

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЕФИ-531(18)-82

Շ.Տ.ԵՐԵՄՅԱՆ, Ա.Յ.ՆԱԶԱՐՅԱՆ

РЕДЖЕОННАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ ПРИ $D = 2$

ЧАСТЬ 1

ОДНОПЕТЛЕВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

ԵՐԵՎԱՆ 1982 ԵՐԵՎԱՆ

SH.S.EREMYAN, A.E.NAZARYAN

REGGEON FIELD THEORY AT D=2

PART I

ONE-LOOP APPROXIMATION

A general method of constructing an explicit representation is developed for the pomeron propagator in the presence of additional parameters, such as the pomeron production threshold $\bar{\xi}_0$, momentum transfer \bar{K} or the intercept shift δ_0 . The method is shown to be applicable in both one-loop and two-loop approximations. The obtained general formulae allow to consider the pomeron propagator in both asymptotic region and the region of the perturbation theory applicability, and, besides, they provide the smooth matching of both these regions. The observed values are calculated, and the results connected with asymptotically high energies are being discussed.

Yerevan Physics Institute

Yerevan 1982

Ш.С.ЕРЕМЯН, А.Э.НАЗАРЯН

РЕДЖЕОННАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ ПРИ $D = 2$

ЧАСТЬ I

ОДНОПЕТЛЕВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Разработан общий метод конструирования явного представления для пропагатора померона при наличии дополнительных параметров, таких как порог рождения померона ξ_0 , переданный импульс \vec{K} или смещение интерсепта δ_0 . Показано, что метод применим и в однопетлевом, и в двухпетлевом приближениях. Полученные общие формулы позволяют рассмотреть пропагатор померона в асимптотической области, в области применимости теории возмущений и, кроме того, обеспечивают гладкую сшивку обеих областей. Вычислены наблюдаемые величины и обсуждаются результаты, связанные с асимптотически большими энергиями.

Ереванский физический институт

Ереван 1982

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЕФИ-531(18)-82

Ш.С.ЕРЕМЯН, А.Э.НАЗАРЯН

РЕДКООННАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ ПРИ $D = 2$

ЧАСТЬ I

ОДНОПЕТЛЕВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Ереван 1982

© Ереванский физический институт. 1982

Введение

Реджеонная теория поля (РТП) впервые была сформулирована Грибовым и Мигдалом в работах [1-3]. Дальнейший прогресс в этой области был достигнут в работах Мигдала, Полякова и Гер-Мартirosяна [4], Абарбанела и Бронзана [8,9]. В этих работах исследовалось инфракрасное поведение РТП с использованием метода ренормализационной группы и ϵ - разложения [7]. Было видно, что при этом можно получить асимптотическое поведение функций Грина и других величин, представляющих физический интерес. В дальнейшем этот метод был развит в работах [10-15]. В работе Шутара и Уайта [11] было показано, что если померонная сингулярность имеет интерсепт, равный единице, то РТП не может быть перенормирована в каждом порядке теории возмущений, однако, несмотря на это, могут быть получены интегральные представления для пропагатора померона и перенормирующего интерсепт контрчлена. В дальнейшем последовала большая серия статей, посвященных этой проблеме (см. обзор [18] и работы, цитированные в нем).

Во всех этих работах содержался один существенный недоста-

ток — все вычисления проводились при размерности пространства $D = 4 - \epsilon$, после чего делалось разложение по степеням $\epsilon \approx 0$ и далее делалось аналитическое продолжение к физическому значению $\epsilon = 2$. После проведения расчетов в двухпетлевом приближении [26–33] стало очевидным, что разложение по степеням ϵ является очень плохо сходящимся рядом и поэтому полученные значения для критических показателей вызвали большие сомнения.

Альтернативным подходом является прямое вычисление всех диаграмм теории непосредственно — при $D = 2$, которое, однако, сталкивается с большими трудностями. Как было показано в [12], здесь существуют две различные возможности.

Самым простым было бы прямо применить метод, описанный в [4, 8–15] к теории возмущений при $D = 2$, и следить за тем, чтобы конечные результаты имели бы физический смысл. При этом, мы сразу натолкнулись бы на инфракрасную проблему, связанную с условием единичности интерсепта померона, которая становится серьезным препятствием при $D = 2$, и приводит к тому, что стандартная теория возмущений становится неприменимой [11]. Обычная последовательность действий, изложенная в работах [8–15], может быть в принципе применена в первом порядке теории возмущений [19], тогда удастся избежать неопределенностей и приближений, связанных с ϵ — разложением. Однако, при этом, приходится ограничиваться однопетлевым приближением, что очень серьезно ограничивает возможности метода. С другой стороны, как было показано в [11], если использовать полученный при этом пропагатор для вычислений в следующих порядках теории возмущений, никаких проблем, связанных с расходимостями, не возникает, и эта

процедура может быть повторена любое число раз. На этом пути действительно можно построить полную двухмерную теорию, и в данной работе именно это мы попытаемся сделать.

Другой способ был предложен в работе Даша и Харрингтона [27]. В их работе все расчеты проводятся в предположении, что интересит померона меньше единицы, что приводит к появлению в теории "массовых" членов. Такая процедура была проведена в работах [27-29], полученные при этом критические показатели были того же порядка, что и в ξ - разложении. Результаты оказались чувствительными к нормировочной точке, выбранной для перенормировки ультрафиолетовой расходимости теории. Однако от нормировочной точки не должна зависеть сумма всех порядков теории возмущений, а не первых нескольких членов [8].

