

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ  
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЕФИ-461(3)-81

С.М.ДАРБИНЯН, К.А.ИСПИРЯН

К-ИОНИЗАЦИЯ КАНАЛИРОВАННЫМИ  
РЕЛЯТИВИСТИЧЕСКИМИ ЧАСТИЦАМИ

ԵՐԵՎԱՆ 1981 ԵՐԵՎԱՆ

С.М. ДАРБИНЯН, К.А. ИСПИРЯН

К-ИОНИЗАЦИЯ КАНАЛИРОВАННЫМИ РЕЛЯТИВИСТСКИМИ  
ЧАСТИЦАМИ

Теоретически исследованы энергетическая и ориентационная зависимости сечения ионизации К-оболочек атомов релятивистскими частицами в кристаллах. Показано, что сечения К-ионизации в кристалле германия при условиях каналирования по сравнению со случаем отсутствия каналирования увеличиваются  $\sim 1,25$  и  $1,6$  раза для аксиального и плоскостного каналирования отрицательных частиц, соответственно, и уменьшаются  $\sim 0,6$  раза для плоскостного каналирования положительных частиц.

Ереванский физический институт

Ереван 1981

EWM-46I(3)-8I

S.M.DARBINIAN, K.A.ISPIRIAN

K-IONIZATION BY CHANNELLED RELATIVISTIC PARTICLES

The energy and orientation dependences of the cross-section of atomic K-shell ionization by relativistic particles in crystals are investigated theoretically. It is shown that the K-shell ionization cross-section in germanium crystal in the case of channelling increases  $\sim 1.25$  and  $1.6$  times for the axial and planar channelling of negative particles and decreases  $\sim 0.6$  times for planar channelling of positive particles, respectively, as compared with the case of absence of channelling.

Yerevan Physics Institute

Yerevan 1981

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЕФФИ-461(3)-81

С.М.ДАРВИНЯН, К.А.ИСПИРЯН

К-ИОНИЗАЦИЯ КАНАЛИРОВАННЫМИ РЕЛЯТИВИСТСКИМИ  
ЧАСТИЦАМИ

Ереван 1981

© *Ереванский физический институт, 1981*

## 1. Введение

Теоретическое и экспериментальное изучение ионизации К-оболочек атомов нерелятивистскими частицами, проходящими через аморфные мишени, начато давно [1]. При релятивистских энергиях точное вычисление сечения К-ионизации  $\sigma_K$  связано с большими трудностями [2,3]. В [4] проведена оценка для релятивистских частиц методом эквивалентных фотонов. В работах [5,6] развит полуклассический метод вычисления  $\sigma_K$  для релятивистских электронов, в котором часть сечения, обусловленная "далекими" столкновениями, вычисляется методом эквивалентных фотонов, а другая часть, обусловленная "близкими" столкновениями - исходя из сечения электрон-электронного рассеяния. В недавней работе Ф.Ф.Комарова [7] развит метод вычисления вероятности К-ионизации в зависимости от прицельного параметра и получены выражения для  $\sigma_K$  релятивистскими тяжелыми частицами в аморфных средах.

При высоких энергиях  $\sigma_K$  экспериментально измерена группой Хофстадтера при энергиях электронов  $E_e = 150+900$  Мэв [8],

а также в работе [9] при  $E_e = 15+65$  Мэв. Измерена также  $\sigma_K$  для протонов с энергией  $E_p = 4,88$  Гэв [10]. Полученные результаты находятся в удовлетворительном согласии с теорией [5,6] и [7].

Известно, что каналирование приводит к перераспределению частиц в поперечных направлениях [11], и, поскольку вероятность К-ионизации сильно зависит от прицельного параметра, можно ожидать, что, по сравнению со случаем аморфных сред, в кристаллах при каналировании  $\sigma_K$  должна увеличиться для отрицательных частиц и уменьшиться для положительных частиц. Экспериментально это явление наблюдается при малых энергиях (см. [12]). К-ионизация каналированными положительными частицами рассмотрена квантовомеханически в [13].

В настоящей работе вычисляется  $\sigma_K$  для релятивистских отрицательных и положительных частиц, проходящих через кристалл, в зависимости от энергии и угла ориентации кристалла относительно направления пучка падающих частиц. При этом используются зависящие от прицельного параметра выражения для вероятности ионизации [7] и для функции распределения каналированных частиц [14].

## 2. К-ионизация при осевом каналировании отрицательных частиц

Пусть частица движется параллельно цепочке кристалла (ось  $Z$  направлена по цепочке) на прицельном расстоянии  $\rho$  от цепочки, меньшем половины расстояния между соседними цепочками. Прицельный параметр частицы относительно атомов на цепочке с индексами  $i, j$  будет:

$$\vec{\rho}_{ij} = \vec{\rho} - (i\vec{a}_1 + j\vec{a}_2), \quad (I)$$

где  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  - базисные векторы цепочек на поперечной плоскости (плоскость  $xy$ ),  $i, j$  - целые числа. Тогда сечение  $K$ -ионизации будет:

$$\sigma(\rho) = \frac{1}{Nd} \sum_{ij} P(\rho_{ij}), \quad (2)$$

где  $N$  - число атомов в единице объема кристалла,  $d$  - расстояние между атомами на цепочке.  $P(\rho_{ij})$  - вероятность  $K$ -ионизации частицей с прицельным параметром  $\rho_{ij}$ , а суммирование проводится по всем атомам на поперечной плоскости.

Рассмотрим теперь параллельный пучок отрицательных частиц с энергией  $E = \gamma mc^2$ , который падает на кристалл под малым углом  $\theta_0$  относительно оси кристалла. Известно, что при выполнении условия осевого каналирования определенная доля  $D$  частиц захватывается в режим осевого каналирования и совершает розетное движение, тогда как другая часть  $1-D$  каналированных частиц продолжает прямолинейное движение. В этой работе, как и в [14], мы принимаем, что угловой разброс падающих частиц мал по сравнению с соответствующим углом Линдхарда и пренебрегаем многократным рассеянием и другими потерями. Для неканалированных частиц  $\sigma_K$  вычисляется по методам, развитым для аморфной среды в [5, 6]. Для нахождения сечения  $K$ -ионизации каналированных частиц необходимо (2) усреднить по  $w(\rho)$  - функции распределения частиц по прицельным параметрам  $\rho$ . После такого усреднения результат представим в виде:

$$\sigma^{ch} = \frac{1}{Nd} \left\{ \int_{R_K}^{R_K} P_1(\rho) w(\rho) d\rho + \int_{R_K}^{R_2} P_2(\rho) w(\rho) d\rho + \sum_{ij} \int_{\frac{R_1}{2d}}^{\frac{R_2}{2d}} \frac{d\psi}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} P_2(\rho_{ij}) w(\rho) d\rho \right\} \quad (3)$$

