\mu)\geqslant 0$, $|Re(\mu)|\geqslant|Re(\nu)|$, $\nu=p$.
3) $|Re(\lambda+1)|>\big||Re(\mu)|-|Re(\nu)|\big|$, $Re(\lambda+1)\leqslant 0$; $\mu,\nu,\lambda+1$ действ.целые числа с четной суммой.

При $\mu,\nu\neq p$, $-\mu-\nu-\lambda-1=2n$, $\mu+\nu-\lambda-1\neq 2n'$

$$
\int_a^\infty t^\lambda N_\mu(t)N_\nu(t)\,dt=\frac{(-1)^{n+1}\,\mathrm{ctg}\,\mu\pi\,\mathrm{ctg}\,\nu\pi\;2^\lambda\Gamma(-\lambda)}{n!\,\Gamma(\mu+\nu+n+1)\Gamma(\mu+n+1)\Gamma(\nu+n+1)}\times
$$

$$
\times\left\{2\ln\frac{a}{2}-\psi(n+1)+2\psi(-\lambda)-\psi(\mu+\nu+n+1)-\psi(\mu+n+1)-\psi(\nu+n+1)-\right. \qquad (\text{П}.7\text{а})
$$

$$
\left.-\pi\left[\frac{2}{\sin 2\mu\pi}+\frac{2}{\sin 2\nu\pi}-\frac{1}{\cos\mu\pi\cos\nu\pi\sin(\mu+\nu)\pi}\right]\right\}-\Phi'_{\lambda,N_\mu,N_\nu}(a).
$$

При $\nu\neq p$, $\mu-\nu-\lambda-1=2n$, $-\mu+n\neq n'$, $-\mu+\nu-\lambda-1\neq 2n''$

$$
\int_a^\infty t^\lambda N_\mu(t)N_\nu(t)\,dt=\frac{\mathrm{ctg}\,\nu\pi\;2^\lambda\Gamma(-\lambda)\Gamma(\mu-n)}{\pi\,n!\,\Gamma(-\mu+\nu+n+1)\Gamma(\nu+n+1)}\left\{2\ln\frac{a}{2}-\right.
$$

$$
-\psi(n+1)+2\psi(-\lambda)-\psi(-\mu+\nu+n+1)-\psi(\mu-n)-\psi(\nu+n+1)-
$$

$$
\left.-\pi\left[\frac{\cos\mu\pi}{\cos\nu\pi\sin(\mu-\nu)\pi}+\frac{2}{\sin 2\nu\pi}\right]\right\}-\Phi'_{\lambda,N_\mu,N_\nu}(a). \qquad (\text{П}.7\text{б})
$$

При $\mu\neq p$, $-\mu+\nu-\lambda-1=2n$, $-\nu+n\neq n'$, $\mu-\nu-\lambda-1\neq 2n''$

$$\int_a^\infty t^\lambda N_\mu(t)N_\nu(t)\,dt = \frac{ctg\,\mu\pi\; 2^\lambda\Gamma(-\lambda)\Gamma(\nu-n)}{\pi\; n!\;\Gamma(\mu-\nu+n+1)\Gamma(\mu+n+1)}\Big\{2\ln\frac{a}{2} -$$

$$-\psi(n+1)+2\psi(-\lambda)-\psi(\mu-\nu+n+1)-\psi(\mu+n+1)-\psi(\nu-n)-$$

$$-\pi\Big[\frac{\cos\nu\pi}{\cos\mu\pi\,\sin(-\mu+\nu)\pi}+\frac{2}{\sin 2\mu\pi}\Big]\Big\} - \phi'_{\lambda,N_\mu,N_\nu}(a). \tag{П.7в}$$

При $\mu+\nu-\lambda-1=2n$, $-\mu+n\neq n'$, $-\nu+n\neq n''$, $-\mu-\nu-\lambda-1\neq 2n'''$

$$\int_a^\infty t^\lambda N_\mu(t)N_\nu(t)\,dt = \frac{(-1)^{n+1}2^\lambda\Gamma(-\lambda)\Gamma(\mu-n)\Gamma(\nu-n)}{\pi^2\, n!\,\Gamma(-\mu-\nu+n+1)}\Big[2\ln\frac{a}{2} -$$

$$-\psi(n+1)+2\psi(-\lambda)-\psi(-\mu-\nu+n+1)-\psi(\mu-n)-\psi(\nu-n)-$$

$$-\frac{\pi\cos\mu\pi\cos\nu\pi}{\sin(\mu+\nu)\pi}\Big] - \phi'_{\lambda,N_\mu,N_\nu}(a). \tag{П.7г}$$