Кроме инфракрасной проблемы, при $D = 2$, уже в однопетлевом приближении возникает ультрафиолетовая проблема, связанная с расходимостью интегралов по переданному импульсу на верхнем пределе, которая в теории с $D = 4 - \epsilon$ устраняется при помощи размерной регуляризации. Эта проблема носит чисто формальный характер, так как хорошо известно [16,17], что в реальной РТТ существуют пороги рождения реджеонов. Минимально возможная разность рапидити вдоль реджеона определяется порогом рождения $\xi_0 = \varrho_n(M^2/S_0) \approx 2$. Поэтому возникает необходимость учета пороговых эффектов в РТТ. Как было показано в работах [19,34-36], учет порогов не должен влиять на асимптотическое поведение критических показателей, но их введение оказывается полезным для проведения гладкой сшивки теоретико-возмущенческого и асимптотического решений. Кроме того, они облегчают проведение теоре-

тико-возмущенческих расчетов при $D = 2$, устраняя ультрафиолетовые расходимости теории (см. работу [36]).

В предлагаемой работе проводится обзор современного состояния реджеонной теории поля (РТП), при физической размерности переданного поперечного импульса $D = 2$. Приводятся оригинальные результаты, впервые полученные в данной работе. Разработан общий метод конструирования явного представления для пропагатора померона, при наличии дополнительных параметров, таких, как порог рождения померона ξ_0 , переданный импульс \bar{k} или смещение интерсепта δ_0 . Показано, что метод применим и в однопетлевом, и в двухпетлевом приближениях.

Полученные общие формулы позволяют рассмотреть пропагатор померона и в асимптотической области, и в области применимости теории возмущений, и, кроме того, обеспечивают гладкую сшивку обеих областей. Впервые получены формулы для вычисления дифференциальных сечений в двухпетлевом приближении.

Первая глава является обзорной и посвящена в основном обоснованию применимости ренормгруппового подхода к РТП при $D = 2$. Во второй главе описан способ введения в РТП дополнительных безразмерных параметров. В дополнение к результатам работ [13-15] нами внесены еще два новых параметра: ξ_0 и δ , которые существенно усложнили картину.

Третья глава посвящена однопетлевому приближению в РТП, она частично носит обзорный характер и содержит несколько новых результатов (например, формулу для "точного" однопетлевого пропагатора (3.87)).

Четвертая глава посвящена двухпетлевому приближению в РТП и целиком содержит оригинальные результаты.

I. Реджеонная теория поля и ренормгруппа

Реджеонная теория поля (РТП) впервые была сформулирована в работах Грибова и Мигдала [1-3].

В этой теории реджеоны трактуются как квазичастицы и связываются с полем, имеющим две пространственные и одну "временную" размерности. Пространственные переменные сопряжены с переданным импульсом \vec{K} , а "время" с "энергией" $E = 1 - j = -\omega$, где j - комплексный угловой момент. Реджеоны удовлетворяют следующему уравнению движения

$$E = 1 - \alpha_0(-\vec{K}^2), \quad (I.1)$$

где $\alpha_0(-\vec{K}^2)$ - затравочная траектория реджеона.

В дальнейшем будет рассматриваться только поперонная особенность, затравочная траектория которой предполагается линейной и имеющей вид

$$\alpha_0(-\vec{K}^2) = \alpha_0(0) + \alpha_0' \vec{K}^2. \quad (I.2)$$

Тогда, согласно работам [1-3], плотность свободного лагранжиана задается в форме

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(\vec{x}, t) = & \frac{i}{2} \psi_0^+(\vec{x}, t) \frac{\partial}{\partial t} \psi_0(\vec{x}, t) - \alpha_0' \vec{\nabla} \psi_0^+(\vec{x}, t) \vec{\nabla} \psi_0(\vec{x}, t) - \\ & - \delta_0 \psi_0^+(\vec{x}, t) \psi_0(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (I.3)$$

Здесь $\psi_0(\vec{x}, t)$ - затравочное поперонное поле и $\delta_0 = 1 - \alpha_0(0)$ - затравочная щель четверсепта поперона.

Плотность лагранжиана взаимодействия является неэрмитовой и берется в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I(\vec{x}, t) = & \frac{1}{2} i \tau_0 [\psi_0^+(\vec{x}, t) \psi_0(\vec{x}, t)^2 + \psi_0^+(\vec{x}, t)^2 \psi_0(\vec{x}, t)] + \\ & + \delta \Delta \psi_0^+(\vec{x}, t) \psi_0(\vec{x}, t), \end{aligned} \quad (I.4)$$

где ζ_0 – затравочная трехмерная вершина, являющаяся чисто действительной величиной. $\delta\Delta$ – контрчлен, перенормирующий интерсепт. Он должен быть устроен таким образом, чтобы щель интерсепта δ_0 имела бы свое физическое значение.

Лагранжиан (I.4) в том смысле описывает движение померона, что теория возмущений для него по кубическому (антиэрмитовому) взаимодействию в точности воспроизводит вклады всех усиленных реджеонных графиков Грибова для функции Грина. Такие квантово-механические величины, как энергия основного состояния или ψ -функция не имеют в этой задаче физического смысла. Поправки от неусиленных графиков, существенные при низких энергиях, могут быть учтены путем введения поправочных членов в определение парциальной волны и были рассмотрены в работах [4-6].

Как было показано в работе [7], в лагранжиане (I.4) достаточно оставить только трехчастичные вершины, так как они могут генерировать и вершины более высокого порядка, поэтому введение затравочных вершин высших порядков не должно изменить масштабное поведение, и критические показатели не должны зависеть от того, какие затравочные вершины будут сохранены в теории. Другими словами, в теории с одной константой связи (трехмерной вершиной) масштабное поведение будет таким же, как и в теории с добавлением других затравочных констант (например, четырехмерной).

