ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ԳԻՏԱԿԱՆ ՀԱՂՈՐԴՈՒՄ НАУЧНОЕ СООБЩЕНИЕ

[redacted]

ЕФИ–52(74)

*И.И. Гольдман*

# ИНТЕГРАЛЫ ПО ПОЛЯМ И ОПЕРАТОРНОЕ ОПИСАНИЕ НАЧАЛЬНОГО И КОНЕЧНОГО СОСТОЯНИЙ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ

ԵՐԵՎԱՆ 1974 ЕРЕВАН

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Научное сообщение ЕФИ- 52 (74)

И.И.ГОЛЬДМАН

# ИНТЕГРАЛЫ ПО ПОЛЯМ И ОПЕРАТОРНОЕ ОПИСАНИЕ НАЧАЛЬНОГО И КОНЕЧНОГО СОСТОЯНИЙ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ

Ереван 1974

УДК 530.145.6 Научное сообщение ЕФИ-52(74)

И.И.ГОЛЬДМАН

# ИНТЕГРАЛЫ ПО ПОЛЯМ И ОПЕРАТОРНОЕ ОПИСАНИЕ НАЧАЛЬНОГО И КОНЕЧНОГО СОСТОЯНИЙ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ

Раскрыта символическая запись для амплитуды процесса в полевой теории на примере квантовой механики. Выражение для действия представлено в виде, обеспечивающем сходимость интегралов по возможным состояниям и независимость амплитуды от способа разбиения интервала времени. Устанавливается цепочка уравнений, связывающих функции Грина $G$ с соответствующими связанными функциями К и экспоненциальное представление амплитуды через последние. Для описания начального и конечного состояний используется операторный подход. Представляется естественным считать операторы, относящиеся к начальному и конечному моментам времени, коммутирующими или антикоммутирующими без правых частей.

Ереванский физический институт
Ереван 1974

Scientific Report ЕФИ-52(74)

GOLDMAN I.I.

# FIELD INTEGRALS AND OPERATOR DESCRIPTION OF INITIAL AND FINAL STATES IN QUANTUM MECHANICS OF IDENTICAL PARTICLES

Symbolic expression for field theory amplitude is explained on the example of quantum mechanics. Formula for action obtained guarantees convergence of integrals on virtual states and independence of division of time interval. Equations for connection of Green functions G and connected functions K and exponentian expression for amplitude is established. Operator approach is used for description initial and final states. It is natural to consider operators of initial and final states as commuting (or anticommuting) without c-numbers

Yerevan Physics Institute
Yerevan 1974

## I. Выражение для амплитуды.

Квантовой механике может быть придана очень наглядная форма, если, следуя Фейнману [I], всевозможным классическим траекториям приписать амплитуду $e^{iS/\hbar}$ ( $S$ - действие). Особенно просто выражается мера интеграла по путям при описании виртуального процесса движения частицы посредством совместного задания координаты $q(t)$ и импульса $p(t)$ [2]. Ниже рассмотрен другой подход, близкий к теории поля, при котором автоматически учитывается тождественность частиц и действие имеет вид

$$S = \iint d\vec{r}\, dt\, \mathcal{L}[\psi, \psi^*],$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^0 + \mathcal{L}^{int},$$

$$\mathcal{L}^0 = i\psi^*\dot{\psi} - \frac{1}{2m}\nabla\psi^*\nabla\psi \qquad (\hbar = 1).$$

Виртуальный процесс описывается теперь полем $\psi(r,t)$, заданным в части пространства-времени между моментом приготовления ($t'$) и измерения ($t''$). Каждому процессу $\psi(r,t)$ сопоставляется амплитуда ($\sim e^{iS/\hbar}$), так что полная амплитуда вероятности представляется суммой (интегралом) по всем возможным $\psi(r,t)$, удовлетворяющим определенным условиям в начальный и конечный моменты времени.