где  $\rho_{ij}^2 = (x - ia_1)^2 + (y - ja_2)^2$ ,  $R_K = \lambda_e / d Z_{eff}$  - радиус К-оболочки,  $\lambda_e = \hbar / m_e c$ ,  $d = e^2 / \hbar c$ ,  $Z_{eff} = Z - 0.3$ ,  $Z$  - заряд ядра,  $R_1$  и  $R_2$  - минимальный и максимальный радиусы каналирования. В (3) первый член обусловлен "близкими" столкновениями ( $\rho < R_K$ ), а второй - "далекими" ( $\rho > R_K$ ) столкновениями с атомами цепочки, около которой каналирована частица. Третий член в (3) соответствует "далеким" ( $\rho_{ij} > R_K$ ) столкновениям с атомами на остальных цепочках и, соответственно, суммирование по  $i$ ,  $j$  идет по всем цепочкам, кроме первой. Как показано в [7], при релятивистских энергиях  $\gamma \gg 1$ :

$$P_1(\rho) = \frac{2\sigma}{\pi R_K^2} \rho K_1(2\rho/R_K), \quad (4)$$

$$P_2(\rho_{ij}) = \frac{1.129 \alpha^2 I}{\gamma^2} K_1(I \rho_{ij} / \lambda_e \gamma), \quad (4')$$

где  $\sigma$  - сечение рассеяния частицы на К-электроне, проинтегрированное по передаваемой энергии от  $I$  ( $I$  - энергия связи К-электрона в единицах  $m_e c^2$ ) до максимально возможной,  $K_1(x)$  - модифицированная функция Бесселя первого порядка. Легко показать, что для релятивистских частиц независимо от массы и спина с точностью до членов порядка  $I/\gamma$  (см. Приложение I)  $\sigma$  одинаково и с учетом двух электронов на К-оболочке равно

$$\sigma \approx 1.5 \sigma_0 \frac{1}{I}; \quad (5)$$

$$(\sigma_0 = \frac{8}{3} \pi r_e^2 = 0.665 \text{ барн}).$$

Подставляя (4), (4') и (5) в (3), представим сечение К-ионизации в случае осевого каналирования отрицательных частиц в виде

$$G_{R-}^{ch} = \frac{G_0}{\pi} \left\{ \frac{3}{INR_K^3} \int_{\rho_1}^{\rho_K} W(\rho) K_1(\alpha_2 \rho) \rho d\rho + \frac{0,4234 I}{Nd \lambda_e^2 \gamma^2} \times \right. \\ \left. \times \left[ \int_{\rho_K}^{\rho_2} W(\rho) K_1^2(\alpha_4 \rho) d\rho + 2 \int_{\rho_1}^{\rho_2} d\rho W(\rho) \int_0^{2\pi} d\varphi \sum_{\substack{i \geq 0 \\ j \geq 1}} K_1^2(\alpha_4 \rho_{ij}) \right] \right\}, \quad (6)$$

где

$$\rho_{1,2,K} = R_{1,2,K}/d, \quad \alpha_2 = 2d/R_K, \quad \alpha_4 = Id/\lambda_e \gamma,$$

$$\rho_{ij}^2 = (\rho \cos \varphi - i\alpha_1/d)^2 + (\rho \sin \varphi - j\alpha_2/d)^2; \quad (\vec{a}_1 \perp \vec{a}_2).$$

Входящая в формулу (6) функция распределения  $W(\rho)$  при осевом каналировании отрицательных частиц согласно [14] вычисляется по формуле

$$W(\rho) = \frac{\rho}{\pi \tau S_3} \iint d\rho_0 d\varphi_0 \frac{(\rho_0 - 2\tau)^{3/2}}{\sqrt{\rho_0^2 \chi_0^2 - \rho(2\tau + \rho)\rho_0 + 2\tau\rho^2}}, \quad (7)$$

где

$$\chi_0 = \sin \varphi_0, \quad \tau = \bar{Z} e^2 / Ed \Theta_0^2 = \Theta_A^2 / 4 \Theta_0^2, \quad (7')$$

$$\Theta_A^2 = 4 \bar{Z} e^2 / Ed,$$

$\rho_0, \varphi_0$  - переменные, по которым в (7) проводится интегрирование в области захвата  $S_3$ , представляют собой радиус-вектор и азимутальный угол на поперечной плоскости при влете частицы в кристалл. Потенциал цепочки принят в виде

$$V(\rho) = -\bar{Z} e^2 / \rho + V_0. \quad (8)$$

Площадь захвата в случае осевого каналирования отрицательных

частиц с потенциалом (8) вычисляется по формулам:

$$S_3 = \pi (\tau_3^2 - \tau_1^2) - 4(J_1 + J_2), \quad (9)$$

где

$$J_1 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} a \tau \sin \left\{ (\rho_1 / \rho_0^3) (2\tau \rho_0 + \rho_1 \rho_0 - 2\tau \rho_1) \right\}^{1/2}$$

$$J_2 = \int_{\tau_2}^{\tau_3} a \tau \sin \left\{ (\rho_2 / \rho_0^3) (2\tau \rho_0 + \rho_2 \rho_0 - 2\tau \rho_2) \right\}^{1/2} \rho_0 d\rho_0;$$

$$\tau_2 = 2\tau (\rho_1 + \rho_2) / (2\tau + \rho_1 + \rho_2),$$

а  $\tau_1$  и  $\tau_3$  в зависимости от  $\theta_0^2 = \theta_{\lambda}^2 / 4\tau$  в пределах критических углов каналирования  $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$  определяются так

$$\tau_1 = \rho_1, \quad \tau_3 = \rho_2, \quad \text{если } \tau_1 \leq \tau \leq \rho_1$$

$$\tau_1 = \rho_1, \quad \tau_3 = \rho_2, \quad \text{если } \rho_1 < \tau < \rho_2$$

$$\tau_1 = \rho_1, \quad \tau_3 = \rho_2, \quad \text{если } \rho_2 \leq \tau \leq \tau_2,$$

при этом величины  $\tau_{1,2}$  и  $\rho_{1,2}$  определяются формулами

$$\tau_{1,2} = \frac{\rho_{1,2}}{2\rho_{2,1}} (\rho_1 + \rho_2), \quad \rho_{1,2} = \frac{\rho_{1,2}}{2} (\sqrt{1 + 8\tau/\rho_{1,2}} - 1).$$

Напомним, что доля захвата  $D$  определяется как  $D = S_3/S_0$ ,

$S_0$  - площадь, приходящаяся на одну цепочку на поперечной плоскости.