Следуя работам [8-10] определим размерные величины теории

$$[x] = K^{-1}, \quad [t] = E^{-1} \quad (I.5)$$

и

$$\left[\int d^D x dt \mathcal{L} \right] = 1. \quad (I.6)$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned}
 [\psi] &= K^{D/2} \\
 [\alpha_0] &= E K^{-2} \\
 [\delta_0] &= E \\
 [\tau_0] &= E K^{-D/2}
 \end{aligned}
 \tag{I.7}$$

Функция Грина для n - входящих и m - выходящих померонов определится как

$$G^{(n,m)}(\vec{x}_i, t_i; \vec{y}_j, \tau_j) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \langle 0 | T \psi^\dagger(\vec{y}_j, \tau_j) \psi(\vec{x}_i, t_i) | 0 \rangle. \tag{I.8}$$

Преобразование Фурье для функции Грина примет вид

$$\delta(\sum E) \delta^D(\sum \vec{K}) G^{(n,m)}(E_i, \vec{K}_i) = \int \prod_{i=1}^n d^D x_i dt_i e^{i(E_i t_i - \vec{K}_i \vec{x}_i)} \cdot \prod_{j=1}^m d^D y_j d\tau_j e^{-i(E_j \tau_j - \vec{K}_j \vec{y}_j)} G^{(n,m)}(\vec{x}_i, t_i; \vec{y}_j, \tau_j). \tag{I.9}$$

Правила Фейнмана для $G^{(n,m)}(E_i, \vec{K}_i)$ будут иметь следующий вид [8,9] :

1. Рассматриваются все топологически различные графы со стрелками, указывающими направление распространения реджеона.

2. Проводится интегрирование $\int d^D K dE_K$ вдоль каждой петли.

3. Каждой голой трехреджеонной вершине ставится в соответствие множитель

$$z_0 / (2\pi)^{(D+1)/2}. \tag{I.10}$$

4. Каждому померону с импульсом \vec{K} и энергией E соответствует затравочный пропагатор

$$G_0^{1,1}(E, \vec{K}) = \frac{i}{E - \alpha_0 K^2 - \delta_0 + i\epsilon} \tag{I.11}$$

5. Каждая замкнутая двухпомеронная петля умножается на $1/2$.

6. Учитывается закон сохранения энергии и импульса в каждой вершине.

Простой подсчет степеней показывает, что РТТ является суперперенормируемой теорией (см. напр. [8, 9]).

Неперенормированная связная неприводимая вершинная функция $\Gamma^{n,m}$ теперь определится в виде ампутированной связной части от $G^{n,m}$:

$$\Gamma^{n,m}(E_i, \vec{K}_i) = \prod_{e=1}^{n+m} [G^{1,1}(E_e, \vec{K}_e)]^{-1} G_e^{n,m}(E_i, \vec{K}_i). \quad (1, 12)$$

Вершинная функция $\Gamma^{n,m}$ зависит также от неперенормированных параметров α'_0 , δ_0 и τ_0 . Перенормированная неприводимая вершинная функция $\Gamma_R(E_i, \vec{K}_i; \alpha', \tau, \delta; E_N)$ зависит от перенормированных значений α' , δ и τ и от точки нормировки E_N , $E_N = -E$, которая выбирается как точка, где определены τ , α' и δ , при помощи условий на соответствующие вершинные функции Γ_R . Нормировка определяется таким образом, чтобы нормировочная точка находилась бы далеко от сингулярностей теории возмущений, т.е.

$E_N > 0$. τ , α' и δ будут функциями от E_N . Можно показать [10], что изменения E_N приводят к конечным перенормировкам и, следовательно, к конечным изменениям в τ , α' , δ и в Γ_R .

Необходимо отметить, что в РТТ физический смысл имеют затравочные константы τ_0 , α'_0 , так как именно они могут быть определены из экспериментальных данных при существующих энергиях, а перенормированные величины τ , α' , ... приобретают физический смысл только при бесконечно больших энергиях. Поэтому, все результаты, полученные из РТТ для перенормированных величин, должны быть переформулированы для голых величин. Этим обстоятельством РТТ радикально отличается от обычных теорий поля, таких, как КЭД или КХД, где на эксперименте измеряются именно пе-

ренормированные заряды и массы, а не их затравочные значения.

Кроме того, так как физическая функция Грина в (Y, t) - представлении определяется при помощи преобразования Зоммерфельда-Ватсона от пропагатора в (E, t) - представлении

$$F(Y, K^2) = -\frac{1}{2\pi i} \int_1^{\infty} [i\Gamma^{1,1}(E, K^2)]^{-1} e^{-EY} dE, \quad (I.13)$$

(где $Y = \ell\pi(S/S_0)$ - быстрота), то физической асимптотике $Y \rightarrow \infty$ соответствует инфракрасный предел $E \rightarrow 0$ в РТД. Поэтому, когда в дальнейшем мы будем говорить об асимптотике, то при этом всегда будем подразумевать предел $E \rightarrow 0$.

Для получения интегрального представления пропагатора померона необходимо произвести перенормировку волновой функции, константы связи, α' и δ . Введем перенормированный оператор поля померона

$$\psi(\vec{x}, t) = Z_3^{-1/2} \psi_0(\vec{x}, t). \quad (I.14)$$

Тогда плотность лагранжиана (I.3) и (I.4) может быть переписана в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_R = & \frac{i}{2} Z_3 [\psi^\dagger \frac{\partial}{\partial t} \psi] - Z_3 Z_2 \alpha' \vec{\nabla} \psi^\dagger \vec{\nabla} \psi - Z_3 Z_6^{-1} \delta \psi^\dagger \psi - \\ & - \frac{i}{2} Z_7 Z [\psi^\dagger \psi^2 + \psi^{*2} \psi] + Z_3 \delta \Delta \psi^\dagger \psi. \end{aligned} \quad (I.15)$$

Отсюда сразу можно сделать вывод, что лагранжиан обладает ренорм-групповой инвариантностью. Здесь Z_i - являются константами перенормировки соответствующих величин

$$\begin{aligned} \alpha' &= Z_2^{-1} \alpha'_0, \\ \delta &= Z_6 \delta_0, \\ Z &= Z_3^{3/2} Z_7^{-1} Z_0. \end{aligned} \quad (I.16)$$

