ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЕФИ-524(11)-82

Е.Б.ПРОХОРЕНКО

КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ КАК МЕТРИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ РАССЛОЕННОГО ПРОСТРАНСТВА

ԵՐԵՎԱՆ 1982 ЕРЕВАН

ЕФИ-524(II)-82

YE.B.PROKHORENKO

GAUGE FIELDS AS METRICAL COEFFICIENTS OF LAMINATED SPACE

Metrical properties of the lamination over the basis M - a space-time with a layer G/H, where G is the inner symmetry group, and H is the isotropy subgroup, are considered. The conditions of the laminar metric consistency with lamination structure are studied. An action is obtained for the gauge field in the presence of a gravitational field as a laminated space curvature, obtained from the laminar metric, + a cosmological term in lamination. The cosmological term is needed to compensate the constant curvature of the homogeneous space G/H.

Yerevan Physics Institute

Yerevan 1982

ЕФИ-524(II)-82

УДК.53.001.1

Е.Б.ПРОХОРЕНКО

КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ КАК МЕТРИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ РАССЛОЕННОГО ПРОСТРАНСТВА.

В статье рассмотрены метрические свойства расслоения над базой M – пространством-временем, со слоем G/H, где G – группа внутренней симметрии, а H – подгруппа изотропии. Изучены условия совместности послойной метрики со структурой расслоения. Получено действие для калибровочного поля в присутствии гравитационного поля как кривизна расслоенного пространства, полученная из послойной метрики, с космологическим членом в расслоении. Космологический член нужен, чтобы компенсировать постоянную кривизну однородного пространства G/H.

Ереванский физический институт
Ереван 1982

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЕФИ-524(II)-82

Е.Б.ПРОХОРЕНКО

КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ КАК МЕТРИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ РАССЛОЕННОГО ПРОСТРАНСТВА.

Ереван 1982 г.

В [I] был рассмотрен вариант теории Калуцы, объединяющей гравитацию Эйнштейна с электродинамикой Максвелла, обобщенный на случай неабелевой группы внутренних симметрий G. Считалось, что группа G действует на однородном пространстве G/H минимальной размерности (семимерном), где H – максимальная компактная подгруппа группы $G = SU^c(3)\times SU(2)\times U(1)$, выбранная так, чтобы ни один сомножитель из G не действовал на G/H тривиально. При этом предполагалось, что мы работаем в пространстве, обладающем спонтанно нарушенной симметрией, а не общековариантной симметрией, которую имеет M^{4+K}, где K – число измерений G/H. Для этого случая в [I] рассмотрен специальный вид метрики на расслоении и указано, что в кривизну этой метрики входит член $-\frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2$, соответствующий калибровочному полю группы G.

В данной работе делается попытка математического обоснования допустимого вида метрики расслоенного пространства.

В [2] приведено выражение для метрики в частном случае, когда однородным пространством является сама группа G. Для этого случая наша метрика имеет тот же вид. Выражение для скалярной кривизны R, полученное в [2], отличается от нашего присутствием члена $A^a_\mu A^\mu_a$, который в [2] убирается специальным выбором калибровочного условия.

Калибровочные поля, введенные Янгом и Миллсом в [3] , были затем интерпретированы как связности в расслоении над пространством-временем с группой G внутренней симметрии (см.например,[4]).

Мы хотим показать, что калибровочные поля A^a_μ совместно с метрикой пространства-времени $g_{\mu\nu}(x)$ и инвариантной метрикой $\gamma_{ij}(\phi)$ однородного пространства G/H , являющегося слоем расслоения E , задают послойную метрику расслоения E превращая его в псевдориманово многообразие специального вида.

Рассмотрим расслоение E над базой M со слоем G/H и структурной группой G . M будем отождествлять с пространством-временем с локальными координатами X^μ, $\mu = 1,\dots,n$. G/H – однородное пространство, на котором группа G действует естественным образом (как группа автоморфизмов левых смежных классов). H – группа изотропии, оставляющая точку $\{H\}$ однородного пространства G/H неподвижной. Сама группа G может быть отождествлена с группой внутренней симметрии, например,с калибровочной группой $SU^c(3)\times SU(2)\times U(1)$. На $B=G/H$ – слое расслоения E введем координаты ϕ^i, $i = 1,\dots,k$. В дальнейшем будем требовать, чтобы G была компактной и B , соответственно, компактным многообразием.

