ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЕФИ-511(54)-81

А.С.АМБАРЦУМЯН, ЯН ШИ

ЭФФЕКТИВНЫЕ УГЛЫ ИСПУСКАНИЯ РЕНТГЕНОВСКОГО ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В СЛУЧАЕ ТЕЛ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

ԵՐԵՎԱՆ 1981 ЕРЕВАН

ЕФИ-5II(54)-8I

УДК.538.56:539.I2

А.С.АМБАРЦУМЯН ,ЯН ШИ

ЭФФЕКТИВНЫЕ УГЛЫ ИСПУСКАНИЯ РЕНТГЕНОВСКОГО ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В СЛУЧАЕ ТЕЛ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

В рамках теории возмущений исследованы особенности частотно-углового распределения интенсивности рентгеновского переходного излучения (РПИ) для тел с цилиндрической симметрией, в зависимости от их поперечного и продольного размеров. Приведены выражения для частотно-углового спектра излучения. Рассмотрены особенности углового распределения интенсивности РПИ в различных случаях и определены величины углов, при которых интенсивность РПИ достигает максимума.

Ереванский физический институт

Ереван 1981

ЕФИ-5II(54)-8I

A.S.AMBARTSUMYAN, C.YANG

EFFECTIVE ANGLES OF X-RAY TRANSITION RADIATION IN THE CASE OF FINITE DIMENSIONAL BODIES

In the framework of perturbation theory the peculiarities of frequency-angular distribution of the X-ray transition radiation (XTR) intensity are investigated for bodies with cylindrical symmetry versus their transverse and longitudinal dimensions. The expressions for the radiation frequency-angular spectrum are presented. The peculiarities of angular distribution of the XTR intensity in different cases are considered, and the angles at which the XTR intensity reaches its maximum are determined.

Yerevan Physics Institute
Yerevan 1981

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЕФИ-511(54)-81

А С АМБАРЦУМЯН, ЯН ШИ

ЭФФЕКТИВНЫЕ УГЛЫ ИСПУСКАНИЯ РЕНТГЕНОВСКОГО ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В СЛУЧАЕ ТЕЛ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

Ереван 1981

© *Ереванский физический институт, 1981*

В работе [I] было исследовано рентгеновское переходное излучение РПИ, образуемое при взаимодействии ультрарелятивистских заряженных частиц с малыми телами произвольной формы. Однако подробно было проанализировано лишь излучение от тел со сферической симметрией.

В настоящей работе, в рамках теории возмущений, исследованы особенности частотно-углового распределения интенсивности РПИ для более общего случая тел с цилиндрической симметрией в зависимости от их поперечного a_1 и продольного a_2 размеров. Приведены выражения для частотного спектра излучения. Рассмотрены особенности углового распределения интенсивности РПИ в разных случаях и определены величины углов, при которых интенсивность РПИ достигает максимума.

Диэлектрическая проницаемость тела в интересующей нас области частот определяется формулой

$$\varepsilon(\vec{r}, \omega) = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} f(\vec{r})\, V_0 , \qquad (\mathrm{I})$$

где $f(\vec{r})$ – функция распределения электронной плотности в рассматриваемом теле, нормированная так, что интеграл по всему объему V тела

$$N = \int_V f(\vec{r})\, d\vec{r} \qquad (2)$$

дает общее число электронов N внутри тела, $V_0 = V/N$ – объем, приходящийся на один электрон, $\omega_0 = (4\pi e^2/mV_0)^{1/2}$ – плазменная частота вещества, ω – частота излучения.

Будем предполагать, что выполняется условие (см.формулу (3) работы [I])

$$\frac{\omega_0^2\, a_z}{\omega c} \ll 1. \qquad (3)$$

Тогда задача может быть решена методом теории возмущений в предположении, что рассеянное поле много меньше поля заряда.

Пусть функция распределения $f(\vec{r}) = f(\vec{\rho}, z)$ обладает цилиндрической симметрией относительно оси, параллельной направлению движения заряда (ось z).