Из выражения для ампутированной функции Грина (I.12) имеем

$$\Gamma_R^{n,m}(E_i, K_i; \alpha', \delta, \tau; E_N, K_N^2) = Z_3^{(n+m)/2} \Gamma^{n,m}(E_i, K_i; \alpha'_0, \delta_0, \tau_0) \quad (I.17)$$

Константы перенормировки Z_i определяются из следующих условий на перенормированный пропагатор и вершинную функцию:

$$i \Gamma_R^{1,1}(E, K^2) \Big|_{E=K^2=0} = 0, \quad (I.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial E} i \Gamma_R^{1,1}(E, K^2) \Big|_{\substack{E=-E_N \\ K^2=K_N^2}} = 1, \quad (I.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial K^2} i \Gamma_R^{1,1}(E, K^2) \Big|_{\substack{E=-E_N \\ K^2=K_N^2}} = -\alpha', \quad (I.20)$$

$$\delta \frac{\partial}{\partial \delta} i \Gamma_R^{1,1}(E, K^2) \Big|_{\substack{E=-E_N \\ K^2=K_N^2}} = -\delta, \quad (I.21)$$

$$\Gamma_R^{1,2}(E_1, E_2, E_3; \vec{K}_1, \vec{K}_2, \vec{K}_3) \Big|_{\substack{E_1=2E_2=2E_3=-E_N \\ \vec{K}_1=2\vec{K}_2=2\vec{K}_3=\vec{K}_N}} = \frac{\tau}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (I.22)$$

Условие (I.18) требует, чтобы интересит перенормированного поперона лежал при $j = 1$, т.е. оно связывает между собой величины $\delta_0, \delta\Delta, \tau$ и α' . Условие (I.19) служит определением функции Z_3 , а (I.20)-(I.22) - определяют перенормированные α', δ и τ .

Согласно (I.7) безразмерную константу связи при $D = 2$ можно определить следующим образом

$$g_{\delta_0}(E_N) = \frac{\tau_0}{\sqrt{\alpha'_0 E_N}}, \quad (I.23)$$

$$g(E_N) = \frac{\tau}{\sqrt{\alpha' E_N}}.$$

Кроме того, появятся еще и дополнительные безразмерные величины

$$h = \frac{\alpha' K_N^2}{E_N}; \quad h_0 = \frac{\alpha'_0 K_N^2}{E_N}; \quad (I.24)$$

$$\rho = \frac{4\delta}{E_N} ; \quad \rho_0 = \frac{4\delta_0}{E_N} .$$

Из уравнений (I.15) и (I.23) следует, что q и q_0 связаны между собой следующим соотношением

$$q = Z_q q_0 , \quad (I.25)$$

где

$$Z_q = Z_3^{3/2} Z_2^{1/2} Z_1^{-1} . \quad (I.26)$$

Используя уравнения (I.17) и (I.18)–(I.22) можно получить уравнения, определяющие константы перенормировки:

$$Z_3^{-1} = \frac{\partial i \Gamma^{1,1}}{\partial E} \Big|_{\substack{E = -E_N \\ K^2 = K_N^2}} , \quad (I.27)$$

$$Z_2^{-1} = -\frac{1}{\alpha_0} Z_3 \frac{\partial i \Gamma^{1,1}}{\partial K^2} \Big|_{\substack{E = -E_N \\ K^2 = K_N^2}} , \quad (I.28)$$

$$Z_6 = -Z_3 \frac{\partial}{\partial \delta_0} i \Gamma^{1,1} \Big|_{\substack{E = -E_N \\ K^2 = K_N^2}} , \quad (I.29)$$

$$Z_1^{-1} = \frac{(2\pi)^{3/2}}{z_0} \Gamma^{1,2} \Big|_{E=2E_0=2E_2=-E_N; \vec{K}=2\vec{K}_1=2\vec{K}_2=\vec{K}_N} . \quad (I.30)$$

Отметим, что константы перенормировки могут быть функциями только от безразмерных параметров (I.23)–(I.24). Во всех этих выражениях E_N и K_N^2 являются произвольной точкой нормировки, поэтому, в дальнейшем, все результаты будут рассматриваться как функции от этой произвольной точки.

Следуя работам [8–12] проведем размерный анализ для $\Gamma_R^{n,m}$. При $D = 2$, $\Gamma_R^{n,m}$ имеет следующую размерность

$$[\Gamma_R^{n,m}] = E K^{2-(n+m)} \quad (I.31)$$

Следовательно

$$\Gamma_R^{n,m}(E_i, \vec{K}_i; \alpha', \delta; g; E_N, K_N^2) = E_N \left(\frac{E_N}{\alpha'} \right)^{1 - \frac{n+m}{2}} \Psi_{n,m} \left(\frac{E_i}{E_N}, \right. \\ \left. \frac{\alpha'}{E_N} \vec{K}_i \cdot \vec{K}_j, \frac{\delta}{E_N}, g; \frac{\alpha' K_N^2}{E_N} \right), \quad (I.32)$$

где $\Psi_{n,m}$ - безразмерная функция, зависящая от безразмерных параметров. Введем параметр изменения масштаба ξ

$$\Gamma_R^{n,m}(\xi E_i, \vec{K}_i; \alpha', \delta; g; E_N, K_N^2) = \xi \frac{E_N}{\xi} \left(\frac{E_N/\xi}{\alpha'/\xi} \right)^{1 - \frac{n+m}{2}} \cdot \Psi_{n,m} \left(\frac{E_i}{E_N/\xi}, \frac{\alpha'/\xi}{E_N/\xi} \vec{K}_i \cdot \vec{K}_j, \frac{\delta/\xi}{E_N/\xi}, g; \frac{\alpha'/\xi}{E_N/\xi} K_N^2 \right). \quad (I.33)$$