При $\mu,\nu\neq p$, $-\mu-\nu-\lambda-1=2n$, $\mu+\nu-\lambda-1=2n'$

$$\int_a^\infty t^\lambda N_\mu(t)N_\nu(t)\,dt = \frac{(-1)^{n'+1}2^\lambda\Gamma(-\lambda)}{\sin\mu\pi\,\sin\nu\pi\; n!\; n'!\;\Gamma(\mu+n+1)\Gamma(\nu+n+1)}\times$$

$$\times(1+\cos^2\mu\pi)\Big[2\ln\frac{a}{2}-\psi(n+1)+2\psi(-\lambda)-\psi(n'+1)-\psi(\mu+n+1)-$$

$$-\psi(\nu+n+1)\Big] - \phi'_{\lambda,N_\mu,N_\nu}(a). \tag{П.7д}$$

При $\mu,\nu\neq p$, $\mu-\nu-\lambda-1=2n$, $-\mu+\nu-\lambda-1=2n'$

$$\int_a^\infty t^\lambda N_\mu(t)N_\nu(t)\,dt = \frac{ctg\,\nu\pi\; 2^{\lambda+1}\Gamma(-\lambda)\Gamma(\mu-n)}{\pi\; n!\; n'!\;\Gamma(\nu+n+1)}\Big\{2\ln\frac{a}{2} -$$

$$\int_a^\infty t^\lambda K_\nu^2(t)\,dt = \frac{\pi}{4}a^{\lambda-1}e^{-2a}\Big\{1-\Big[-\lambda+1+2\Big(\frac14-\nu^2\Big)\Big]\frac{1}{2a} +$$

$$+\Big[(-\lambda+1)(-\lambda+2)+2(-\lambda+2)\Big(\frac14-\nu^2\Big)\Big(\frac14-\nu^2+\frac94-\nu^2\Big)\Big]\frac{1}{(2a)^2}+O\Big(\frac{1}{8a^3}\Big)\Big\}. \tag{3.Ia}$$

В случаях, когда в подынтегральную функцию входит $J_\nu(t)$ или $N_\nu(t)$, асимптотическое разложение определяется только для положительных t. Тогда при нахождении интеграла при больших отрицательных a необходимо пользоваться аналитическим продолжением для отрицательных t (см. приложение).

Рассмотрим, например, при больших отрицательных a

$$\int_a^\infty t^\lambda J_\nu(t)\,dt\ , \qquad Re(\lambda)<\frac12 .$$

При малых и больших положительных a этот интеграл дается (4.2а), (4.2б) соответственно.

Обозначим их правые части посредством $\phi_{\lambda,J_\nu}(\infty)-\phi_{\lambda,J_\nu}(a)$ и $F_{\lambda,J_\nu}(a)$.

Для больших отрицательных a имеем:

$$\int_a^\infty t^\lambda J_\nu(t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big\{\int_\varepsilon^\infty t^\lambda J_\nu(t)\,dt - \int_{-\varepsilon}^a t^\lambda J_\nu(t)\,dt\Big\}.$$

Так как $J_\nu(e^{i\pi}t) = e^{i\nu\pi}J_\nu(t)$,

$$\int_{-\varepsilon}^a t^\lambda J_\nu(t)\,dt = e^{i(\nu+\lambda+1)\pi}\int_\varepsilon^{-a} t^\lambda J_\nu(t)\,dt\ ,$$

$$\int_a^\infty t^\lambda J_\nu(t)\,dt = -2i\sin(\nu+\lambda+1)\frac{\pi}{2}\, e^{i(\nu+\lambda+1)\frac{\pi}{2}} \times$$

$$\times\left[\phi_{\lambda,J_\nu}(\infty) - \lim_{\varepsilon\to 0}\phi_{\lambda,J_\nu}(\varepsilon)\right] + e^{i(\nu+\lambda+1)\pi} F_{\lambda,J_\nu}(-a)\cdot \tag{3.2}$$

Таким образом, если $Re(\nu+\lambda+1) > 0$, то $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\phi_{\lambda,J_\nu}(\varepsilon)=0$ и $\int_a^\infty t^\lambda J_\nu(t)\,dt$ равняется правой части (3.2). Если же $Re(\nu+\lambda+1)\leqslant 0$, то интеграл не существует, однако, при $\nu+\lambda+1$, равному действительному четному числу, существует его главное значение, даваемое последним членом в (3.2).