Согласно [5, 7], в том же приближении, в котором получена формула (5), сечение  $K$ -ионизации неканализованными частицами будет:

$$\sigma^{nch} = \sigma_0 \left\{ \frac{1.5}{I} + \frac{0.423}{I} \left[ \ln \left( \frac{1.274}{I} \gamma^2 \right) - 1 \right] \right\}. \quad (10)$$

Здесь также первый и второй члены соответствуют вкладу близких и далеких столкновений, соответственно.

исно, что полное сечение К-ионизации для пучка частиц с учетом доли каналирования  $D$  будет

$$R \sigma_{R^-} = (1-D) \sigma^{nch} + D \sigma_{R^-}^{ch} \quad (II)$$

Из выражений (6) и (10) следует, что сечения К-ионизации явно не зависят от массы и энергии частицы, а зависят от  $\chi$ . Однако, если (10) зависит только от  $\chi$ , то зависимость от энергии входит в (6) через  $\omega(\rho)$  или  $\tau$ . Это означает, что частицы с различными массами, но с одним и тем же значением  $\chi$  будут иметь одинаковые сечения, если для них значения  $\tau$  или  $\theta_0/\theta_\lambda$  совпадают.

На рис. I показаны зависимости сечения К-ионизации от энергии электрона  $E_e$  (или  $\chi$ ) для кристалла германия Ge. Кривая I, вычисленная по формуле (10), представляет собой сечение для неканализованных частиц или же соответствует прохождению через аморфные среды. С увеличением энергии частиц  $\sigma^{nch}$  растет логарифмически, что обусловлено релятивистским увеличением поперечных размеров поля проходящей частицы. В отличие от ионизационных потерь, логарифмический рост для  $\sigma^{nch}$ , как видно из рис. I (кривая I), не прекращается даже при очень больших значениях  $\chi$  из-за отсутствия эффекта плотности для К-ионизации. Этот факт обусловлен тем, что в настоящей работе, как и в [5], не учитывается влияние поляризации среды. Как показывают экспериментальные результаты [8] это оправдано до энергий  $E_e = 900$  Мэв. Отсутствие эффекта плотности при таких энергиях качественно можно объяснить тем, что, в отличие от ионизационных потерь, при К-ионизации из спектра псевдофотонов дают вклад фотоны с большими ( $> 1$ ) энергиями, для которых диэлектрическая постоянная близка к единице.

Кривая 2 на рис. I, вычисленная по формулам (6), (II) и (IO), показывает энергетическую зависимость  $\epsilon_{R-}$  для кристалла Ge (ось [100]) при фиксированном угле  $\theta_0$ . В качестве  $R_1$  и  $R_2$  взяты значения  $R_k/4$  и  $\alpha_1/2$ , соответственно. Как видно из рисунка,  $\epsilon_{R-}$  в довольно широком интервале значений  $\gamma$  идет почти параллельно  $\epsilon^{nch}$ , превысив его в  $\sim 1,25$  раза. Кривые 1 и 2 сливаются при очень малых и больших значениях  $\gamma$ . Последнее обстоятельство можно понять следующим образом: поскольку кривая 2 вычислена для определенного значения  $\theta_0$ , то, как следует из (7'), при очень больших (малых)  $E$  значение  $\tau$  сильно уменьшается (увеличивается). Соответственно, как показано в [14], доля аксиально каналированных частиц и, следовательно, их вклад в K-ионизацию должны уменьшаться при малых и больших  $\gamma$ : кривая для  $\epsilon_{R-}$  должна совпадать с кривой  $\epsilon^{nch}$ .

На рис. 2 показана угловая зависимость  $\epsilon_{R-}$  (кривые 2, 2', 2'' для Ge, ось [100]) для электронов с энергиями 50, 500 и 5000 Мэв. Как видно из рисунка, в соответствии с вышесказанным, при очень малых и больших значениях  $\theta_0$  кривые 2, 2' и 2'' сливаются с кривыми I, I' и I'' для  $\epsilon^{nch}$ , вычисленными для аморфной среды и имеющими, конечно, изотропное угловое распределение.

### 3. K-ионизация при плоскостном каналировании отрицательных частиц

Известно, что если пучок отрицательных частиц падает на кристалл под углом  $\theta_0 \approx \theta_{\text{lim}}$  относительно кристаллических плоскостей, то определенная доля  $D$  частиц захватывается в

режим плоскостного каналирования и совершает периодическое движение около плоскостей. Выражения для функции распределения каналированных частиц в поперечной плоскости  $xy$  по направлению  $x$  (плоскость  $x=0$  совпадает с плоскостью кристалла)  $W(x)$ , а также  $D$ , в случае потенциала [15]

$$V(x) = - \frac{V_0}{ch^2(x/b)} \quad (12)$$

приведены в приложении II. Отметим лишь, что потенциал типа (12) лучше аппроксимирует реальный потенциал плоскости кристалла, вычисленный по модели Мольера для потенциала атома (см. [16]), чем параболический потенциал.

Пусть направление оси  $z$  совпадает с направлением цепочки на кристаллической плоскости. Тогда в общем случае плоскостного каналирования проекция скорости частицы на кристаллическую плоскость может составлять любой, в том числе большой, угол  $\alpha_0$  с осью  $z$ , и вычисление прицельных параметров атомов кристалла затруднено. Физические результаты, получаемые в различных моделях с усредненным потенциалом, например, в модели Линдхарда, не зависят от значения  $\alpha_0$ . Поэтому для решения рассматриваемой задачи мы примем модель, в которой  $\alpha_0 = 0$  и атомы равномерно распределены в кристаллических плоскостях "квадратной сеткой" со стороной  $d_{eff} = 1/\sqrt{Ndp}$ , где  $Ndp$  — плотность атомов на плоскости кристалла, а  $dp$  — межплоскостное расстояние. Тогда сечение  $K$ -ионизации для частицы с  $\rho(x, y)$  будет выражаться той же формулой (2) с заменой  $d \rightarrow d_{eff}$ .

Прицельный параметр частицы относительно атомов кристалла будет

$$\rho_{ii}^2 = (x - i dp)^2 + (y - j d_{eff})^2, \quad (13)$$

где  $i, j$  — целые числа, определяющие номер плоскости и "цепочки", соответственно.