Отсюда сразу получаем, что

$$\Gamma_R^{n,m}(\xi E_i, \vec{K}_i; \alpha', \delta; g; E_N, K_N^2) = \xi \Gamma_R^{n,m} \left(E_i, \vec{K}_i; \frac{\alpha'}{\xi}, \frac{\delta}{\xi}; g; \frac{E_N}{\xi}, K_N^2 \right). \quad (I.34)$$

Уравнение ренормгруппы для $\Gamma_R^{n,m}$ получается из того факта, что $\Gamma^{n,m}$ не должно зависеть от E_N и K_N^2 , т.е.

$$E_N \frac{\partial}{\partial E_N} \Gamma^{n,m} = 0 \quad \text{и} \quad K_N^2 \frac{\partial}{\partial K_N^2} \Gamma^{n,m} = 0. \quad (I.35)$$

В простом случае, когда $K_N^2 = \delta = 0$, получается следующее ренормгрупповое уравнение [8,9]

$$\left[E_N \frac{\partial}{\partial E_N} + \beta_E(g) \frac{\partial}{\partial g} + \zeta_E(\alpha', g) \frac{\partial}{\partial \alpha'} - \frac{(n+m)}{2} \gamma_E(g) \right] \cdot \Gamma_R^{n,m}(E_i, \vec{K}_i; g, \alpha', E_N) = 0, \quad (I.36)$$

где ренормгрупповые функции определены следующим образом

$$\gamma_E(g) = E_N \frac{\partial}{\partial E_N} \ln Z_3(\alpha', z_0, E_N) \Big|_{\alpha', z_0}, \quad (I.37)$$

$$\zeta_E(\alpha', q) = E_N \frac{\partial}{\partial E_N} \alpha'(E_N) \Big|_{\alpha'_0, z_0}, \quad (I.38)$$

$$\beta_E(q) = E_N \frac{\partial}{\partial E_N} q(E_N) \Big|_{\alpha'_0, z_0}. \quad (I.39)$$

Для пропагатора с измененным масштабom получим

$$\left\{ \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \beta_E(q) \frac{\partial}{\partial q} + [\alpha' - \zeta_E(\alpha', q)] \frac{\partial}{\partial \alpha'} + \left[\frac{1}{2}(n+m)\chi_E(q) - 1 \right] \right\} \cdot \Gamma_R^{n,m}(\xi E_i, \vec{K}_i; q, \alpha'; E_N) = 0. \quad (I.40)$$

Это уравнение показывает, каким образом изменения импульса вершинной функции должны быть скоррелированы с изменениями безразмерной перенормированной константы связи и перенормированного наклона, чтобы при этом физическое содержание теории было бы независимым от выбора точки нормировки, в которой они определены.

Это уравнение решается следующим способом [10].

Определим переменную $t = \ln \xi$ и двухвектор $\vec{V}(q) = [-\beta(q), \alpha' - \zeta(q)]$

Тогда уравнение (I.40) примет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}(q) \vec{\nabla} \right) \Gamma_R^{n,m}(e^t E_i, \vec{K}_i; q, \alpha'; E_N) = D_{n,m}(q) \Gamma_R^{n,m}(e^t E_i, \vec{K}_i; q, \alpha', E_N),$$

где

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial q}, \frac{\partial}{\partial \alpha'} \right)$$

и

$$D_{n,m} = -\frac{1}{2}(n+m)\chi(q) + 1.$$

Введем некоторые вспомогательные величины $\tilde{q}(t)$ и $\tilde{\alpha}'(t)$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{q}(t)}{dt} &= -\beta(\tilde{q}(t)), \\ \frac{d\tilde{\alpha}'(t)}{dt} &= \tilde{\alpha}'(t) - \zeta(\tilde{\alpha}'(t), \tilde{q}(t)), \end{aligned} \quad (I.41)$$

тогда можно написать, что

$$\left[\frac{d}{dt} - D_{n,m}(\tilde{q}(t)) \right] \Gamma_R^{n,m}(e^t E_i, \tilde{K}_i; \tilde{q}(-t), \tilde{\alpha}'(-t), E_N) = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} & \Gamma_R^{n,m}(\xi E_i, \tilde{K}_i, q, \alpha', E_N) = \\ & = \Gamma_R^{n,m}(E_i, \tilde{K}_i, \tilde{q}(-t), \tilde{\alpha}'(-t), E_N) \exp \int_{-t}^0 dt' \left[1 - \frac{1}{2}(n+m) \chi(\tilde{q}(t')) \right], \end{aligned} \quad (I.42)$$

при следующих граничных условиях

$$\begin{aligned} \tilde{q}(t=0) &= q, \\ \tilde{\alpha}'(0) &= \alpha'. \end{aligned} \quad (I.43)$$

Уравнение (I.42) является главным результатом ренормгруппового анализа. Оно показывает, как перенормированная вершинная функция $\Gamma_R^{n,m}$ изменяется в пространстве импульсов (при изменении $\xi = e^t$) в терминах эффективной константы связи $\tilde{q}(t)$ и эффективного наклона $\tilde{\alpha}'(t)$.

Для практического использования уравнения ренормгруппы необходимо решить нелинейные дифференциальные уравнения (I.41).

При этом надо придерживаться следующей программы действий [10]:

- а) определить $\beta(q)$ из теории возмущений при $q \approx 0$,
- б) решив уравнение (I.41) для $\tilde{q}(t)$, найти ту область t , где \tilde{q} достаточно мало,

в) показать для получения самосогласованного решения проблемы, что при таких t , $\beta(\tilde{q}(t))$, определенное из теории возмущений, является достаточно точной.

Прежде чем перейти к конкретным вычислениям, рассмотрим некоторые свойства уравнения для $\tilde{q}(t)$. Ключевым пунктом является существование нуля $\beta(q)$ - функции. Если $\beta(q)$ имеет

нуль при $q = q_1$, то когда $\tilde{q}(t)$ стремится к q_1 , $d\tilde{q}/dt$ будет стремиться к нулю и \tilde{q} так и останется в этой окрестности q_1 .