4. Вычисление интегралов вида (I.I), (I.2)

Теперь исследуем интегралы (I.I), (I.2) для произвольного b. Представив $\int_a^b$ как разность интегралов $\int_a^\infty$ и $\int_b^\infty$, мы можем воспользоваться выражениями для них, получаемыми способами, описанными в §§2,3. Причем, если a и b небольшие (большие) числа, то интегралы $\int_a^\infty$ и $\int_b^\infty$ даются одной и той же формулой, получаемой способом § 2(§ 3). Особый интерес представляет случай, когда a –небольшое, b –большое. В этом случае, который только и будет в дальнейшем рассматриваться, $\int_a^\infty$ дается формулой § 2, а $\int_b^\infty$ – формулой § 3.
Например, для интеграла $\int_a^b t^\lambda K_\nu^2(t)dt$ (см.(П.8) – (П.8в)) получается

$$\int_a^b t^\lambda K_\nu^2(t)\,dt \sim \phi_{\lambda,K_\nu^2}(\infty) - \phi_{\lambda,K_\nu^2}(a) - F_{\lambda,K_\nu^2}(b)\ , \tag{4.I}$$

$$\times\left[2\ln a - \psi(n+1) - \psi(-\nu-n) - \psi(\nu-n) + \psi(-n+\tfrac{1}{2})\right] - \phi'_{\lambda,K_\nu^2}(a); \tag{2.2a}$$

Когда $\pm\nu - \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2} = n$, $-\frac{\lambda}{2} - 1 \neq n'$, $\mp\nu - \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2} \neq n''$, $-\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2} \neq n'''$

$$\int_a^\infty t^\lambda K_\nu^2(t)\,dt = \frac{(-1)^{n+1}\pi^{1/2}\Gamma(\pm\nu-n)\Gamma(\pm 2\nu-n)}{4n!\,\Gamma(\pm\nu-n+\frac{1}{2})}\times$$

$$\times\left[2\ln a - \psi(n+1) - \psi(\pm\nu-n) - \psi(\pm 2\nu-n) + \psi(\pm\nu-n+\tfrac{1}{2})\right] - \phi'_{\lambda,K_\nu^2}(a) \tag{2.2б}$$

Здесь $\phi'_{\lambda,K_\nu^2}(a)$ есть $\phi_{\lambda,K_\nu^2}(a)$ за вычетом обращающегося в бесконечность члена в (2.5). ψ –логарифмическая производная от гамма-функции: $\psi(z) = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)$
Если $a<0$, то рассматриваемый интеграл сходится при условии (2.I) и дается формулой (2.2) При нарушении (2.I) несобственный интеграл не существует. Однако, если при этом существует его главное значение (при $Re(\lambda+1)>0$, $Re(\pm 2\nu)>0$, если $\mp 2\nu+\lambda+1$ –действ. четн., при $Re(\lambda+1)\leqslant 0$, если $\lambda+1$ – действ. четн., 2ν –действ. четн.), то нетрудно убедиться, что оно дается правой частью (2.2) и следующих из нее формул (2.2а), (2.2б) и т.д., в предположении, что a под логарифмом (если он входит в ответ) понимается в смысле абсолютного значения.

Выражение (2.2) и вытекающие из него формулы, хотя и являются общими *), но практически удобны при небольших a.

3. Асимптотическое разложение

При больших $|a|$ рассматриваемый интеграл представляется асимптотическими рядами.