Усредняя выражение (2) по  $x$  с функцией распределения  $W(x)$  (см. Приложение II) в интервале  $-d_p/2 \leq x \leq d_p/2$  и по  $y$  в интервале  $-d_{eff}/2 \leq y \leq d_{eff}/2$  с равномерным распределением и используя (4) и (4') аналогично предыдущему параграфу для канализированных частиц получим:

$$\begin{aligned} \epsilon_p^{ch} = & \frac{\epsilon_0}{\pi} \left\{ \frac{3 d_p^2 d_{eff}}{I R_K^3} \int_0^{z_K} dx W(x) \int_0^{y_1} dy \rho_{00} K_1(\alpha_2 \rho_{00}) + \right. \\ & + \frac{0,8469 I d_p d_{eff}}{z^2 \alpha^2 \gamma^2 R_K^2} \left[ \int_0^{z_K} dx W(x) \int_{y_1}^1 dy K_1^2(\alpha_4 \rho_{00}) + \right. \\ & \left. \left. + \int_{z_K}^1 dx W(x) \int_0^1 dy K_1^2(\alpha_4 \rho_{00}) + \int_{-1}^1 dx W(x) \int_{-1}^1 dy \sum_{\substack{i \geq 1 \\ j \geq 0}} K_1^2(\alpha_4 \rho_{ij}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (I4)$$

$$\text{где } z_K = 2R_K/d_p, \quad y_1 = (d_p/d_{eff}) \sqrt{z_K^2 - x^2},$$

$$\alpha_2 = d_p/R_K, \quad \alpha_4 = d_p I / 2 \lambda e \gamma,$$

$$\rho_{ij}^2 = (x - z_i)^2 + (d_{eff}/d_p)^2 (y - z_j)^2. \quad (I5)$$

В (I4) первый член в фигурных скобках соответствует "близким" столкновениям, а остальные — "далеким". Видно, что  $\epsilon_p^{ch}$  — также, как и  $\epsilon_{0-}^{ch}$ , явно не зависит от энергии или массы частицы

в отдельности, а зависит от  $\chi$ . Полное же сечение  $\sigma_p$  будет определяться формулой (II), где  $\sigma^{rch}$  опять дается формулой (IO), а  $\sigma_p^{ch}$  — (I4).

Кривая 3 на рис. I показывает энергетическую зависимость  $\sigma_p$  для  $G_e$  (плоскости (100)) при  $\theta_0 = 0$ . Как следует из работы [14], при  $\theta_0 = 0$  доля отрицательных каналированных частиц независима от энергии  $\approx 100\%$ . Поэтому кривая 3 в отличие от случая аксиального каналирования (кривая 2 на рис. I) всегда параллельна кривой, соответствующей аморфной среде. Различие кривых 3 и I, как выше отмечено, обусловлено перераспределением каналированных частиц в поперечных направлениях.

На рис. 3 показана зависимость сечений K-ионизации от  $\theta_0$ . Кривые I, I', I'', вычисленные с помощью формулы (IO) при энергиях электронов  $E_e = 50, 500, 5000$  Мэв, соответственно, представляют сечения в случае аморфной среды и не зависят от  $\theta_0$ . Из рисунка видно, что кривые 2, 2', 2'', вычисленные для тех же  $E_e$  с помощью формул (IO), (II), (I4), с увеличением  $\theta_0$  приближаются к соответствующим кривым I, I', I'' и сливаются с ними. Это связано с тем, что с увеличением  $\theta_0$  доля каналированных частиц падает [14], а потом, когда  $\theta_0$  становится большим некоторого критического значения  $\theta_0^{kp}$ , распределение всех частиц в кристалле становится таким же, как в аморфной среде.

#### 4. K-ионизация при плоскостном каналировании положительных частиц

При плоскостном каналировании положительных частиц, отклоняясь от кристаллических плоскостей, частицы совершают периодическое движение между соседними плоскостями. В рамках модели,

принятой в предыдущем параграфе, направляя оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  как раньше, с той лишь разницей, что теперь плоскость  $x = 0$  находится в середине между двумя плоскостями, для прицельных параметров относительно атомов кристалла напишем:

$$\rho_{ij}^2 = \left(x - \frac{2i+1}{2} d_p\right)^2 + \left(y - \frac{2j+1}{2} d_{eff}\right)^2, \quad (I6)$$

Для сечения опять имеет место выражение (2), усредняя которое по  $x$  с помощью  $W(x)$  в интервале  $[-d_p/2, d_p/2]$ , а по  $y$  с равномерным распределением в интервале  $[-d_{eff}/2, d_{eff}/2]$  и используя (4) и (4'), после преобразований получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{p+}^{ch} = & \frac{60}{\pi} \left\{ \frac{3d_p^2 d_{eff}}{I R_k^3} \int_{-z_k}^1 dx W(x) \int_{y_2}^1 dy \rho_{00} K_1(\alpha_2 \rho_{00}) + \right. \\ & + \frac{0,8469 I d_p d_{eff}}{z^2 \alpha^2 \gamma^2 R_k^2} \left[ \int_{-z_k}^1 dx W(x) \int_{-1}^{y_2} dy K_1^2(\alpha_4 \rho_{00}) + \right. \\ & + \left. \int_{-1}^{-z_k} dx W(x) \int_{-1}^1 dy K_1^2(\alpha_4 \rho_{00}) + \int_{-1}^1 dx W(x) \int_{-1}^1 dy \left( \sum_{j \geq 1} K_1^2(\alpha_4 \rho_{0j}) + \sum_{\substack{j \geq 1 \\ j \geq 0}} K_1^2(\alpha_4 \rho_{ij}) \right) \right] \left. \right\} \quad (I7) \end{aligned}$$

Здесь

$$y_2 = 1 - \frac{d_p}{d_{eff}} \sqrt{z_k^2 - (x-1)^2},$$

$$\rho_{ij}^2 = (2i+1-x)^2 - \frac{d_{eff}^2}{d_p^2} (2j+1-y)^2. \quad (I8)$$

Функция распределения  $\omega(x)$  в (17) согласно [14] для параболического потенциала  $V(x) = A_0 x^2$ , который обеспечивает удовлетворительную точность, имеет вид:

$$\omega(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-\lambda^2}} \ln \frac{\sqrt{1-\lambda^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{|x^2-\lambda^2|}}, \quad (19)$$

где

$$\lambda^2 = \frac{2E\theta_0^2}{A_0 d_p^2} = \frac{\theta_0^2}{\theta_\lambda^2}, \quad \theta_\lambda^2 = \frac{A d_p^2}{2E} \quad (20)$$

а доля каналированных частиц определяется формулой:

$$D = \sqrt{1-\lambda^2} \quad (21)$$

Как и в предыдущем случае сечение  $\sigma_{p+}$  для пучка частиц определяется формулой (II) с тем же выражением (10) для  $\sigma^{nch}$ .