При наших предположениях на B существует G – инвариантная метрика $\gamma_{ij}(\phi)$. Квадрат интервала на B имеет вид: $d\sigma^2 = \gamma_{ij}\, d\phi^i d\phi^j$. В принципе,можно рассматривать и пространства, на которых G действует как группа преобразований, имеющих непрерывное семейство инвариантных метрик $\gamma_{ij}(x,\phi)$, так, чтобы в каждом слое выбрать свою метрику. Но тогда возникают усложнения, связанные с некоммутативностью поднятия и опускания внутренних индексов $i, j, \ldots$ с ковариантной производной по внешним индексам $\mu, \nu, \ldots$

Введем на расслоении E риманову структуру, задавая метрику g_{AB} в локальных координатах x^μ, ϕ^i на расслоении:

$$g_{AB} = \left(\begin{array}{c|c} (g_{\mu\nu}(x,\phi)) & \alpha A_{\mu j}(x,\phi) \\ \hline \alpha A_{i\nu}(x,\phi) & \beta \gamma_{ij}(\phi) \end{array}\right), \quad A = \{\mu, i\}, \quad B = \{\nu, j\},$$

где α и β -нормировочные множители, которые можно не писать в промежуточных вычислениях, а потом легко восстановить в окончательном результате.

Рассмотрим изменение метрики g_{AB} при преобразовании координат, индуцированном действием группы G:

$$x^\mu \to x^\mu, \quad \phi^i \to \phi^i + K^i(x,\phi), \qquad (1)$$

где $K^i(x,\phi)$ -инфинитезимальное векторное поле на B, индуцированное данным генератором T группы G в определенной точке x^μ базы M.

Из тензорного закона преобразования

$$g_{AB}(x,\phi) = \frac{\partial x^{C'}}{\partial x^A} \cdot \frac{\partial x^{D'}}{\partial x^B} \cdot g'_{CD}(\phi', x'),$$

имеем

$$\gamma_{ij} \to \gamma_{ij} - L_K \gamma_{ij} \qquad (2)$$

, где L_K - производная Ли. (см.дополнение I).

$$\alpha A_{\mu i} \to \alpha A_{\mu i} - \alpha K^j{}_{,i} A_{\mu j} - \beta K^j{}_{,\mu} \gamma_{ji} - \alpha A_{\mu i,j} K^j,$$

$$(g_{\mu\nu}) \to (g_{\mu\nu}) - \alpha K^i{}_{,\mu} A_{i\nu} - \alpha K^i{}_{,\nu} A_{i\mu} - (g_{\mu\nu})_{,i} K^i.$$

Составляя комбинацию $A^i_\mu = \gamma^{ij} A_{\mu j}$, имеем для неё такой закон преобразования: $A^i_\mu \to A^i_\mu - (\beta/\alpha)\cdot \mathcal{D}_\mu K^i$ где $\mathcal{D}_\mu K^i = \partial_\mu K^i - \frac{\alpha}{\beta}\cdot [A_\mu, K]^i$ (3). Видно, что $(g_{\mu\nu})$ не преобразуется как чисто эйнштейновская метрика, которая вообще не должна меняться при калибровочном преобразовании (I).

Введя $g_{\mu\nu} = (g_{\mu\nu}) - \frac{\alpha^2}{\beta}\cdot A^i_\mu \cdot A_{\nu i}$, видим, что $g_{\mu\nu}$ преобразуется так: $g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} - L_K g_{\mu\nu}$ (4). Стало быть, для инвариантности $g_{\mu\nu}$, нужно потребовать, чтобы она зависела только от X^μ. Окончательно получаем следующий вид метрики:

$$g_{AB} = \left(\begin{array}{c|c} g_{\mu\nu}(x) + \frac{\alpha^2}{\beta} A^i_\mu A_{\nu i} & \alpha A_{\mu j} \\ \hline \alpha A_{i\nu} & \beta \gamma_{ij}(\phi) \end{array}\right), \quad g^{AB} = \left(\begin{array}{c|c} g^{\mu\nu} & -\frac{\alpha}{\beta} A^{\kappa\nu} \\ \hline -\frac{\alpha}{\beta} A^{\mu i} & \frac{1}{\beta}\gamma^{i\kappa} + \frac{\alpha^2}{\beta} A^i_\lambda A^{\kappa\lambda} \end{array}\right)$$

где $A^i_\mu(x,\phi)$ – аналог калибровочного поля $A^a_\mu(x)$. Кстати, только для нашего выбора $(g_{\mu\nu})$ имеется свойство факторизации детерминанта: $\det g_{AB} = \beta^K \det g_{\mu\nu} \det \gamma_{ij}$ (5). В результате определитель метрики g_{AB} не зависит от калибровочного поля A^i_μ (см. дополнение 2). Нормировку γ_{ij} сразу выберем так, чтобы $\int_B \sqrt{\det(\gamma_{ij})}\, d^K\phi = 1$. $\gamma_{ij}(\phi)$ – положительно определенная метрика.