В случае, когда ν невелико, при $a>0$ решение получается почленным интегри... нием асимптотического разложения $t^{\lambda}K_{\nu}^{2}(t)$, с последующей подстановкой выражения [4] для неполной гамма-функции $\Gamma(\lambda-m,2a)$ при больших a:

$$\int_a^{\infty} t^{\lambda}K_{\nu}^{2}(t)\,dt \sim \frac{\pi}{4}a^{\lambda-1}e^{-2a}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m}\Gamma(-\lambda+m+1)}{(2a)^{m}}\times$$

$$\times\sum_{m'=0}^{m}\frac{1}{\Gamma(-\lambda+m'+1)}\sum_{m''=0}^{m'}\frac{\Gamma(\nu+m''+\frac{1}{2})\Gamma(-\nu+m''+\frac{1}{2})\Gamma(\nu+m'-m''+\frac{1}{2})\Gamma(-\nu+m'-m''+\frac{1}{2})}{m''!\,(m'-m'')!\,\Gamma^{2}(\nu+\frac{1}{2})\Gamma^{2}(-\nu+\frac{1}{2})}. \tag{3.I}$$

Поскольку исходное выражение для асимптотического разложения подынтегральной функции в данном случае имеет силу как для положительных, так и для отрицательных t, то нетрудно показать, что, при больших отрицательных a также, интеграл и его главное значение (если они существуют, см. § 2) даются правой частью (3.I).

Выпишем начальные члены разложения (3.I).

---

*) Нетрудно убедиться, в частности, что при $\lambda=1$ (2.2) есть хорошо известная формула: $\int_a^{\infty} tK_{\nu}^{2}(t)\,dt=\frac{a^{2}}{2}\left[K_{\nu}'^{2}(a)-\left(1+\frac{\nu^{2}}{a^{2}}\right)K_{\nu}^{2}(a)\right]$.

При $\lambda=n$, $\nu=n'$, $\mu-n'-n-1=2n''$

$$\int_a^{b} t^{n}N_{\mu}(t)N_{\nu}(t)\,dt \sim \frac{(-1)^{n''}2^{n-1}(n+n'')!\,(n+n'+n'')!}{\pi^{2}\,n!\,n''!\,(n'+n'')!}\left\{\left[2\left(\ln\frac{a}{2}+\right.\right.\right.$$

$$\left.+C\right)-\sum_{k=1}^{n''}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n'+n''}\frac{1}{k}-\sum_{k=n+1}^{n+n''}\frac{1}{k}-\left.\sum_{k=n+1}^{n+n'+n''}\frac{1}{k}\right]^{2}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2}}+$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n''}\frac{1}{k^{2}}+\sum_{k=1}^{n'+n''}\frac{1}{k^{2}}-\sum_{k=n+1}^{n+n''}\frac{1}{k^{2}}-\sum_{k=n+1}^{n+n'+n''}\frac{1}{k^{2}}\right\}-\Phi'_{n,N_{\mu},N_{\nu}}(a)-F'_{n,N_{\mu},N_{\nu}}(b). \tag{П.7c}$$

$$\Phi_{\lambda,K_{\mu},K_{\nu}}(a)=\frac{\pi^{2}}{4\sin\mu\pi\sin\nu\pi}\left\{e^{-i(-\mu-\nu+\lambda+1)\frac{\pi}{2}}\Phi_{\lambda,J_{-\mu},J_{-\nu}}(ia)-\right.$$

$$-e^{-i(\mu-\nu+\lambda+1)\frac{\pi}{2}}\Phi_{\lambda,J_{\mu},J_{-\nu}}(ia)-e^{-i(-\mu+\nu+\lambda+1)}\times$$

$$\left.\times\Phi_{\lambda,J_{-\mu},J_{\nu}}(ia)+e^{-i(\mu+\nu+\lambda+1)\frac{\pi}{2}}\Phi_{\lambda,J_{\mu},J_{\nu}}(ia)\right\}$$

$$\int_a^{\infty} t^{\lambda}K_{\mu}(t)K_{\nu}(t)\,dt=\frac{2^{\lambda-2}}{\Gamma(\lambda+1)}\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)\times \tag{П.8}$$

$$\times\Gamma\left(\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)-\Phi_{\lambda,K_{\mu},K_{\nu}}(a).$$

При $a<0$ $\int_a^{\infty}$ существует, если $Re(\lambda+1)>|Re(\mu)|+|Re(\nu)|$; при $Re(\lambda+1)\leq|Re(\mu)|+|Re(\nu)|$ существует $\int_a^{\infty}$, если:
I) $|Re(\lambda+1)|\leq\big||Re(\mu)|-|Re(\nu)|\big|$; $\mp\mu+\nu+\lambda+1$ действ. четн., $Re(\pm\mu)\geq 0$, $|Re(\mu)|\geq|Re(\nu)|$, $\nu=p$.