Уточним способ задания состояния при $t=t'$ и $t=t''$, для чего запишем действие в более симметричном виде

$$S = \int_{t'}^{t''} dt \int_{\Omega} dr \left\{ i\psi^*\dot{\psi} - \frac{1}{2m}\nabla\psi^*\nabla\psi \right\} - i\psi^*(t'')\psi(t'') =$$

$$= \int_{t'}^{t''} dt \int_{\Omega} dr \left\{ -i\dot{\psi}^*\psi - \frac{1}{2m}\nabla\psi^*\nabla\psi \right\} - i\psi^*(t')\psi(t').$$

Варьирование по $\psi$ и $\psi^*$ дает

$$\delta S = \int_{t'}^{t''} dt \int_{\Omega} dr \left\{ \delta\psi^* \left[ i\dot{\psi} + \frac{1}{2m}\Delta\psi \right] + \text{к.с.} \right\} - i\delta\psi^*(t'')\psi(t'') - i\psi^*(t')\delta\psi(t')$$

(принимаем условия периодичности в кубе объемом $\Omega$). Следует считать, что

$$\delta\psi(t') = 0, \qquad \psi(r,t') = \varphi(r)$$

$$\delta\psi^*(t'') = 0, \qquad \psi^*(r,t'') = \chi^*(r)$$

т.е. в начале процесса зафиксирована $\psi(r,t')$, а в конце $\psi^*(r,t'')$ (ясна аналогия с [2]).

Перейдем к определению меры виртуального процесса. Функцию зададим счетным множеством параметров, положив

$$\psi(\vec r,t)=\frac{1}{\sqrt{\Omega}}\sum_{p} e^{i\vec p\vec r}a_{p}(t)\quad,\quad \vec p=\frac{2\pi\vec n}{\Omega^{1/3}}$$

причем $\vec n$ – тройка целых чисел $n_i = 0, \pm1, \pm2,\ldots$

Интервал времени $(t',t'')$ разобьем на $N$ промежутков $t'=t_0<t_1<\ldots<t_{N-1}<t_N=t''$ и функции $a_p(t)$ задаем на границах интервалов:

$$a_p(t_n)\equiv a_p^n\qquad (n=1,\ldots,N-1).$$

Амплитуда процесса должна выражаться как интеграл по всем $a_p^n$.

Выражение для действия через $a_p(t)$

$$S=\sum_{p}\left\{\int_{t'}^{t''}dt\left[i\overset{*}{a}_p(t)\dot a_p(t)-\frac{\vec p^2}{2m}\overset{*}{a}_p(t)a_p(t)\right]-i\overset{*}{a}_p(t'')a_p(t'')\right\}$$

и интеграл по $t$ необходимо представить в виде римановой суммы, в которую входят лишь $a_p^n$, $\overset{*}{a}_p^n$. Переход к сумме неоднозначен, однако во всяком случае надо добиться того, чтобы интегралы по $a_p^n$ оказались сходящимися. Этому требованию можно удовлетворить, приняв для $S$ выражение:

$$S=\sum_{p}\left\{\sum_{n=1}^{N}\left[i\overset{*}{a}_p^n\left(a_p^n-a_p^{n-1}\right)-\epsilon_p\left(t_n-t_{n-1}\right)\overset{*}{a}_p^n a_p^{n-1}\right]-i\overset{*}{a}_p^N a_p^N\right\},\quad \epsilon=\frac{p^2}{2m}.$$

В это выражение входит $a_p^0$ (но не $\overset{*}{a}_p^0$) и $\overset{*}{a}_p^N$ (но не $a_p^N$), в согласии с тем, что в начальный момент задается $\psi(t')=\varphi$ и в конечный $\overset{*}{\psi}(t'')=\chi^*$. С принятой точностью ( $t_n-t_{n-1}$ – малая величина) окончательное выражение для действия в виде суммы запишем так:

$$S=\sum_{p}\left\{i\sum_{n=1}^{N-1}\overset{*}{a}_p^n a_p^n-i\sum_{n=1}^{N}\overset{*}{a}_p^n a_p^{n-1}e^{-i\epsilon_p(t''-t')}\right\}.$$

Теперь убедимся, что выражение для амплитуды

$$F(\overset{*}{\chi},\varphi)=\int\!\ldots\!\int\prod_{p,n=1}^{N-1}\frac{d^2a_p^n}{\pi}\exp(iS)$$

не зависит от способа разбиения интервала времени.