Кривая 4 на рис. I показывает энергетическую зависимость  $\sigma_{p+}$  для Ge (плоскость (100)) при  $\theta_0 = 0$ . Тот факт, что  $\sigma_{p+} < \sigma^{nch}$ , обусловлен тем, что распределение положительных каналированных частиц максимально при  $x \sim 0$  и, следовательно, подавлен вклад прицельных параметров  $\rho \sim R_k$ , который является основным в сечении. Кривые 3, 3', 3'' на рис. 3, вычисленные с помощью (17) при энергиях позитронов  $E_{e^+} = 50, 500, 5000$  Мэв, показывают ориентационную зависимость  $\sigma_{p+}$ . Кривые 3, 3', 3'' сливаются с кривыми I, I', I'', вычисленными для аморфной среды, при больших значениях углов  $\theta_0$ , чем кривые 2, 2', 2'', соответствующие плоскостному каналированию электронов при тех же энергиях. Это связано с тем фактом, что зависимость доли каналированных частиц от  $\theta_0$  для положительных частиц

простирается дальше, чем для отрицательных частиц или же значение критического угла каналирования для позитронов больше, чем для электронов [14]. Последнее обстоятельство, конечно, обусловлено относительной узостью потенциала для отрицательных частиц.

## 5. Обсуждение результатов

Использованный в настоящей работе полуклассический метод вычисления сечения  $K$ -ионизации, при котором вклад "близких" столкновений вычисляется с помощью квантово-электродинамических сечений рассеяния, а вклад "далеких" столкновений — посредством известных сечений фотоэффекта и спектра псевдофотонов [4-7], конечно, нуждается в уточнении. Однако этот метод не только дает возможность просто вычислить сечения, но и, как показывают экспериментальные данные [8,9] для аморфных сред, обеспечивает достаточную точность и нет сомнения, что он может быть применен также в случае кристаллических сред. Применимость классических расчетов [14] для вычисления распределений  $W(\rho)$ ,  $W(x)$ , по которым производится усреднение, а также для  $D$ , при высоких энергиях доказана [11]. В отличие от [14] в настоящей работе в случае плоскостного каналирования отрицательных частиц использован более точный потенциал (12) вместо параболического. Кроме того, исходя из требований задачи, в качестве минимального радиуса вместо  $R_1 = \sqrt{2\bar{u}^2}$  ( $\bar{u}^2$  — среднеквадратичное тепловое отклонение атомов) взято значение  $R_1 = R_K/4$ . Очевидно, что дальнейшее уменьшение  $R_1$  мало изменит результат. Принятая нами модель в случае плоскостного каналирования согласно которой атомы равномерно распределены в плоскостях с

заданной плотностью, является хорошим приближением и облегчает вычисления.

Легко убедиться, что пренебрежение другими типами потерь (ионизационные, радиационные энергетические потери, многократное рассеяние, деканалирование) проходящих частиц в настоящей работе оправдано, если учесть экспериментальные условия. В самом деле, для измерения сечения  $K$ -ионизации можно использовать только такие кристаллические или аморфные мишени, для которых все вышеуказанные потери будут малы, а длина деканалирования уже при умеренных энергиях будет больше толщины мишени. Это обусловлено тем, что при измерении сечения  $K$ -ионизации необходимо регистрировать характеристическое рентгеновское излучение (см. напр. [8]), следовательно, размеры мишени должны быть небольшие, чтобы образованное излучение не поглотилось в самой мишени. Более конкретно, эти размеры должны быть порядка  $1/\mu$ , где  $\mu$  - коэффициент поглощения характеристического излучения (для  $Ge$ , например,  $1/\mu \sim 8 \cdot 10^{-3}$  см). Отметим, что учитывая коэффициент флуоресценции и трудность регистрации фотонов с энергиями  $h\nu < I$  кэв, мишени должны иметь средние или большие порядковые номера  $Z$ .

Приведенные выражения для сечений невозможно аналитически интегрировать до конца и для получения окончательных результатов необходимо провести численные расчеты. Ряд обстоятельств был использован нами для облегчения задачи численных вычислений. Это, во-первых, свойство модифицированных функций Бесселя  $K_\nu(x)$ , значения которых довольно сильно падают при значениях аргумента, превышающих  $x > 3$ . Во-вторых, как это видно из выражений для прицельных параметров при больших значениях

$i, j$ , можно пренебречь  $\rho$  или  $x$  и  $y$ . Следовательно, функции  $K_1(x)$  при таких значениях  $i$  и  $j$  не зависят от  $\rho$  или  $x$  и  $y$  и их можно вывести из-под интегралов.

Проведенные нами численные расчеты показали, что вклад близких к траектории частиц атомов с  $i$  и  $j$  до  $\sim 10$  довольно ощутим. Ионизируются атомы, находящиеся даже на расстояниях  $> 100$  кристаллических постоянных, однако, их вклад в сечение становится меньшим с увеличением  $i, j$  и уменьшением энергии. Это означает, что влияние поляризации среды в случае  $K$ -ионизации не так сильно, как в случае ионизационных потерь. Хотя этот вопрос уже обсужден нами, тем не менее ясно, что при очень больших значениях  $\gamma$  необходимо как-то учесть и этот эффект.

Не будем подробнее обсуждать результаты численных расчетов, показанные на рис. 1-3. Однако, отметим, что если в работе [14] было показано, что функция распределения  $W(x)$  и доля каналирования  $D$  не зависят явно от энергии частиц, а зависят от отношения  $\theta_0/\theta_\lambda$ , то важным результатом настоящей работы является то, что сечения  $K$ -ионизации не зависят в отдельности от энергии и массы частицы, а зависят от  $\gamma$ . Наконец, следует также отметить, что полученные значения сечения довольно велики, так что все предсказанные свойства легко экспериментально проверить, даже без учета эффекта когерентности излучения [17], а расчеты можно провести с учетом экспериментальных условий, как например, учет углового разброса и т.д.