Рассмотрим выражение для интервала: $dS^2 = g_{AB} dX^A \cdot dX^B = g_{\mu\nu} dX^\mu \cdot dX^\nu + \beta\gamma_{ij}(d\phi^i + \frac{\alpha}{\beta} A^i_\mu dx^\mu)(d\phi^j + \frac{\alpha}{\beta} A^j_\nu dx^\nu)$ (см. дополнение 2). Мы видим, что наш выбор метрики индуцирует разбиение всего касательного пространства расслоения на вертикальную и горизонтальную части, ортогональные друг другу. Имеем базис 1 – форм dX^μ и $d\phi^i + \frac{\alpha}{\beta} A^i_\mu dx^\mu$, а также дуальный ему базис касательных векторов: $\frac{\partial}{\partial x^\mu} - A^i_\mu \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi^i}$ и $\partial/\partial\phi^i$. Как видим, $A^i_\mu(x,\phi)$ задает коэффициенты связности на расслоении E. Закон преобразования A^i_μ тогда получается из условия инвариантности горизонтального подпространства с базисом $\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{\alpha}{\beta} A^i_\mu \frac{\partial}{\partial \phi^i}$:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{\alpha}{\beta} \cdot A^i_\mu \cdot \frac{\partial}{\partial \phi^i} \to \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{\alpha}{\beta} A^i_\mu \cdot \frac{\partial}{\partial \phi^i} - \left[K^j \frac{\partial}{\partial \phi^j}, \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{\alpha}{\beta} \cdot A^i_\mu \frac{\partial}{\partial \phi^i}\right]$$

или, в компонентах, опять $A^i_\mu \to A^i_\mu - \frac{\beta}{\alpha} \cdot \mathcal{D}_\mu K^i$.

Из определения инвариантной метрики γ_{ij} видно, что генератор T группы G индуцирует на B поле Киллинга K^i относительно этой метрики [5].

Любое поле Киллинга можно разложить по базисным полям с коэффициентами, зависящими только от x^μ. При этом мы можем выбрать либо один базис во всех точках $K^i_a(\phi)$, что соответствует работе в стандартном слое B, либо ввести базис, зависящий от точки $K^i_a(x,\phi)$, т.е. работать в слое B_x. Вообще говоря, если мы избрали первый вариант, то при калибровочном преобразовании (I) мы автоматически приходим ко второму: $K_a(\phi) \to K_a(\phi) - [K(\phi,x), K_a(\phi)]$. Но мы можем снова все величины разложить по старому базису $K_a(\phi)$. Тогда, при $K^i_a(x,\phi) = \varepsilon^a(x) \cdot K^i_a(\phi)$ и $A^i_\mu(x,\phi) = A^a_\mu(x) \cdot K^i_a(\phi)$, имеем следующий закон преобразования калибровочного поля A^a_μ : $A^a_\mu \to A^a_\mu - \frac{\alpha}{\beta} \cdot \mathcal{D}_\mu K^a$, где $\mathcal{D}_\mu \varepsilon^a = \partial_\mu \varepsilon^a - \frac{\alpha}{\beta} f^a_{bc} A^b_\mu \varepsilon^c$, т.е. обычное калибровочное преобразование. K_a – векторное поле, индуцированное генератором T_a группы G на стандартном слое B. При этом, условие $[K_a, K_b] = f^c_{ab} K_c$ совпадает с уравнениями Маурера-Картана, имеющими в компонентах вид $K^j_a K^i_{b,j} - K^j_b K^i_{a,j} = f^c_{ab} K_c$.