2) $|Re(\lambda+1)| > ||Re(\mu)| - |Re(\nu)||$, $Re(\lambda+1) \geq 0$; $\mp\mu\mp\nu+\lambda+1$ действ.четн., $Re(\pm\mu) \geq 0$, $Re(\pm\nu) \geq 0$.

3) $|Re(\lambda+1)| > ||Re(\mu)| - |Re(\nu)||$, $Re(\lambda+1) \leq 0$; $\mu, \nu, \lambda+1$ действ.целые числа с четной суммой.

При $\mu = n$, $\nu = n'$, $n + n' - \lambda - 1 = 2n''$, $n \geq n' > n''$

$$\int_a^\infty t^\lambda K_\mu(t) K_\nu(t)\, dt = \frac{(-1)^{n''+1}\, 2^{\lambda-2}\, (\lambda+n'')!\,(n-n''-1)!\,(n'-n''-1)!}{n''!\ \lambda!} \times$$

$$\times \left[2\left(\ln\frac{a}{2}+C\right) - \sum_{K=1}^{n''}\frac{1}{K} - \sum_{K=1}^{n'-n''}\frac{1}{K} + \sum_{K=n-n''}^{\lambda}\frac{1}{K} - \sum_{K=\lambda+1}^{\lambda+n''}\frac{1}{K}\right] - \Phi'_{\lambda,K_\mu,K_\nu}(a). \qquad (П.8а)$$

В остальных случаях, когда правая часть (П.8) обращается в неопределенность, значения левой части даются приведенными выше формулами, если воспользоваться формальным соотношением:

$$\int_a^\infty t^\lambda K_\mu(t) K_\nu(t)\, dt = -\frac{\pi^2}{4} e^{i(\mu+\nu-\lambda-1)\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_{ia}^\infty t^\lambda J_\mu(t) J_\nu(t)\, dt - \right.$$

$$\left. - \int_{ia}^\infty t^\lambda \mathcal{N}_\mu(t) \mathcal{N}_\nu(t)\, dt + i\int_{ia}^\infty t^\lambda J_\mu(t) \mathcal{N}_\nu(t)\, dt + i\int_{ia}^\infty t^\lambda J_\nu(t) \mathcal{N}_\mu(t)\, dt \right\} \qquad (П.8б)$$

$$\int_\ell^\infty t^\lambda K_\mu(t) K_\nu(t)\, dt \sim \frac{\pi}{4} \ell^{\lambda-1} e^{-2\ell} \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m \Gamma(-\lambda+m+1)}{(2\ell)^m} \times$$

$$\times \sum_{m'=0}^m \frac{1}{\Gamma(-\lambda+m'+1)} \sum_{m''=0}^{m'} \frac{\Gamma(\mu+m''+\frac{1}{2})\Gamma(-\mu+m''+\frac{1}{2})\Gamma(\nu+m'-m''+\frac{1}{2})\Gamma(-\nu+m'-m''+\frac{1}{2})}{m''!\,(m'-m'')!\,\Gamma(\mu+\frac{1}{2})\Gamma(-\mu+\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(-\nu+\frac{1}{2})} . \qquad (П.8в)$$

$$\int_a^\infty t^\lambda J_\mu(ct) J_\nu(dt)\, dt = \frac{2^\lambda d^\nu \Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)}{c^{\nu+\lambda+1}\Gamma(\nu+1)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)} \times$$

$$\times\, {}_2F_1\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2},\ -\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2};\ \nu+1;\ \frac{d^2}{c^2}\right) -$$

$$- \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^\mu \left(\frac{d}{2}\right)^\nu a^{\mu+\nu+\lambda+1}}{\Gamma(\nu+1)} \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m \left(\frac{ca}{2}\right)^{2m} {}_2F_1\left(-m, -\mu-m; \nu+1; \frac{d^2}{c^2}\right)}{(\mu+\nu+\lambda+2m+1)\, m!\, \Gamma(\mu+m+1)} \qquad (П.9)$$

если $c \neq d$, $Re(\lambda) < 1$

При $a < 0$ $\int_a^\infty$ существует, если дополнительно $Re(\mu+\nu+\lambda+1) > 0$; при $Re(\mu+\nu+\lambda+1) \leq 0$ существует $\int_a^\infty$,если $\mu+\nu+\lambda+1$ действ.четн.