В заключение выражаем благодарность Ф.Ф.Комарову, любезно предоставившему нам работу [7] до опубликования, Н.З.Акопову и В.С.Погосову за помощь в численных расчетах.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ I

Здесь мы покажем, что при релятивистских энергиях  $\gamma \gg 1$  с хорошей точностью сечения упругого рассеяния всех точечных частиц на электроне, интегрированные по передаваемым электрону энергиям  $E_e'$  от  $I$  до максимально возможного значения, равны друг другу и могут быть представлены в виде (5). Для всех веществ величина  $I$  (энергия ионизации в единицах  $m_e c^2$ ) меньше единицы (для  $G_e$ , например,  $I = 2,2 \cdot 10^{-2}$ ) и при  $\gamma \gg 1$  можно пренебрегать в сечениях членами порядка  $(I/(\gamma+1))^2$  и  $I/\gamma$ .

Начнем с электрон-электронного рассеяния. Проинтегрировав дифференциальное сечение [18-20] по  $E_e'$  от  $I$  до  $(t_e - m_e c^2)/2$  и пренебрегая членами порядка  $(I/(\gamma+1))^2$  получим [5]:

$$\sigma_{ee} = \frac{2\pi r_e^2}{\beta^2 I} \left\{ 1 - \frac{I}{\gamma-1} \left[ 1 - \frac{(\gamma-1)^2}{2\gamma^2} + \frac{2\gamma-1}{\gamma^2} \ln \frac{\gamma-1}{I} \right] \right\}. \quad (I.1)$$

При  $\gamma \gg 1$  (I.1) преобразуется к следующему виду:

$$\sigma_{ee} = \frac{2\pi r_e^2}{I} \left\{ 1 - \frac{I}{\gamma} \left[ \frac{1}{2} + \frac{2}{\gamma} \ln \frac{\gamma}{I} \right] \right\}, \quad (I.2)$$

из которого, пренебрегая членами порядка  $I/\gamma$  и учитывая, что на K-оболочке имеются два электрона, получим (5).

Рассеяние позитронов на электроне. Проинтегрировав дифференциальное сечение [21,19,20] по  $E_e'$  от  $I$  до  $E_e + s$  точ-

ностью до членов порядка  $(I/(\gamma \pm 1))^2$  получим:

$$\sigma_{e+e} = \frac{2\pi r_e^2}{\beta^2 I} \left\{ 1 - \frac{I}{\gamma} + \frac{I}{\gamma+1} \left[ \frac{3\gamma^2 + 6\gamma + 4}{\gamma^2} \frac{\gamma-1}{\gamma+1} - \frac{(\gamma-1)^2}{\gamma(\gamma+1)} + \frac{(\gamma-1)^3}{3\gamma^2(\gamma+1)} - \frac{2\gamma^2 + 4\gamma + 1}{\gamma^2} \ln \frac{\gamma-1}{I} \right] \right\}, \quad (I.3)$$

которое при  $\gamma \gg 1$  можно представить в виде:

$$\sigma_{e+e} = \frac{2\pi r_e^2}{I} \left\{ 1 + \frac{I}{\gamma} \left[ \frac{4}{3} - 2 \ln \frac{\gamma}{I} \right] \right\}. \quad (I.4)$$

Пренебрегая в (I.4) членами порядка  $I/\gamma$  получим опять выражение (5).

Рассеяние тяжелой частицы  $M \gg m_e$  со спином  $1/2$  ( $\mu$ -мезон, протон): в этом случае дифференциальное сечение [22, 19, 20] интегрируется в интервале от  $I$  до  $E'_{\text{max}} = \frac{2m_e(E^2 - M^2c^4)}{2m_e E + M^2c^2}$ . С точностью до членов порядка  $(I/(\gamma+1))^2$  получим:

$$\sigma_{M(\frac{1}{2})e} = \frac{2\pi r_e^2}{\beta^2 I} \left\{ \beta^2 + \frac{I}{2\gamma^2} \left[ -1 - 2 \frac{m_e}{M} \gamma + 2 \frac{m_e^2}{M^2} \frac{\beta^4 \gamma^2}{1 + 2 \frac{m_e}{M} \gamma} - \beta \left( 1 + \frac{m_e}{M} \gamma \right) \ln \frac{2\beta^2 \gamma^2 / I}{1 + 2 \frac{m_e}{M} \gamma} \right] \right\} \quad (I.5)$$

Из (I.5) при больших  $\gamma \gg 1$  получим следующие выражения:

$$\sigma_{M(\frac{1}{2})e} = \frac{2\pi r_e^2}{I} \cdot \begin{cases} \left[ 1 - \frac{I}{2\gamma^2} \left( 1 + \ln \frac{2\gamma^2}{I} \right) \right] & 1 \ll \gamma \leq \frac{M}{2m_e} \\ \left[ 1 + \frac{I}{2\gamma^2} \left( -\frac{7}{4} - 2 \ln \frac{\gamma^2}{I} \right) \right] & 1 \ll \frac{M}{2m_e} = \gamma \\ \left[ 1 - \frac{Im_e}{2\gamma M} \left( 1 + 2 \ln \frac{M\gamma}{Im_e} \right) \right] & 1 \ll \frac{M}{2m_e} \ll \gamma \end{cases} \quad (I.6)$$

Опять же из (1.6), пренебрегая членами порядка  $1/\gamma$ , получим выражение (5). Аналогично можно показать, что в том же приближении получится формула (5) и в случае рассеяния тяжелых частиц со спином 0 (например,  $\pi$ -мезон) или со спином 1.

Следовательно, независимо от массы и спина частиц сечение К-ионизации в аморфных средах выражается формулой (10) и зависит только от  $\chi$ -фактора частицы. Этот результат кажется несколько парадоксальным, поскольку, как хорошо известно [20], ионизационные потери легких и тяжелых частиц с одинаковыми  $\chi$  отличаются значительно друг от друга. Дело в том, что хотя и дифференциальные сечения разных частиц сильно отличаются друг от друга при больших передаваемых электрону энергиях  $E'_e$ , но вклад в интеграл таких переданных энергий мал ( $d\sigma(E'_e) \sim dE'_e/E_e^2$ ), так что интегрированные сечения, как выше показано, с хорошей точностью не отличаются. Вклад же больших передаваемых энергий в ионизационные потери относительно велик, так как при таких событиях первичная частица теряет относительно больше энергии, хотя число событий с большими  $E'_e$  мало.