Введем теперь тензор напряженности поля $F^i_{\mu\nu}$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}-\frac{\alpha}{\beta}A^i_\mu\frac{\partial}{\partial\phi^i},\ \frac{\partial}{\partial x^\nu}-\frac{\alpha}{\beta}A^j_\nu\frac{\partial}{\partial\phi^j}\right]=-\frac{\alpha}{\beta}\cdot F^i_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\phi^i}\ ,\qquad \text{где}$$

$$F^i_{\mu\nu}=\partial_\mu A^i_\nu-\partial_\nu A^i_\mu-\frac{\alpha}{\beta}\left[A_\mu,A_\nu\right]^i .$$

Его также можно разложить по K^i_a : $F^i_{\mu\nu}=F^a_{\mu\nu}(x)\cdot K^i_a(\phi)$.

При этом, до сих пор предполагалось, что A^i_μ – поле Килли[н]га. Это предположение не очевидно, и чтобы его обосновать, ра[с]смотрим риманову связность на E метрики g_{AB} . Для справок выпишем все компоненты связности, считая для общности, что γ_{ij} зависят и от x^μ .

$$\left\{{\mu \atop \nu\lambda}\right\}=\Gamma^\mu_{\nu\lambda}-\frac{\alpha^2}{2\beta}\left(F^{i\mu}{}_{\cdot\lambda}A_{i\nu}+F^{i\mu}{}_{\cdot\nu}A_{i\lambda}\right)+\frac{\alpha^3}{2\beta^2}\left(A^\mu_{i;j}+A^\mu_{j;i}\right)A^i_\nu A^j_\lambda-$$

$$-\alpha^2/(2\beta)\cdot\gamma_{ij}{}^{;\mu}A^i_\nu A^j_\lambda .$$

$$\left\{{\mu \atop \nu i}\right\}=\frac{\alpha}{2}F_{i\nu\cdot}{}^{\cdot\mu}+\frac{\alpha^2}{2\beta}\left(A^\mu_{i;j}+A^\mu_{j;i}\right)A^j_\nu-\frac{\alpha}{2}\gamma_{ij}{}^{;\mu}A^j_\nu .$$

$$\left\{{\mu \atop ij}\right\}=\frac{\alpha}{2}\left(A^\mu_{i;j}+A^\mu_{j;i}\right)-\frac{\beta}{2}\gamma_{ij}{}^{;\mu}.$$

$$\left\{{i \atop \mu\nu}\right\}=\frac{\alpha^3}{2\beta^2}A^{i\lambda}\left(F^j_{\lambda\nu}A_{j\mu}+F^j_{\lambda\mu}A_{j\nu}\right)+\frac{\alpha}{2\beta}\left(A^i_{\mu;\nu}+A^i_{\nu;\mu}\right)-\frac{\alpha^2}{2\beta^2}\left(A^j_\mu A_{j\nu}\right)^{;i}-$$

$$-\frac{\alpha}{2\beta}\left(\gamma^{ij}{}_{;\mu}A_{j\nu}+\gamma^{ij}{}_{;\nu}A_{j\mu}\right)+\frac{\alpha^3}{2\beta^2}\gamma_{jk;\lambda}A^{i\lambda}A^j_\mu A^k_\nu .$$

$$\left\{{i \atop \mu j}\right\}=\frac{\alpha}{2\beta}\left(A^i_{\mu;j}-A_{j\mu}{}^{;i}\right)-\frac{\alpha^2}{2\beta}F_{j\mu\nu}A^{i\nu}-\frac{\alpha^3}{2\beta^2}\left(A^\nu_{k;j}+A^\nu_{j;k}\right)A^i_\nu A^k_\mu+$$

$$+\frac{\alpha^2}{2\beta}\gamma_{jk;\nu}A^{i\nu}A^k_\mu+\frac{1}{2}\gamma^{ik}\gamma_{kj;\mu} .$$

$$\left\{{i \atop jk}\right\}=\Gamma^i_{jk}-\frac{\alpha^2}{2\beta}\left(A^\mu_{j;k}+A^\mu_{k;j}\right)A^i_\mu+\frac{\alpha}{2}\gamma_{jk;\mu}A^{i\mu} .$$

Видно, что вертикальная составляющая ковариантной производной вектора по внутренним индексам будет зависеть только от вертикальной составляющей (у вектора B^A вертикальная составляющая равна B^i) тогда и только тогда, когда A^i_μ – вектор Киллинга:

$$B_{i|j} = B_{i,j} - \left(\begin{smallmatrix} k \\ ij \end{smallmatrix}\right) B_k - \left(\begin{smallmatrix} \mu \\ ij \end{smallmatrix}\right) B_\mu = B_{i;j} \Rightarrow \left(\begin{smallmatrix} \mu \\ ij \end{smallmatrix}\right) \equiv 0 \Rightarrow A^\mu_{i;j} + A^\mu_{j;i} = 0.$$

Рассмотрим теперь скаляр кривизны R, образованный из метрики g_{AB}. Довольно громоздкие вычисления показывают, что он равен: $R = R^{(\mu)}(x) + (1/\beta) \cdot R^{(i)}(\phi) - \alpha^2/(4\beta) \cdot F^i_{\mu\nu} F_i^{\mu\nu}$,

где $R^{(\mu)}$ – кривизна M, $R^{(i)}$ – кривизна однородного пространства В, которая равна к/4 для полупростой группы G.