Предположим, что $\beta(q)$ в окрестности q_1 можно представить в виде

$$\beta(q) = \beta_1(q - q_1). \quad (I.44)$$

В решение ренормгруппового уравнения входит величина $\tilde{q}(-t)$, которая примет вид

$$\tilde{q}(-t) = q_1 + (q - q_1) e^{\beta_1 t}. \quad (I.45)$$

Если $\beta_1 > 0$, тогда при $t \rightarrow -\infty$, т.е. в инфракрасном пределе, получим $\tilde{q}(t) \rightarrow q_1$. Если $\beta_1 < 0$, тогда при $t \rightarrow \infty$, т.е. в ультрафиолетовом пределе, получим $\tilde{q}(-t) \rightarrow q_1$. Отсюда следует главное свойство $\beta(q)$ - функции: ультрафиолетовый предел определяется простым нулем $\beta(q)$ при $\beta'(q_1) < 0$, и инфракрасный предел определяется простым нулем $\beta(q)$ при $\beta'(q_1) > 0$. Если положение нуля q_1 таково, что q_1 мало, то можно использовать теорию возмущений для определения ультрафиолетового или инфракрасного пределов теории поля.

В РТН имеет смысл только инфракрасный предел, поэтому масштабное выражение для $\Gamma_R^{n,m}$, получаемое из уравнения (I.42), будет рассматриваться при $\xi \rightarrow 0$ или $t \rightarrow -\infty$. В этом пределе должно быть $\tilde{q}(-t) \rightarrow q_1$, где $\beta(q_1) = 0$ и $\beta'(q_1) > 0$.

Предположим, что РТН инфракрасно стабильная теория, т.е. β - функция имеет нуль при $q = q_1$, и $\beta'(q_1) > 0$, и $\tilde{q}(-t) \rightarrow q_1$ при $t \rightarrow -\infty$. Тогда уравнение (I.41) имеет следующее решение [10]

$$\tilde{\alpha}'(-t) = \alpha' \xi^{-z(q_1)}, \quad \text{где } z(q_1) = 1 - \frac{\Sigma(\alpha', q_1)}{\alpha'}, \quad (I.46)$$

и уравнение (I.42) в точке q_1 примет следующий вид:

$$\Gamma_R^{n,m}(\xi E_i, \vec{K}_i, q_1, \alpha', E_N) = \xi^{1 - \frac{1}{2}(n+m)\chi(q_1)} \Gamma_R^{n,m}(E_i, \vec{K}_i, q_1, \alpha' \xi^{-z(q_1)}, E_N). \quad (I.47)$$

Подставляя результаты размерного анализа из уравнений (I.32)–(I.34) в уравнение (I.47), получим

$$\Psi_{n,m}\left(\frac{\xi E_i}{E_N}, \frac{\alpha'}{E_N} \vec{K}_i \cdot \vec{K}_j, q_1\right) = \xi^{1 - \frac{1}{2}(n+m)\chi(q_1) + (2-n-m)z(q_1)} \cdot \Psi_{n,m}\left(\frac{E_i}{E_N}, \frac{\xi^{-z(q_1)}}{E_N} \alpha' \vec{K}_i \cdot \vec{K}_j, q_1\right). \quad (I.48)$$

Можно показать, [10], что

$$\Psi_{n,m}\left(\frac{E_i}{E_N}, \frac{\alpha'}{E_N} \vec{K}_i \cdot \vec{K}_j, q_1\right) = \left(-\frac{E}{E_N}\right)^{1 - \frac{n+m}{2}\chi(q_1) + (2-n-m)z(q_1)} \Phi_{nm}\left(\frac{E_i}{E}, \left(\frac{E}{E_N}\right)^{-z(q_1)} \frac{\alpha'}{E_N} \vec{K}_i \cdot \vec{K}_j, q_1\right), \quad (I.49)$$

где $E = \sum E_i$.

Из уравнения (I.49) получается главное уравнение ренормгруппы, определяющее функции Грина в РГП

$$\Gamma_R^{n,m}(E_i, \vec{K}_i, \alpha', q_1, E_N) = E_N \left(\frac{E_N}{\alpha'}\right)^{1 - \frac{n+m}{2}} \cdot \left(-\frac{E}{E_N}\right)^{1 - \frac{1}{2}(n+m)\chi(q_1) + (2-n-m)z(q_1)} \Phi_{nm}\left(\frac{E_i}{E}, \left(\frac{E}{E_N}\right)^{-z(q_1)} \frac{\alpha'}{E} \vec{K}_i \cdot \vec{K}_j, q_1\right), \quad (I.50)$$

из которого следует, что вычислив при помощи теории возмущений ренормгрупповые функции χ , ζ и β в точке q_1 , мы получим асимптотическое степенное представление для пропагатора померона.

В (I.50) коэффициент, стоящий перед Φ_{nm} , имеет обычную размерность $\Gamma^{n,m}$, к которой добавлена некоторая дополнительная ве-

личина $-\frac{1}{2}(n+m)\chi(q_1)$. Эта величина называется "аномальной размерностью" теории. Так как $\chi(0) = 0$, то очевидно, что она возникает в результате взаимодействия.

В случае, когда $K_N^2 \neq \delta \neq 0$, задача существенно усложняется - вместо одного уравнения (I.35) возникнут еще два других ренормгрупповых уравнения от дифференцирования по K_N^2 и δ . Тогда вместо трех ренормгрупповых функций (I.37)-(I.39) появится новый набор, содержащий уже 12 ренормгрупповых функций. Константы перенормировок Z_i будут выражаться в виде интегралов от обобщенных β и χ функций в новой обобщенной точке нормировки. Использование обобщенной нормировки ($K^2 = K_N^2 \neq 0$) позволяет получить интегральное представление для пропагатора, дающее возможность вычислить в явном виде масштабную функцию $\Phi_{n,m}$, входящую в уравнение (I.50). Получению этого представления будут посвящены следующие разделы настоящей работы.