При $-\mu-\nu-\lambda-1 = 2n$, $-\mu-n-1 \neq n'$, $-\nu-1 \neq n''$

$$\int_a^\infty t^\lambda J_\mu(ct) J_\nu(dt)\, dt = \frac{(-1)^{n+1}\, 2^\lambda d^\nu}{c^{\nu+\lambda+1}\ n!\,\Gamma(\nu+1)\Gamma(\mu+n+1)} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^n \frac{n!\,\Gamma(\mu+n+1)\Gamma(\nu+1)\left(\frac{d}{c}\right)^{2m}}{m!\,(n-m)!\,\Gamma(\mu+n-m+1)\Gamma(\nu+m+1)} \left[2\ln\frac{ca}{2} - \psi(n-m+1) - \right.$$

$$
-\psi(\mu+n-m+1)\Big] - \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^{\mu}\left(\frac{d}{2}\right)^{\nu} a^{\mu+\nu+\lambda+1}}{\Gamma(\nu+1)} \sum_{m=0}^{\infty}{}' \frac{(-1)^m \left(\frac{ca}{2}\right)^{2m}}{(\mu+\nu+\lambda+2m+1)} \times
$$

$$
\times \frac{{}_2F_1\left(-m, -\mu-m; \nu+1; \frac{d^2}{c^2}\right)}{m!\,\Gamma(\mu+m+1)}. \tag{П.9а}
$$

Если $c \neq d$

$$
\int_b^{\infty} t^{\lambda} J_{\mu}(ct) J_{\nu}(dt)\,dt \sim \frac{2^{-\lambda} b^{\lambda-1}}{\pi\sqrt{cd}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-\lambda+m+1)}{b^m} \times
$$

$$
\times \sum_{m'=0}^{m} \frac{1}{\Gamma(-\lambda+m'+1)} \sum_{m''=0}^{m'} \Big\{ (c+d)^{\lambda-m-1} \cos\Big[(c+d)b - \frac{\mu\pi}{2} - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{m\pi}{2}\Big] -
$$

$$
-(-1)^{m''}(c-d)^{\lambda-m-1} \sin\Big[(c-d)b - \frac{\mu\pi}{2} + \frac{\nu\pi}{2} - \frac{m\pi}{2}\Big]\Big\} \times
$$

$$
\times \frac{\Gamma(\mu+m''+\frac{1}{2})\Gamma(-\mu+m''+\frac{1}{2})\Gamma(\nu+m'-m''+\frac{1}{2})\Gamma(-\nu+m'-m''+\frac{1}{2})}{m''!\,(m'-m'')!\,d^{m''}\,c^{m'-m''}\,\Gamma(\mu+\frac{1}{2})\Gamma(-\mu+\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(-\nu+\frac{1}{2})}. \tag{П.9б}
$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В.А.Джрбашян. Известия АН Арм ССР, серия физ.-мат.наук, 18, 3, 1965.
2. Luke Y.L. Integrals of Bessel functions, Mc Graw-Hill Book Company Inc., New York, Toronto, London, 1962
3. Г.Н.Ватсон. Теория бесселевых функций, том I, ИЛ, М., 1949.
4. A.Erdelyi, W.Magnus, F.Oberhettinger, F.G.Tricomi. Higher transcendental functions, vol.2, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1953
5. E.M.Wright, The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function, J.London Math.Soc., 10, 286, 1935
6. В.А.Джрбашян. Ж.вычисл.матем. и матем.физ., 4, 348, 1964.

Редактор Л.П. Мукаян

Заказ 0497 ВФ-03448 Тираж 440

Подписано к печати 1/12 -73г. Формат издания 30 х 40
3,0 уч.изд.л. Ц. 2I к.

Отпечатано на ротапринте
Ереванского физического института, Ереван 36,пер.Маркаряна 2