Произведем интегрирование по параметрам, относящимся к определенному моменту времени $t_n$. В выражении для $e^{iS}$ зависит от $a_p^n$, $\overset{*}{a}_p^n$ лишь множитель

$$I_n = \exp\left\{-\overset{*}{a}^n a^n + e^{-i\epsilon(t_n - t_{n-1})}\overset{*}{a}_n a_{n-1} + e^{-i\epsilon_p(t_{n+1}-t_n)}\overset{*}{a}_{n+1} a_n\right\}$$

Положим $a^n = u + iv$, $\overset{*}{a}^n = u - iv$ и произведем интегрирование по $d^2a^n = du\,dv$ ; удобно воспользоваться формулами

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 z}{\pi}\,[1\,;\,z\,;\,z^*\,;\,z^* z]\,e^{-\overset{*}{z}z + \alpha z + \beta \overset{*}{z}} = [1, \beta, \alpha, \alpha\beta + 1]\,e^{\alpha\beta}.$$

В результате получим

$$\frac{1}{\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} d^2 a^n I_n = \exp\left\{\overset{*}{a}^{n+1} a^{n-1} e^{-i\epsilon(t_{n+1} - t_{n-1})}\right\}.$$

Выражение для амплитуды $F$ после интегрирования имеет такой же вид как прежде, за исключением того, что исчезла память о моменте $t_n$.

Таким образом, определение амплитуды следует принять в виде

$$F(\overset{+}{b}, a) = \int\ldots\int \prod_{\vec{p},\,n=1}^{N-1} \frac{d^2 a_p^n}{\pi} \exp\left\{-\sum_{p,\,n=1}^{N-1} \overset{*}{a}_p^n a_p^n + \sum_{p,\,n=1}^{N} e^{-i\epsilon_p(t_n - t_{n-1})}\overset{*}{a}_p^n a_p^{n-1} + iS^{int}\right\}$$

причем $\varphi(r) = \Omega^{-1/2}\sum e^{i\vec{p}\vec{r}} a_p$ , $\chi^*(r) = \Omega^{-1/2}\sum e^{-ipr} b_p^+$ — считаются заданными ( $a^0 = a$ , $b^+ = \overset{*}{a}^N$). Положим $S^{int} = 0$ и произведем все интегрирования:

$$F^{(0)}(\overset{+}{b}, a) = \exp\left\{\sum_p e^{-i\epsilon_p(t'' - t')} b_p^+ a_p\right\} = \exp\left\{\iint dx\,dy\,\overset{*}{\chi}(x) K^0(x,y)\varphi(y)\right\}.$$

При этом

$$K^{\circ}(\bar{x},\bar{y})=\left[\frac{m}{2\pi i\,(t''-t')}\right]^{3/2} e^{\frac{i m(\bar{x}-\bar{y})^2}{2(t''-t')}}$$

– свободный пропагатор.

Перейдем к вопросу о записи $S^{int}$ и рассмотрим сначала взаимодействие с внешним полем $U(\vec{r},t)$. Для этого достаточно вычислить поправку к амплитуде в первом приближении теории возмущения. Положим

$$S^{int}=\sum_n \int \psi^*(r,t_n)\,\dot{U}(r,t_n)\,\psi(r,t_{n+m})\,dr=-\sum \hat{a}_p^{*n}\,U_{p-q}(t_n)\,a_q^{n+m},$$