Ограничимся рассмотрением случая, когда траектория частицы совпадает с осью симметрии рассматриваемого тела (так называемое центральное столкновение). Тогда для частотного спектра излучения имеем (см.формулу (I5) работы [I]):

$$W(\omega) = \int_0^{\pi/2} W(\omega,\vartheta)\, d\vartheta = \frac{\omega_0^4\, e^2}{2\pi\omega^4\gamma^2 c}\int_0^{\pi/2} |P|^2 \cos^2\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta \qquad (4)$$

$$P = \frac{\omega^2}{c^2}\int_0^{\infty} P\left(\rho, \frac{\omega}{c}\cos\vartheta\right) J_1\left(\frac{\omega\rho}{c}\sin\vartheta\right) K_1\left(\frac{\omega\rho}{v\gamma}\right)\rho\, d\rho \qquad (5)$$

$$P = \frac{\omega V_0}{v}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\,\frac{\omega v}{z}(1-\beta\cos\vartheta)\right] f(\vec{\rho}, z)\, dz \qquad (6)$$

Здесь v – скорость заряда, $\gamma = (1-\beta^2)^{1/2}$ – лоренц-фактор частицы, J_1 и K_1 – функции Бесселя и Макдональда первого порядка, ϑ – угол излучения, $\beta = v/c$.

Предположим, что как продольный, так и поперечный размеры тела много больше длины волны генерируемого излучения:

$$a_\perp \gg \frac{c}{\omega}, \qquad a_z \gg \frac{c}{\omega}. \tag{7}$$

В этом случае определяющую роль в частотно-угловом спектре излучения (4) играют малые углы ϑ из-за наличия функций $\mathcal{Y}_1\left(\frac{\omega\rho}{c}\sin\vartheta\right)$ в выражении (5) и функции $exp\left[i\frac{\omega a_z}{V}(1-\beta\cos\vartheta)\right]$ в выражении (6). В предположении равномерного распределения электронной плотности внутри тела $\left(f(\vec{z})= V_0^{-1}\right.$ при $-a_z \le z \le a_z$ и $\left.0 \le \rho \le a_\perp\right)$ после интегрирования по ρ и z в выражениях (5) и (6) имеем

$$D = \frac{P[x_1/x_2 + x_1 \mathcal{Y}(x_1)K_1(x_2) - x_2\mathcal{Y}_1(x_1)K_2(x_2)]}{\sin^2\vartheta + \gamma^{-2}} \tag{8}$$

$$P = \frac{2\sin[(1-\beta\cos\vartheta)\omega a_z/V]}{1-\beta\cos\vartheta}, \tag{9}$$

где $x_1 = (\omega a_\perp/c)\sin\vartheta$, $x_2 = |\omega a_\perp \gamma^{-1}/V|$.

Дальнейшее рассмотрение целесообразно проводить в двух предельных случаях: I) когда аргумент x_2 функции K_1 и K_2 в выражении (8) велик и 2) когда этот аргумент мал.

I. Пусть $x_2 \gg 1$, т.е.

$$a_\perp \gg \frac{V\gamma}{\omega}. \tag{10}$$

Тогда, учитывая экспоненциальную малость функций K_1 и K_2 выражение (8) можно представить следующим образом:

$$D = \frac{P\beta\gamma\sin\vartheta}{\gamma^{-2}+\sin^2\vartheta}. \tag{11}$$

Что же касается частотно-углового распределения интенсивности излучения (подынтегральная функция в (4)), то оно примет вид:

$$W(\omega,\vartheta) = \frac{2e^2}{\pi c}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^4 \frac{\sin^2[\omega a_z/V)(1-\beta\cos\vartheta)]\sin^3\vartheta\cos\vartheta}{(1-\beta\cos\vartheta)^2(\gamma^{-2}+\sin^2\vartheta)^2} \tag{12}$$

Рассмотрим это выражение в зависимости от величины ϑ -угла излучения. Если угол излучения мал $(\vartheta \ll 1)$, то выражение (I2) перепишется следующим образом:

$$W(\omega,\vartheta) = \frac{8e^2}{\pi c}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^4 \frac{\sin^2[(\omega a_z/2v)(\gamma^{-2}+\vartheta^2)]\,\vartheta^3}{(\gamma^{-2}+\vartheta^2)^4} . \qquad (I3)$$

С учетом (3) эта формула совпадает с известной формулой для РПИ в случае непоглощающей пластины толщиной $2a_z$ (см., например, [2]):

$$W_{пл}(\omega\vartheta) = \frac{8e^2}{\pi c}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^4 \vartheta^3 \frac{\sin^2[(\omega a_z/2v)(\gamma^{-2}+\vartheta^2+\omega_0^2/\omega^2)]}{(\gamma^{-2}+\vartheta^2)^2(\gamma^{-2}+\vartheta^2+\omega_0^2/\omega^2)^2} . \qquad (I4)$$