Комбинируя выражения для действия гравитационного и калибровочного полей, имеем:

$$S = -\int_M d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{c}{2\varkappa} (R + 2\lambda) + \frac{1}{16\pi c} F^a_{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} \right],$$

где $\varkappa = (8\pi\gamma)/c^2$ – эйнштейновская гравитационная постоянная, λ – космологический член, $\tilde{g} = \det g_{\mu\nu}$.

Из такого действия получается следующее выражение для тензора энергии-импульса калибровочного поля:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F_\mu^{\lambda a} F_{\lambda\nu a} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_a^{\lambda\delta} F^a_{\lambda\delta} \right).$$

(Интересно, что его след $T^{\mu}_{\cdot\mu}$ тождественно равен нулю только в четырёхмерном пространстве-времени).

Для определения метрики $g_{\mu\nu}(x)$ имеем уравнения Эйнштейна:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{\varkappa}{c^2} \cdot T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \cdot \lambda.$$

Калибровочное поле $A^a_\mu(x)$ удовлетворяет уравнению Янга–Миллса в присутствии гравитации: $F^{\mu\nu}_{a\,;\nu} - g f_{abc} A^b_\nu F^{\mu\nu c} = 0$.

Если мы возьмём в качестве действия нашей системы выражение

$$S = -(\mu/2) \cdot \int_M d^n x\, d^k\phi \sqrt{-\det(g_{AB})} (R + 2\lambda'),$$

где μ – положительная постоянная, λ' – "космологический" член расслоения, то, после интегрирования по ϕ, получим:

$$S = -\frac{\mu}{2}\beta^{\kappa}\int\limits_{M} d^{n}x\sqrt{-\tilde{g}}\left(R^{(\mu)} + 2\lambda' + \frac{\kappa}{4\beta} - \frac{\alpha^{2}}{4\beta}\cdot F^{\mu\nu a}F^{\,b}_{\mu\nu}\, g_{ab}\right),$$

где $g_{ab} = \int\limits_{B} d^{\kappa}\phi\,\sqrt{\det(\gamma_{ij})}\,K^{e}_{a}(\phi)\cdot K_{be}(\phi)$ –инвариантная метрика на группе G. Для простой группы G – $g_{ab} = -f^{\,c}_{ad}\, f^{\,d}_{bc}$.

Таким образом, имеем эйнштейновское действие с космологическим членом и янг-миллсовский лагранжиан в искривлённом, вообще говоря, пространстве-времени с метрикой $g_{\mu\nu}(x)$. Это действие дает обычные уравнения движения для $g_{\mu\nu}(x)$ и $A^{a}_{\mu}(x)$ при таком выборе постоянных $\alpha, \beta, \mu, \lambda'$: $g = \alpha/\beta$, $\alpha = -\varkappa/(8\pi g c^{2})$,

$$\beta = -\varkappa/(8\pi g^{2}c^{2}),\ \mu = \frac{c}{\varkappa}(8\pi g^{2}c^{2}/\varkappa)^{\kappa/2},\ \lambda' = \lambda - \kappa\pi g^{2}c^{2}/\varkappa.$$

Отметим, что если космологический член в расслоении отсутствует, то, если взять $g \sim 1$, в пространстве-времени появляется аномально большой космологический член: $\lambda \sim 1\,км^{-2}$.

Если G не полупростая группа, то $R^{(i)} \neq \kappa/4$, а есть функция ϕ. Но интеграл $\int\limits_{B} d^{\kappa}\phi\sqrt{\det(\gamma_{ij})}\,R^{(i)}(\phi) = \kappa'/4$ –постоянная величина, где κ', не целое число и, в частности, может равняться нулю.