причем $m$ – фиксированное число, $U_k(t)=\Omega^{-1}\int U(r,t)\,e^{-ikr}dr$.
Если $m$ – отрицательно, поправка к $F$ в первом порядке имеет вид

$$F^{(1)}(\overset{*}{\chi},\varphi)=-i\,F^{\circ}(\overset{*}{\chi},\varphi)\int \overset{*}{\chi}(x)\,K^{\circ}(x,t'';r,t)\,U(r,t)\,K^{\circ}(r,t;y,t')\,\varphi(y)=$$

$$=F^{o}(\overset{*}{\chi},\varphi)\cdot\int \overset{*}{\chi}(x)\,K^{(1)}(x,t'';y,t')\,\varphi(y)\,dx\,dy,$$

причем $K^{(1)}$ – поправка к $K(x,y)$ линейная по внешнему полю. Если положить $n=0,\ 1,\ 2,\dots$, получается одинаковый результат, отличающийся от предыдущего за счет слагаемого, содержащего нулевую фурье-компоненту $U_0(t)$:

$$F^{(1)}=-i\,F^{(0)}\sum_{pq}\int_{t'}^{t''}dt\,\{a_p^{*\prime\prime}\,e^{-i\varepsilon_p(t''-t)}\,U_{p-q}(t)\,e^{-i\varepsilon_p(t-t')}\,a_q'+\delta_p^q\,U_0(t)\}.$$

Последний член дает отличие (бесконечное, если $\int U_0(t)\,dt\neq 0$) от первого предположенного вида $S^{int}$, поэтому выбираем первую форму введения внешнего поля ($m=-1$).

Двухчастичное взаимодействие запишем в виде

$$S^{int}=-\frac{1}{2}\sum_n \int \overset{*}{\psi}(r,t_n)\,\overset{*}{\psi}(r',t_n)\,V(r-r')\,\psi(r',t_{n-1})\,\psi(r,t_{n-1})\,dr\,dr'\,(t_n-t_{n-1}),$$

Здесь $V(r,r')$ – потенциальная энергия парного взаимодействия. Выражение для действия в виде суммы содержит относящиеся к начальному моменту времени $a_\rho(\tau, e, \varphi)$ но в них не входит $b^+_\rho$ подобно этому при $t=t'$ в $S$ входит только $\bar{\chi}(x)$ и нет $\chi(\vec{r})$ – в соответствии с тем, что континуальный интеграл берется в пределах $\varphi(r)$ и $\chi(r)$.

## 2. Функции Грина.

Определим одночастичную функцию Грина

$$G(x,y) = \frac{\delta^2 F(\chi^*, \varphi)}{\delta \chi^*(x)\, \delta\varphi(y)}\Big|_{\varphi=\chi^*=0}.$$

Для свободного движения

$$G(x,y) = K^\circ(x,y)$$

т.е. функция Грина дает амплитуду процесса, при котором частица выходит из точки $\vec{y}$ в момент $t'$ и приходит в точку $\vec{x}$ в момент $t''$.

Двухчастичная функция Грина

$$G(x_1, x_2; y_1, y_2) = \frac{\delta^4 F}{\delta \chi_1^* \delta \chi_2^* \delta\varphi_1 \delta\varphi_2}\Big|_{\varphi=\chi^*=0}$$

для свободного движения

$$G(x_1 x_2, y_1 y_2) = K^\circ(x_1 y_1) K^\circ(x_2 y_2) + K^\circ(x_1 y_2) K^\circ(x_2 y_1),$$

симметрична относительно перестановки $y_1$ и $y_2$, что является выражением тождественности частиц. Аналогично определяется $\ell$ – частичная функция Грина:

$$G(\bar{1}\ldots\bar{\ell}; 1\ldots\ell) = \frac{\delta^{2\ell} F}{\delta \chi^*(\bar{1})\ldots\delta\chi^*(\bar{\ell})\,\delta\varphi(1)\ldots\delta\varphi(\ell)}\Big|_{\varphi=\chi^*=0},$$

которая определяет амплитуду процесса с участием $\ell$ частиц.