Действительно, если

$$\gamma^{-2}+\vartheta^2 \lessapprox \frac{\omega_0^2}{\omega^2} ,$$

то в силу (3) имеем также

$$\frac{\omega a_z}{c}(\gamma^{-2}+\vartheta^2) \ll 1 , \qquad (I5)$$

т.е.в обеих формулах (I3) и (I4) можно заменить функцию синуса на аргумент, и совпадение этих формул очевидно. Если же

$$\gamma^{-2}+\vartheta^2 \gg \frac{\omega_0^2}{\omega^2} ,$$

то в (I4) вообще можно пренебречь ω_0^2/ω^2, и формулы (I3) и (I4) снова совпадают. Собственно, так и должно быть, так как выполнение условия (I0) означает, что поперечный размер тела $a_\perp$ много больше "радиуса действия" поля ультрарелятивистского заряда $v\gamma/\omega$ и поэтому рассматриваемое тело имеет как бы бесконечный поперечный размер.

Угловая зависимость выражения (I3) определяется двумя характерными углами излучения γ^{-1} и $\vartheta_1 = (2c/\omega a_z)^{1/2}$. Рассмотрим в отдельности следующие случаи:

Ia. Пусть

$$\gamma^{-1} \ll (2c/\omega a_z)^{1/2}. \qquad (16)$$

Тогда при $\vartheta \ll \vartheta_1$ продольный размер тела a_z намного меньше зоны формирования переходного излучения в вакууме $Z_{ВАК}(\vartheta) = \pi c / \omega(\gamma^{-2} + \vartheta^2)$. Из (13) получаем, что

$$W(\omega,\vartheta) = \frac{2e^2}{\pi c}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^4\left(\frac{\omega a_z}{c}\right)^2 \begin{cases} \vartheta^3\gamma^4 & \vartheta \ll \gamma^{-1} \\ \vartheta^{-1} & \gamma^{-1} \ll \vartheta \ll \vartheta_1. \end{cases} \qquad (17)$$

Из (17) видно, что величина $W(\omega,\vartheta)$ достигает максимума в окрестности $\vartheta \sim \gamma^{-1}$. При увеличении угла ϑ до значений порядка ϑ_1 толщина тела a_z становится порядка $Z_{ВАК}(\vartheta)$, и в угловой зависимости $W(\omega,\vartheta)$ возникает ряд дополнительных максимумов и минимумов интерференционного происхождения. Когда же $\vartheta \gg \vartheta_1$ осцилляции функции $W(\omega,\vartheta)$ становятся весьма частыми и после замены квадрата синуса в (12) его средним значением $1/2$, получаем:

$$W(\omega,\vartheta) \approx \frac{4e^2}{\pi c}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^4 \begin{cases} \vartheta^5 & \vartheta_1 \ll \vartheta \ll 1 \\ 1 & \vartheta \sim 1 \end{cases} \qquad (18)$$

Рассмотрим теперь интегральную по углу спектральную интенсивность (4). Имея в виду угловую зависимость (17), (18) нетрудно оценить интеграл (4):

$$W(\omega) = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^4\left(\frac{\omega a_z}{c}\right)^2\frac{e^2}{\pi c}\left(\ln\frac{2c\gamma^2}{\omega a_z} - C\right), \qquad (19)$$

где C – число порядка единицы. При этом эффективные углы излучения, обуславливающие логарифмический член, лежат в интервале

$\gamma^{-1} \lesssim \vartheta \ll \vartheta_1$.

Iб. Пусть теперь

$$\gamma^{-1} \gg (2c/\omega a_2)^{1/2}. \qquad (20)$$

Тогда

$$W(\omega,\vartheta) = \frac{4e^2}{\pi c}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^4 \begin{cases} \vartheta^3 \gamma^8 & \vartheta \ll \gamma^{-1} \\ \vartheta^{-5} & \gamma^{-1} \ll \vartheta . \end{cases} \qquad (2I)$$

Как и в предыдущем случае, при $\vartheta \sim \gamma^{-1}$ величина $W(\omega,\vartheta)$ достигает максимума. Однако, интерференционные экстремумы в угловой зависимости $W(\omega,\vartheta)$ отсутствуют.