2. Реджеонная теория поля при большом количестве параметров

Из уравнения (I.50) для перенормированного обратного пропагатора померона имеем

$$\Gamma_R^{11}(E, K^2, q_1, \alpha', E_N) = E_N \left(-\frac{E}{E_N}\right)^{1-\chi(q_1)} \Phi_{11}\left(\left(-\frac{E}{E_N}\right)^{-z(q_1)} \frac{\alpha' K^2}{E_N}, q_1\right). \quad (2.1)$$

Так как уравнение (2.1) было получено в инфракрасной стабильной точке $q = q_1$, то этот масштабный закон справедлив при любых E и K^2 . Нашей целью является получение явного выражения для функции Φ_{11} .

Мы хотим улучшить результаты предыдущего раздела двумя способами. В уравнениях (I.18)-(I.22) нормировка производилась в

произвольной точке (E_N, K_N^2) , поэтому можно применять ренорм-группу при произвольных изменениях нормировочной точки. Кроме того, необходимо использовать имеющуюся у нас информацию о константах перенормировки, так как знание Z_i позволяет при помощи уравнений (I.27)-(I.30) определить искомый пропагатор [II-15]

Введем еще одно дополнительное усложнение в теорию. Как было показано в работах [I6, I7], в последовательной теории померона необходимо учитывать пороги рождения померонов. Как будет показано в дальнейшем, эти пороги не изменят асимптотического поведения теории, но будут оказывать существенное влияние на предасимптотическую область и на режим перехода к асимптотике. Пороги рождения реджеонов будут учитываться согласно работе [I6], т.е. вместо затравочного пропагатора (I.II) будем вставлять следующий пропагатор:

$$G_0^{1,1} = i \frac{e^{\xi_0(E - \delta_0 - \alpha'_0 K^2)}}{E - \delta_0 - \alpha'_0 K^2 + i \epsilon} \quad (2.2)$$

Тогда полный неперенормированный обратный пропагатор померона примет вид:

$$i \Gamma^{1,1}(E, K^2) = (E - \delta_0 - \alpha'_0 K^2) e^{-\xi_0(E - \delta_0 - \alpha'_0 K^2)} + \delta \Delta - \Sigma(E, K^2). \quad (2.3)$$

При этом, вместо условий (I.I9)-(I.2I) появятся новые условия на перенормированный пропагатор

$$\frac{\partial}{\partial E} i \Gamma_R^{1,1}(E, K^2) \Big|_{\substack{E = -E_N \\ K^2 = K_N^2}} = a_1, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial K^2} i \Gamma_R^{1,1}(E, K^2) \Big|_{\substack{E = -E_N \\ K^2 = K_N^2}} = -\alpha'_0 a_1, \quad (2.5)$$

$$\delta \frac{\partial}{\partial \delta} i \Gamma_R^{11}(E, K^2) \Big|_{\substack{E = -E_N \\ K^2 = K_N^2}} = -\delta a_1, \quad (2.6)$$

где

$$a_1 = \left[1 + \xi_N \left(1 + h + \frac{p}{4} \right) \right] e^{\xi_N \left(1 + h + \frac{p}{4} \right)}. \quad (2.7)$$

Уравнения (2.4)-(2.6) приводят к новой системе уравнений, определяющих константы перенормировок вместо уравнений (I.27)-(I.29)

$$z_3^{-1} = a_1^{-1} \frac{\partial i \Gamma^{11}}{\partial E} \Big|_{\substack{E = -E_N \\ K^2 = K_N^2}} \quad (2.8)$$

$$z_2^{-1} = -\frac{1}{\alpha_0} a_1^{-1} z_3 \frac{\partial i \Gamma^{11}}{\partial K^2} \Big|_{\substack{E = -E_N \\ K^2 = K_N^2}}, \quad (2.9)$$

$$z_\delta = -a_1^{-1} z_3 \frac{\partial i \Gamma^{11}}{\partial \delta} \Big|_{\substack{E = -E_N \\ K^2 = K_N^2}} \quad (I.10)$$

После введения порога ξ_0 , в добавок к уравнению (I.24), появятся еще три дополнительные безразмерные величины

$$\xi_N = \xi_0 E_N; \quad \xi_K = \xi_0 \alpha' K_N^2; \quad \xi_\delta = \xi_0 \delta. \quad (2.II)$$

Для получения ренормгрупповых уравнений в многопараметрической РТГ, надо дифференцировать Γ^{11} по E_N, K_N^2 и δ [14,15].

При этом получается набор из трех ренормгрупповых уравнений, каждое из которых будет определяться четырьмя ренормгрупповыми функциями, имеющими следующий вид [14,15]:

$$\gamma_E = \frac{\partial \ln z_3}{\partial \ln E_N} \Big|_{B_E}; \quad \gamma_K = \frac{\partial \ln z_3}{\partial \ln K_N^2} \Big|_{B_K}; \quad \gamma_\delta = \frac{\partial \ln z_3}{\partial \ln \delta} \Big|_{B_\delta}, \quad (2.I2)$$

$$\tau_E = -\frac{\partial \ln z_2}{\partial \ln E_N} \Big|_{B_E}; \quad \tau_K = -\frac{\partial \ln z_2}{\partial \ln K_N^2} \Big|_{B_K}; \quad \tau_\delta = -\frac{\partial \ln z_2}{\partial \ln \delta} \Big|_{B_\delta}, \quad (2.I3)$$

$$\zeta_E = \frac{\partial \ln z_\delta}{\partial \ln E_N} \Big|_{B_E}; \quad \zeta_K = \frac{\partial \ln z_\delta}{\partial \ln K_N^2} \Big|_{B_K}; \quad \zeta_\delta = \frac{\partial \ln z_\delta}{\partial \ln \delta} \Big|_{B_\delta}, \quad (2.14)$$

$$\beta_E = \frac{\partial g}{\partial \ln E_N} \Big|_{B_E} = -\frac{1}{2} g + g \frac{\partial \ln z_g}{\partial \ln E_N} \Big|_{B_E};$$

$$\beta_K = \frac{\partial g}{\partial \ln K_N^2} \Big|_{B_K} = g \frac{\partial \ln z_g}{\partial \ln K_N^2} \Big|_{B_K}; \quad (2.15)$$

$$\beta_\delta = \frac{\partial g}{\partial \ln \delta} \Big|_{B_\delta} = g \frac{\partial \ln z_g}{\partial \ln \delta} \Big|_{B_\delta},$$