Суммируя функциональный ряд Тейлора, найдем выражение для $F(\chi^*,\varphi)$ через функции Грина:

$$F(\chi^*,\varphi) = 1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{(\ell!)^2} \int \ldots \int \chi^*(\bar 1) \ldots \chi^*(\bar\ell)\, G(\bar 1 \ldots \bar\ell; 1 \ldots \ell)\, \varphi(1) \ldots \varphi(\ell)\, d\bar 1 \ldots d\ell.$$

Выведем теперь важное соотношение, которому удовлетворяет $F[\chi^*,\varphi]$. Проведем интегрирование по параметрам, относящимся ко всем промежуточным моментам времени за исключением момента $t_n$. В импульсном представлении имеем

$$F_{t'}^{t''}[b^+,a] = \int \ldots \int F_t^{t''}[b^+,c]\, F_{t'}^{t}[c^*,a] \prod_p \left(\frac{d^2 c_p}{\pi}\, e^{-c_p^* c_p}\right).$$

Здесь переменные интегрирования $a_p^n$ обозначены $c_p$. Смысл соотношения прост: амплитуда перехода $(a_p, t') \to (b_p^+, t'')$ равняется произведению амплитуд перехода $(a_p, t') \to (c_p^*, t)$ и перехода $(c_p, t) \to (b^+, t'')$, проинтегрированному по всем промежуточным состояниям с весом.

Это соотношение имеет ряд следствий. Продифференцируем его по $b_p^+$ и $a_q$ и затем положим $b^+ = a = 0$:

Поскольку

$$\left.\frac{\partial F[b^+,a]}{\partial b_p^+}\right|_{b^+=0} = \sum_q G(p,q)\, a_q$$

находим

$$G_{t'}^{t''} = \sum_k G_t^{t''}(p;k)\, G_{t'}^{t}(k;q).$$

Подобно этому находим

$$G_{t'}^{t''} = \frac{1}{\ell!} \sum_k G_t^{t''}(\ldots,k)\, G_{t'}^{t}(k,\ldots)$$

Возникающие при доказательстве интегралы

$$\sum c_{k_1}\ldots c_{k_\ell}\, c^*_{f_1}\ldots c^*_{f_\ell} \prod_s e^{-c^*_s c_s}\frac{d^2 c_s}{\pi} = \sum_{\text{перест.}} \delta_{k_1}^{f_1}\ldots\delta_{k_\ell}^{f_\ell} \qquad (\ell!\ \text{членов})$$

вычисляются дифференцированием по $\alpha^*, \beta$ интеграла

$$\iint e^{-\left(\sum c^*_s c_s + \alpha^*_s c_s + c^*_s \beta_s\right)} \frac{d^2 c_s}{\pi} = e^{\sum_s \alpha^*_s \beta_s}.$$

Предположим теперь, что $t'' = t+\tau$ , где $\tau$ - бесконечно малая. Тогда для $G_t^{t''} = G_t^{t+\tau}$ можно взять выражение, учитывающее взаимодействие в первом порядке теории возмущений. Из условия обращения в нуль членов $\sim\tau$ для одночастичной функции Грина находим

$$\frac{\partial G^t(\bar p,\bar q)}{\partial t} = -i\epsilon_p\, G^t(\bar p,\bar q) - i\sum_k U_{\bar p-\bar k}\, G^t(\bar k,\bar q).$$

парное взаимодействие не дает вклада). Аналогично этому для двухчастичной функции получаем

$$\frac{\partial G^t(p_1,p_2;q_1q_2)}{\partial t} = -i(\epsilon_{p_1}+\epsilon_{p_2})G - i\sum_{k}\left(\delta_{k_2}^{p_2} U_{p_1-k_1} + \delta_{k_1}^{p_1} U_{p_2-k_2} + V_{p_1+p_2-k_1-k_2}\right)G.$$

Это обычное уравнение Шредингера для одной и двух частиц, импульсном представлении, причем начальные условия таковы:

$$G_{t'}^{t'+\tau}(p,q) = \delta_p^q, \quad G_{t'}^{t'+\tau}(p_1p_2q_1q_2) = 2\,\delta_{p_1}^{q_1}\delta_{p_2}^{q_2}.$$