Оценка интегральной интенсивности дает

$$W(\omega) = \frac{2e^2}{\pi c}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^4 \gamma^4 . \qquad (22)$$

В силу условия (20) интенсивность (22) намного меньше интенсивности (I9) в случае Iа. Заметим, что из условий (3) и (20) следует, что

$$\omega_0 \gamma \ll \omega , \qquad (23)$$

т.е. в рассматриваемом случае частоты находятся в "заграничной" области.

2. Пусть теперь аргумент функций K_1 и K_2 в (8) мал, т.е.

$$a_\perp \ll \frac{V\gamma}{\omega} \qquad (24)$$

тогда вместо (8) имеем

$$P = \frac{p}{\sin^2\vartheta + \gamma^{-2}}\left[\frac{x_1}{x_2}\left(1 - y_0(x_1)\right) + \frac{x_2}{2}\, y_1(x_1)\right]. \qquad (25)$$

Введем характерный угол

$$\vartheta_2 = \frac{c}{\omega a_\perp}, \qquad (26)$$

определяющий величину x_1. При $\vartheta \ll \vartheta_2$ имеем $x_1 \ll 1$ и поэтому

$$P = p\,\frac{\gamma\vartheta}{4}\left(\frac{\omega a_1}{c}\right)^2. \qquad (27)$$

Оценим теперь интеграл (4). При этом будем считать, что выполнено неравенство (16), так как в противном случае (20) интенсивность РПИ пренебрежимо мала. Оценка зависит от соотношения углов ϑ_1 и ϑ_2.

2а. Случай $\vartheta_2 < \vartheta_1$, т.е.

$$a_2 < \frac{2\omega a_1^2}{c}. \qquad (28)$$

В интервале $\vartheta \ll \vartheta_2 < \vartheta_1$ величина P определяется формулой (27), где

$$p = \frac{2\omega a_2}{V}. \qquad (29)$$

Поэтому в этом интервале углов

$$W(\omega,\vartheta) = \frac{e^2}{8\pi c}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^4\left(\frac{\omega a_2}{V}\right)^2\vartheta^3\left(\frac{\omega a_1}{c}\right)^4 \qquad (30)$$

Из (30) следует, что при $\vartheta \sim \gamma^{-1}$ (этот угол находится в рассматриваемом интервале, поскольку $\gamma^{-1} \ll \vartheta_2$) величина $W(\omega,\vartheta)$ не имеет максимума.

Когда угол излучения ϑ порядка или больше ϑ_2, величина $x_1 = \omega a_1 \sin\vartheta / c$ порядка или больше единицы и из-за функции Бесселя в (25) величина $W(\omega,\vartheta)$ будет иметь ряд максимумов и минимумов, обусловленных интерференцией на границах цилиндрического тела в поперечных направлениях ("краях"). При увеличении угла ϑ до значений порядка или больше ϑ_1 появляются также экстремумы, обусловленные интерференцией на границах тела в продольном направлении ("торцах"). Когда углы ϑ_1 и ϑ_2 незначительно отличаются друг от друга, указанные два типа интерференции смешиваются и их невозможно отделить.

Первый максимум излучения ϑ_0 приходится теперь на угол порядка $c/\omega a_\perp$. Например, когда $\vartheta_2 \ll \vartheta_1$, имеем

$$\vartheta_0 \approx \frac{3.8c}{\omega a_\perp} . \qquad (31)$$

При дальнейшем увеличении угла излучения ϑ до значений $\vartheta_1 \ll \vartheta$ функциями $Y_0(x_1)$ и $Y_1(x_1)$ в (25) можно пренебречь, а квадрат синуса в величине P^2 можно заменить на I/2. Тогда, как и в случаях Iа и Iб, имеем:

$$W(\omega,\vartheta) = \frac{4e^2}{\pi c}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^4 \begin{cases} \vartheta^{-5} & \vartheta_1 \ll \vartheta \ll 1 \\ 1 & \vartheta \sim 1 . \end{cases} \qquad (32)$$

Оценка интеграла (4) получается аналогичной (I9):

$$W(\omega) = \frac{e^2}{\pi c}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^4\left(\frac{\omega a_2}{c}\right)^2\left(\ln\frac{2\omega a_\perp^2}{c a_2} - C_1\right), \qquad (33)$$

где C_1 - некоторое число порядка единицы. Эффективные углы излучения лежат в интервале $\vartheta_2 \lesssim \vartheta < \vartheta_1$.