## ПРИЛОЖЕНИЕ II

Рассмотрим движение отрицательной частицы в поле атомной плоскости кристалла, потенциал которой имеет вид (13). Пусть ось  $X$  перпендикулярна к плоскости, а ось  $Z$  лежит в плоскости. Частица влетает в кристалл в точке с координатами  $x = x_0$ ,  $z = 0$  и под углом  $\theta_0$  относительно плоскости. В релятивистском случае из уравнения Гамильтона-Якоби, оставляя члены, линейные по потенциалу, получим следующее уравнение

для координаты  $x$  :

$$-t + \sqrt{\frac{E}{2c^2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E_1(x_0) + V_0/ch^2(x/\beta)}} = \beta_t, \quad (\text{II.1})$$

решение которого имеет вид

$$\text{sh } \alpha = \sqrt{\frac{V_0}{K^2} - 1} \sin \left\{ (t + \beta_t) \frac{ck}{\beta} \sqrt{\frac{2}{E}} \right\}, \quad (\text{II.2})$$

где

$$\alpha = x/\beta, \quad \alpha_0 = x_0/\beta, \quad E_1(x_0) = -K^2$$

$$K^2 = V_0 \left( \frac{1}{ch \alpha_0} - \lambda \right), \quad \lambda = \frac{E \Theta_0^2}{2V_0} = \frac{\Theta_0^2}{\Theta_\lambda^2}; \quad \Theta_\lambda = \sqrt{\frac{2V_0}{E}}.$$

Решение (II.2) представляет собой периодическое движение с амплитудой:

$$\alpha_{\max} = \ln \left( \sqrt{\frac{V_0}{K^2} - 1} + \frac{\sqrt{V_0}}{K} \right). \quad (\text{II.3})$$

Из (II.2) для вероятности нахождения частицы в интервале  $x, x+dx$  ( $dW \sim dx/x$ ) получим следующее нормированное на единицу выражение:

$$W(x) = \frac{dW}{dx} = \frac{K}{\pi \beta} \frac{ch \alpha}{\sqrt{V_0 - K^2 ch^2 \alpha}} \quad (\text{II.4})$$

Рассмотрим теперь параллельный пучок частиц, падающих на кристалл под углом  $\Theta_0$  к плоскости. В случае плоскостного каналирования отрицательных частиц будем считать частицу ка-

налированной, если  $X_{\max} \leq d\rho/2$  или же  $\alpha_{\max} \leq \alpha_2 = d\rho/2b$ ,  
 что при заданном  $\theta_0$  приводит к условию:

$$-\alpha_{02} \leq \alpha_0 \leq \alpha_{02}, \quad (\text{II.5})$$

где

$$\alpha_{02} = \ln \frac{\text{ch} \alpha_2 (1 + \sqrt{1 - \lambda \text{ch}^2 \alpha_2})}{\sqrt{1 + \lambda \text{ch}^2 \alpha_2}} \quad (\text{II.6})$$

Тогда для пучка частиц доля каналирования определяется выра-  
 жением

$$D = \frac{2 \alpha_{02}}{d\rho} = \frac{2b}{d\rho} \alpha_{02} \quad (\text{II.7})$$

Чтобы найти нормированную функцию распределения частиц  
 пучка в зависимости от  $x$  необходимо интегрировать (II.4) по  
 $\alpha_0$  в области захвата (II.5) и результат делить на величину  
 области интегрирования  $2\alpha_{02}$ . В результате получим:

при  $\text{ch}^2 \alpha \leq \frac{1}{1-\lambda} < \text{ch}^2 \alpha_2$ ;

$$W(x) = \frac{1}{\pi \alpha_{02}} \frac{\text{ch} \alpha}{1 + \lambda \text{ch}^2 \alpha} \left\{ F(\varphi_1, \kappa_1) - \right. \\ \left. - \lambda(1-\lambda) \left( \frac{1}{1-\lambda} + \text{ch}^2 \alpha \right) \Pi(\varphi_1, \alpha_1^2, \kappa_1) \right\}, \quad (\text{II.8})$$

где

$$\kappa_1^2 = (1-\lambda) \text{ch}^2 \alpha, \\ \varphi_1 = \arcsin \sqrt{\frac{\text{ch}^2 \alpha_2 - \frac{1}{1-\lambda}}{\text{ch}^2 \alpha_2 - \text{ch}^2 \alpha}}, \\ \alpha_1^2 = (1-\lambda)(1 + \lambda \text{ch}^2 \alpha). \quad (\text{II.8})$$

при  $\frac{1}{1-\lambda} < ch^2 \alpha e \leq ch^2 \alpha e_2$ ;

$$W(x) = \frac{1}{\pi \alpha e_0} \sqrt{1-\lambda} \left\{ F(\varphi_2, K_2) - \lambda \frac{ch^2 \alpha e - \frac{1}{1-\lambda}}{1 + \lambda ch^2 \alpha e} \Pi(\varphi_2, \alpha_2^2, K_2) \right\}, \quad (II.9)$$

где

$$K_2^2 = 1/(1-\lambda) ch^2 \alpha e,$$

$$\varphi_2 = \alpha e \sin \sqrt{\frac{ch^2 \alpha e_2 - ch^2 \alpha e}{ch^2 \alpha e_2 - \frac{1}{1-\lambda}}}, \quad (II.9')$$

$$\alpha_2^2 = 1/(1-\lambda)(1 + \lambda ch^2 \alpha e).$$

В выражениях (II.8) и (II.9)  $F(\varphi, K)$  и  $\Pi(\varphi, \alpha^2, K)$  — эллиптические интегралы I-го и 3-го родов, соответственно [23].

Полученные в случае потенциала (I2) выражения для  $\Pi$  и  $W(x)$  качественно согласуются с соответствующими выражениями, полученными в [14] для параболического потенциала.