Введем теперь последовательность функций $K$ , через которые $F[\chi^*,\varphi]$ выражается в экспоненциальной форме

$$F[\chi^*,\varphi] = \exp\left\{\sum_1^\infty \frac{1}{\ell!^2}\int\ldots\int \chi^*(x_1)\ldots\chi^*(x_\ell)\, K(x_1,\ldots x_\ell; y_1\ldots y_\ell)\,\varphi(y_1)\ldots\varphi(y_\ell)\, dx\, dy\right\}.$$

Связь K с функциями Грина имеет вид

$$G(\bar 1,1) = K(\bar 1,1)$$

$$G(\bar 1\bar 2, 12) = K(\bar 1, 1)\, K(\bar 2, 2) + K(\bar 1, 2)\, K(\bar 2, 1) + K(\bar 1, \bar 2; 12)$$

$$G(\bar 1, \bar 2\bar 3; 123) = K_{\bar 1 1} \cdot K_{\bar 2 2} \cdot K_{\bar 3 3} + \dots \quad (6 \text{ членов})$$
$$+ K(\bar 1\bar 2, 12)\, K_{\bar 3 3} + \dots \quad (9 \text{ членов})$$
$$+ K(\bar 1\bar 2\bar 3, 123).$$

. . . .

Эта цепочка соотношений может быть разрешена относительно $K$; например

$$K(\bar 1, \bar 2, \bar 3; 123) = 2\,[G(\bar 1, 1)\, G(\bar 2, 2)\, G(\bar 3, 3) + \dots \quad ] -$$
$$- G(\bar 1, \bar 2; 12)\, G(\bar 3, 3) - \dots +$$
$$+ G(\bar 1, \bar 2\bar 3; 123).$$

Невыписанные члены получаются симметризацией по аргументам. Как $G(\bar 1 \ldots \bar \ell, 1 \ldots \ell)$, так и $K(\bar 1 \ldots \bar \ell, 1 \ldots \ell)$ являются симметричными функциями первых и последних в $\ell$ аргументов. Выведем интегральные уравнения для K, для чего умножим уравнение Шредингера для одночастичной функции Грина во внешнем поле $G^{t}_{t'}(\kappa, q)$ на невозмущенную $G^{0\,t''}_{t}(p,\kappa) = \delta_p^{\kappa}\, e^{-i\varepsilon_\kappa (t''-t)}$ и просуммируем по $\kappa$ и проинтегрируем по $t$ в пределах от $t'$ до $t''$:

$$K^{U}(2,1) = K^{0}(2,1) - i \int_{t'}^{t''}\!\!\int K^{0}(2,3)\, K^{U}(3,1)\, U(3)\, dt_3\, d\vec{x}_3 .$$

Это обычное уравнение Шредингера в интегральной форме, наглядный смысл которого обсуждался Фейнманом [I].

Соответствующее уравнение для двухчастичной функции $K$ имеет вид

$$K(\bar 1, \bar 2; 1,2) = -2i \int K(\bar 1, 3)\, K(\bar 2, 4)\, V(3-4)\, [K(3,1)\, K(4,2)\; d3\, d4 -$$
$$- i \int K(\bar 1, 3)\, K(\bar 2, 4)\, K(3,4; 12)\; d(3)\, d(4),$$

причем $V(1-2) = V(x_1-x_2)\,\delta(t_1-t_2)$, под $K(1-2)$, если есть внешнее поле, понимается $K^{u}(1,2)$.