2б. Случай $\vartheta_1 < \vartheta_2$, т.е.

$$\frac{2\omega a_\perp^2}{c} < a_2 . \qquad (34)$$

Анализ угловой зависимости $W(\omega,\vartheta)$ проводится аналогично предыдущему случаю 2а. Разница лишь в том, что теперь группа экстремумов, обусловленных интерференцией на "торцах" тела, находится левее (при меньших углах), чем группа экстремумов, обусловленных интерференцией на "краях" тела. Главный максимум теперь приходится на угол ϑ_0 порядка $(a/\omega a_2)^{1/2}$. Например, когда $\vartheta_1 \ll \vartheta_2$, имеем

$$\vartheta_0 \approx \left(\frac{\pi c}{2\omega a_2}\right)^{1/2} . \qquad (35)$$

Оценка интегральной интенсивности РПИ дает

$$W(\omega) = \frac{e^2}{8\pi c}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^4\left(\frac{\omega a_\perp}{c}\right)^4\left(\ln\frac{c a_z}{2\omega a_\perp^2} + C_2\right), \qquad (36)$$

где C_2 - число порядка единицы. Эффективные углы излучения лежат в интервале $\vartheta_1 \lesssim \vartheta < \vartheta_2$.

Таким образом, мы приходим к выводу, что главный максимум РПИ, образуемого на телах конечных размеров, приходится на угол ϑ_0 порядка γ^{-1} только если поперечные размеры тел много больше "радиуса действия" поля частицы (условие (10)). В противном случае угол ϑ_0 определяется интерференцией на границах тел,а именно, меньшим из углов ϑ_1 и ϑ_2 . Правда , этот результат получен в рамках теории возмущений, т.е. при выполнении условия (3). Представляет интерес рассмотрение этого вопроса в более общем случае. Отметим, что наличие интерференционных экстремумов при углах порядка ϑ_1 и ϑ_2 хорошо известно из оптики, а именно, из теории дифракции света на тонких клиньях и круглых отверстиях или экранах (см.например, [3]).

Для рассматриваемых тел с небольшим продольным размером (условие (3)), спектральная интенсивность РПИ при маленьких γ (условие (20)) сначала растет пропорционально γ^4 (правда при этом интенсивность весьма мала, см.(22)), а затем γ - зависимость постепенно переходит в логарифмическую (19) , пока выполняется условие (10). При дальнейшем росте γ , когда это условие перестает выполняться, спектральная интенсивность вообще перестает зависеть от γ (см.(33) и (36)).

Что же касается зависимости спектральной интенсивности РПИ $W(\omega)$ (в"дограничной"области частот $\omega < \omega_0 \gamma$) от поперечного размера тела $a_\perp$, то при очень маленьких $a_\perp$,(выполнены условия (24) и (34) величина $W(\omega)$ пропорциональна a_1^4 согласно (36), затем зависимость становится логарифмической согласно (33), если выполняются условия (24) и (28). Когда же $a_1 \sim \frac{V\gamma}{\omega}$, величину $W(\omega)$ необходимо вычислять по формуле (4) с учетом (8), (9). При этом, из-за наличия функций Бесселя Y_0 и Y_1 в (8), зависимость $W(\omega)$ от a_1 может приобрести немонотонный характер. Наконец, при дальнейшем росте a_1, когда удовлетворяется условие (10), интенсивность $W(\omega)$ вообще перестает зависеть от a_1, и определяется формулой (19).

В заключение авторы выражают благодарность Г.М.Гарибяну за плодотворные обсуждения и постоянный интерес к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амбарцумян А.С., Гарибян Г.М., Ян Ши. Излучение, испускаемое электронами вещества, при взаимодействии с релятивистской заряженной частицей. - Изв.АН Арм.ССР, Физика, 1975, т.10, вып.5, с.258-269.

2. Гарибян Г.М. Прохождение быстрых частиц через пластину.- Изв.АН СССР, сер.физ., 1962, т.36, вып.6, с.754-757; Прохождение быстрых частиц через пластину вещества. Дан Арм.ССР, 1961, т.33, вып.3, с.105-109.

3. Ландсберг Г.С. Оптика. М.: Наука, 1976.

Рукопись поступила 20-го ноября 1981 г

Редактор Л.П.Мукаян

Тех.редактор А.С.Абрамян

Заказ 628 ВФ- 11502 Тираж 299

Препринт ЕФИ Формат издания 60х84/16

Подписано к печати 30/XII-81г. 1,0 уч.изд.л.Ц 7 к

Издано Отделом научно-технической информации

Ереванского физического института, Ереван-36, пер.Маркаряна 2

индекс 3624