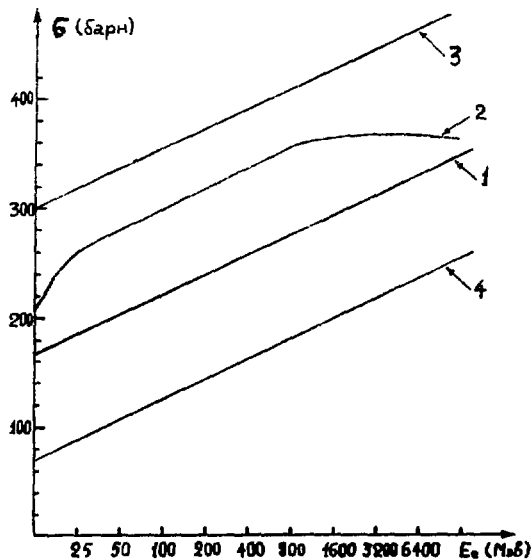


Рис. I

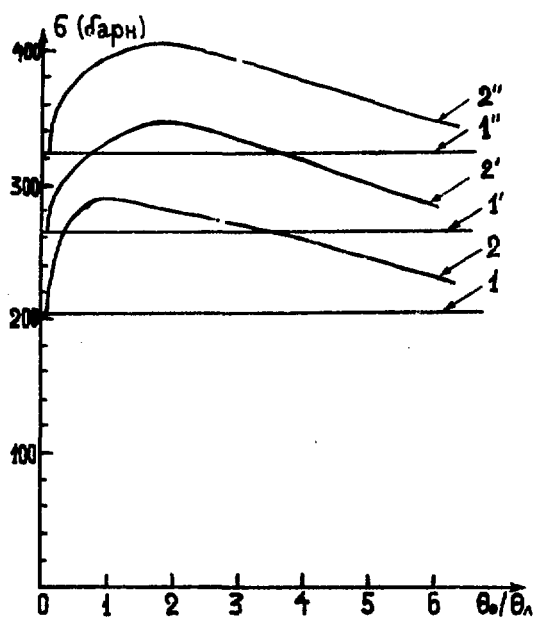


Рис.2

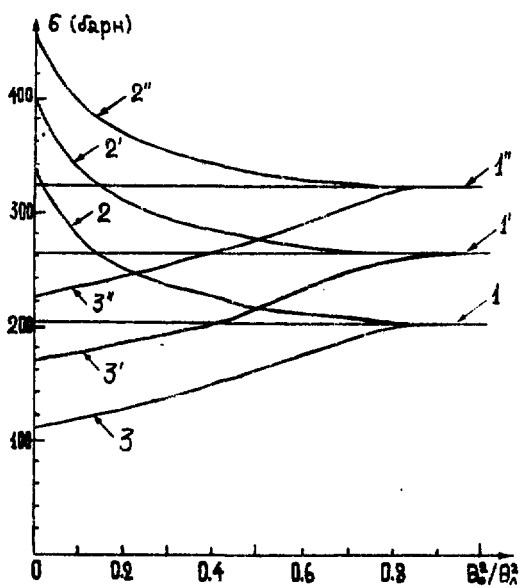


Рис.3

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ

Рис.1 Зависимость сечений  $K$ -ионизации от энергий для кристалла  $Ge$ ,  $\theta_0 = \text{const}$ . Кривая 1 соответствует  $\epsilon^{пч}$  аморфная среда, кривая 2 -  $\epsilon_{R-}$ , ось  $[100]$ ,  $\theta_0 \neq 0$ , кривые 3 и 4 -  $\epsilon_p$  и  $\epsilon_{p+}$ , плоскость  $(100)$ ,  $\theta_0 = 0$ .

Рис.2 Зависимость сечений от  $\theta_0/\theta_\lambda$  для кристалла  $Ge$  для случая осевого каналирования отрицательных частиц, ось  $[100]$ . Кривые 1, 1', 1'' -  $\epsilon^{пч}$ -аморфная среда, кривые 2, 2', 2'' -  $\epsilon_R$  - для энергий электронов  $E=50, 500, 5000$  Мэв, соответственно.

Рис.3 Зависимость сечений от  $\theta_0^2/\theta_\lambda^2$  для кристалла  $Ge$  для случая плоскостного каналирования отрицательных и положительных частиц, плоскость  $(100)$ . Кривые 1, 1', 1'' -  $\epsilon^{пч}$ -аморфная среда, кривые 2, 2', 2'' -  $\epsilon_R$ , кривые 3, 3', 3'' -  $\epsilon_{p+}$  для энергий частиц  $E=50, 500, 5000$  Мэв, соответственно.

## ЛИТЕРАТУРА

- I. E.Merzbacher, H.W.Lewis, Encyclopedia of Physics, V.34,Ed. by S.Flugge, Springer-Verlag, 1958
2. A.M.Arthurs, B.L.Moiseiwitch, Proc.Roy.Soc.,A247, 550,1958
3. H.S. Perlman, Proc.Phys.Soc., 76, 623, 1960.
4. К.А.Испирян. Кандидатская диссертация, Ереван,1965.
5. H.Kolbenstvedt, J.Appl.Phys., 38, 4785, 1967.
6. H.Kolbenstvedt, J.Appl.Phys.,46, 2771, 1975.
7. Ф.Ф.Комаров. "Тезисы докладов X Совещания по проблемам применения пучков заряженных частиц для изучения состава и свойства вещества" , Москва, Изд-во МГУ, 62,1979;  
Radiation Eff. (to be published).
8. L.M.Middleman, R.L.Ford, R.Hofstadter, Phys.Rev.,2A,1429, 1970.
9. D.H.H.Hoffmann et al. Phys.Lett., 65A, 30A, 1978.
10. R.Anholt et al., Phys.Rev., A14, 2103, 1976.
11. D.S.Gemmel, Rev.Mod.Phys., 46, 129, 1974.
12. Б.Д.Грачев и др. Письма в ЖЭТФ, 4, 24, 1966.
13. N.Kalashnikov,Atomic Collisions in Solids,Ed.Sh.Datz Plenum Press N-Y 1975
14. S.M.Darbinian, K.A.Ispirian, Phys.Stat.Sol(b) 96, 835, 1979; Препринт ЕФИ, 464(22)-79.
15. В.А.Базылев, В.И.Глебов, Н.К.Жеваго. ЖЭТФ,78,62,1980.
16. B.R.Appleton, C.Frginsoy, W.M.Gibson,Phys.Rdv.,161,330, 1967.

17. Д.Ф.Зарецкий, В.В.Ломоносов, Э.А.Нерсесов. ЯФ, 28, 414, 1978.
18. C.Moller, Ann.d Physik, 14, 531, 1932.
19. В.Б.Берестецкий, Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский. "Релятивистская квантовая теория". Москва, из-во Наука, I, 1968.
20. Б.Росси. "Частицы больших энергий", М., Мостехиздат, 1955.
21. Н.Ж.Вхавха, Proc.Roy.Soc.A154, 1 95, 1935.
22. Н.Ж. Вхавха, Proc.Roy.Soc. A164, 257, 1938.
23. P.F.Byrd, M.D.Friedman, Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists, Springer-Verlag, 1954.

Рукопись поступила 21-го апреля 1980 г.

Редактор Л.П.Мукаян

Тех.редактор А.С.Абрамян

Заказ 58

ВФ-04821

Тираж 299

Препринт ЕФИ

Формат издания 60 X 84/16

Подписано к печати 29/1 81г.

2,0 уч.изд.л. Ц14 к.

Издано Отделом научно-технической информации  
Ереванского физического института, Ереван-36, пер.Маркаряна 2



индекс 3624