## 3. Операторное описание начального и конечного состояний.

Таким образом получаются все результаты квантовой механики тождественных частиц, которые обычно выводятся, используя аппарат вторичного квантования. Здесь представляется естественным операторные методы сохранить лишь в отношении описания начального и конечного состояний. В выражениях

$$F[\overset{*}{\chi},\varphi] = \exp\left\{\sum_{\ell}\frac{1}{(\ell!)^2}\int\ldots\int \overset{*}{\chi}_1\ldots\overset{*}{\chi}_\ell\, K(\bar 1\ldots\bar\ell;1\ldots\ell)\,\varphi_1\ldots\varphi_\ell\, d\bar 1\ldots d\bar\ell\right\} =$$

$$= 1+\sum_{\ell}\frac{1}{(\ell!)^2}\int\ldots\int\overset{*}{\chi}_{\bar 1}\ldots\overset{*}{\chi}_{\bar\ell}\, G(\bar 1\ldots\bar\ell;1\ldots\ell)\,\varphi_1\ldots\varphi_\ell\, d\bar 1\ldots d\ell$$

входят $\varphi$ и $\overset{*}{\chi}$, но не $\overset{*}{\varphi}$, $\chi$ и можно считать, что мы работали в $\varphi,\overset{*}{\chi}$-представлении; обозначим величины

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)} = -\overset{+}{\varphi}(x)\,,\quad \frac{\delta}{\delta\overset{*}{\chi}(x)} = -\chi(x)\,,\quad \frac{\partial}{\partial a} = -\overset{+}{a}\,,\quad \frac{\partial}{\partial b^{*}} = b$$

тогда имеем коммутационные соотношения

$$\varphi(y)\overset{+}{\varphi}(x) - \overset{+}{\varphi}(x)\varphi(y) = \delta(x-y)$$

$$\chi(y)\overset{+}{\chi}(x) - \overset{+}{\chi}(x)\chi(y) = \delta(x-y)$$

Надо также предположить, что

$$[\varphi(x),\chi(y)] = 0,\qquad [\varphi(x),\overset{+}{\chi}(y)] = 0$$

Пусть начальное состояние $|0\rangle$ обладает свойствами

$$\varphi(x)|0\rangle = 0\,,\qquad a_p|0\rangle = 0$$

конечное состояние $\langle 0|$ обладает свойствами

$$\langle 0|\overset{+}{\chi}(x) = 0\,,\qquad \langle 0|\overset{+}{b}_p = 0$$

Тогда $\langle 0 | F[\overset{*}{\chi}, \varphi] | 0 \rangle = 1$

т.е. амплитуда перехода из состояния, в котором не было частиц, в такое же состояние есть I.

Одночастичное начальное состояние с импульсом $\vec{p}$

$$|\vec{p}\rangle = a^{+}_{p} |0\rangle;$$

аналогично определяются многочастичные состояния, суперпозиция состояний и амплитуды перехода.

Итак, в применении к квантовой механике методу интегрирования по путям (точнее полям) можно придать четкий смысл, обеспечивающий сходимость возникающих интегралов и независимость результата от способа разбиения пространства-времени на ячейки. Задача сводится к вычислению ряда функций К. Для описания начального и конечного состояний естественно пользоваться операторными методами.

Отметим, что в случае статистики Ферми-Дирака следует $\varphi$ и $\overset{*}{\chi}$ считать антикоммутирующими величинами (без $c$-численных правых частей), а уравнения для $G$ и К останутся прежними, как и в случае статистики Бозе-Эйнштейна. Тогда функция $K^{o}(2,1)$ имеет прежний вид, а функции $G(\bar{1}...\bar{\ell}; 1...\ell)$ и $K(\bar{1}...\bar{\ell}; 1...\ell)$ антисимметризуются по первым и последним $\ell$ аргументам.

Фейнман пишет: "Выясняется, что для решения более общих задач квантовой механики операторный метод оказывается и глубже и намного мощнее." (предисловие [I]). Эту пессимистическую оценку интегралов по путям надо пересмотреть, если сохранить операторы для описания начального и конечного состояний.

Рукопись поступила 28-го октября 1973г.

## Литература

I. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям, "Мир", М., 1968.

2. И.И.Гольдман. Препринт ЕФИ-51(74).

Редактор Л.П.Мукаян

Заказ 0544 ВФ-03472 Тираж 300

Подписано к печати 16/I-74г. Формат издания 30х40
1,0 уч.изд.л. Ц.7 к.

Отпечатано на ротапринте
Ереванского физического института,Ереван 36,пер.Маркаряна 2