Таким образом, видно, что калибровочное поле $A^{a}_{\mu}(x)$ получается как комбинация коэффициентов метрики $n+к$ – мерного пространства с группой симметрии G, которая осталась после нарушения общековариантной группы преобразований $n+к$ – мерного псевдориманового многообразия $M^{n+\kappa}$.

Введение структуры расслоения E на $M^{n+\kappa}$ соответствует некоторому варианту спонтанного нарушения симметрии: из группы всех преобразований $M^{n+\kappa}$ "выживает" только группа G. При этом предполагается, что физическое решение, например,вакуумное, должно локально иметь симметрию $U \times G/H$, где $U \subset M^n$ – координатная окрестность в М.

Автор выражает благодарность проф. С.Г. Матиняну за постановку задачи и ценные замечания, а также А.Г. Седракяну за многочисленные плодотворные обсуждения.

Дополнение I.

Производная Ли L_K в направлении вектора K^i определяется для любых геометрических объектов. Нам понадобится её определение только для скаляров, векторов и ковариантных тензоров второго ранга: $L_K \varphi = \varphi_{,i} K^i$ – для скаляров (см. (4), где $g_{\mu\nu}$ – скаляр по внутренним индексам), $L_K A = [K, A]$ – для вектора (см. (3), где $[K, A]$ – коммутатор векторных полей, имеющий в компонентах вид: $[K, A]^i = K^j A^i_{,j} - A^j K^i_{,j}$),

$$L_K \gamma_{ij} = \gamma_{ik} K^k_{,j} + \gamma_{kj} K^k_{,i} + \gamma_{ij,k} K^k \text{(см. (2))}.$$

Дополнение 2.

Докажем свойство (5): Вычислим $C = g_{AB} M^A M^B$, где $M^A = (M^\mu, M^i)$. $C = g_{\mu\nu} M^\mu M^\nu + \gamma_{ij}(M^i + A^i_\mu M^\mu)(M^j + A^j_\nu M^\nu)$ (α и β для простоты не выписываем). Тогда, введя новые переменные $N^A = (N^\mu, N^i)$, где $N^\mu = M^\mu$, $N^i = M^i + A^i_\mu M^\mu$, имеем $C = g_{\mu\nu} N^\mu N^\nu + \gamma_{ij} N^i N^j$. В новых переменных $N^A g'_{AB}$ имеет блочно-диагональный вид: $C = g'_{AB} N^A N^B$, $g'_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \gamma_{ij} \end{pmatrix}$.

Для этого случая известно, что $\det(g'_{AB}) = \det(g_{\mu\nu}) \cdot \det \gamma_{ij}$.

Но переход $M^A \to N^A$ имеет единичный определитель:

$$\begin{pmatrix} N^\mu \\ N^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^{(n)} & 0 \\ A^i_\mu & I^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M^\mu \\ M^i \end{pmatrix} \Longleftrightarrow N^A = \varphi^A_B M^B, \quad \varphi^A_B = \begin{pmatrix} I^{(n)} & 0 \\ A^i_\mu & I^{(k)} \end{pmatrix},$$

$$\det(\varphi^A_B) = 1, \quad g_{AB} = g'_{CD} \varphi^C_A \varphi^D_B.$$

Следовательно, $\det(g_{AB}) = \det(g'_{AB}) \cdot [\det(\varphi^{c}{}_{b})]^2 = \det(g'_{AB}) = \det g_{\mu\nu} \cdot \det \gamma_{i}$.

Отметим, что наш случай является обобщением случая из [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Witten E. Harvard preprint (1980)

2. Коноплёва Н.П., Попов В.Н. Калибровочные поля. М.1980, с.I45.

3. Yang C.N., Mills R.L Phys.Rev., 1954, vol.96, p.191

4. Славнов А.А., Фадеев Л.Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей, М. 1978, Связность в расслоениях в современной формулировке появилась в работе: Ehresmann. Coll.top. Bruxelles, 1950, p.29.

5. Яно К., Бохнер С., Кривизна и числа Бетти. М. 1957,

6. Ландау Л.Д. Теория поля. М.1973, т.2.

Рукопись поступила 22 декабря 1981 г.

Редактор Л.П.Мукаян
Тех.редактор А.С.Абрамян

Заказ I44 ВФ-03690 Тираж 299

Препринт ЕФИ Формат издания 60x84/I6
Подписано к печати 5/IУ-82г. I,0 уч.изд.л. Ц. 7 к.

Издано Отделом научно-технической информации
Ереванского физического института, Ереван-36, пер.Маркаряна 2