где

$$B = \{z_c, \alpha'_0, \xi_N, \xi_K, \xi_\delta\}. \quad (2.16)$$

$$B_E = \{B, K_N^2, \delta_0\}; \quad B_K = \{B, E_N, \delta_0\}; \quad B_\delta = \{B, E_N, K_N^2\}.$$

Напомним, что константы перенормировки могут зависеть только от безразмерных параметров: в качестве таковых выбираются перенормированные параметры g , h , p и ξ_N , определенные в уравнениях (1.23), (1.24) и (2.11). Для вычисления Z ; надо к уравнениям (2.12)-(2.15) применить цепное правило дифференцирования. Например,

$$\begin{aligned} \chi_E = \frac{\partial \ln z_z(g, h, p)}{\partial \ln E_N} \Big|_{B_E} &= \frac{\partial \ln g}{\partial \ln E_N} \Big|_{B_E} \frac{\partial \ln z_z}{\partial \ln g} \Big|_{B_g} + \\ &+ \frac{\partial \ln h}{\partial \ln E_N} \Big|_{B_E} \frac{\partial \ln z_z}{\partial \ln h} \Big|_{B_h} + \frac{\partial \ln p}{\partial \ln E_N} \Big|_{B_E} \frac{\partial \ln z_z}{\partial \ln p} \Big|_{B_p}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда уравнения (2.12)-(2.15), получаем

$$\chi_E = \frac{\beta_E}{g} \frac{\partial \ln z_z}{\partial \ln g} \Big|_{B_g} + (\tau_E - 1) \frac{\partial \ln z_z}{\partial \ln h} \Big|_{B_h} + (Z_E - 1) \frac{\partial \ln z_z}{\partial \ln p} \Big|_{B_p}. \quad (2.17)$$

Действуя аналогичным образом с χ_k и χ_s , получим систему линейных уравнений относительно частных производных $\ln z_3$,

$$\chi_k = \frac{\beta_k}{g} \frac{\partial \ln z_3}{\partial \ln g} \Big|_{B_g} + (\tau_k + 1) \frac{\partial \ln z_3}{\partial \ln h} \Big|_{B_h} + \zeta_k \frac{\partial \ln z_3}{\partial \ln p} \Big|_{B_p}, \quad (2.18)$$

$$\chi_s = \frac{\beta_s}{g} \frac{\partial \ln z_3}{\partial \ln g} \Big|_{B_g} + \tau_s \frac{\partial \ln z_3}{\partial \ln h} \Big|_{B_h} + (1 + \zeta_s) \frac{\partial \ln z_3}{\partial \ln p} \Big|_{B_p}. \quad (2.19)$$

Решая эту систему, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln z_3}{\partial \ln g} \Big|_{B_g} &= g \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\beta}}, \\ \frac{\partial \ln z_3}{\partial \ln h} \Big|_{B_h} &= g \frac{D_h}{\bar{\beta}}, \\ \frac{\partial \ln z_3}{\partial \ln p} \Big|_{B_p} &= g \frac{D_p}{\bar{\beta}} \end{aligned} \quad (2.20)$$

где $\bar{\beta}$ и $\bar{\gamma}$ являются обобщенными β и γ - функциями в использованной обобщенной нормировке. Они имеют следующий вид:

$$\frac{\bar{\beta}}{g} = \begin{vmatrix} \beta_E/g & \tau_E - 1 & \zeta_E - 1 \\ \beta_k/g & 1 + \tau_k & \zeta_k \\ \beta_s/g & \tau_s & 1 + \zeta_s \end{vmatrix} \quad (2.21)$$

$$\bar{\gamma} = \begin{vmatrix} \gamma_E & \tau_E - 1 & \zeta_E - 1 \\ \gamma_k & 1 + \tau_k & \zeta_k \\ \gamma_s & \tau_s & 1 + \zeta_s \end{vmatrix} \quad (2.22)$$

Величины D_h и D_p определяются при помощи аналогичных детерминантов.

Дифференцируя τ_i и ζ_i , получим аналогичные системы уравне-

ний для z_2 и z_5 . Дифференцируя β , получаем уравнения для определения z_g .

Эти уравнения имеют вид

$$\left. \frac{\partial \ln z_2}{\partial \ln q} \right|_{B_g} = -g \frac{\bar{\gamma}_\alpha}{\bar{\beta}}, \quad (2.23)$$

$$\left. \frac{\partial \ln z_5}{\partial \ln q} \right|_{B_g} = g \frac{\bar{\gamma}_\delta}{\bar{\beta}}, \quad (2.24)$$

$$\left. \frac{\partial \ln z_g}{\partial \ln q} \right|_{B_g} = g \frac{\bar{\gamma}_g}{\bar{\beta}}, \quad (2.25)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\beta} = & \beta_E [(1 + \tau_K)(1 + z_5) - \tau_\delta z_K] + \beta_K [(1 - \tau_E)(1 + z_5) - \tau_\delta (1 - z_E)] + \\ & + \beta_\delta [z_K (\tau_E - 1) - (1 + \tau_K)(z_E - 1)], \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} = & \gamma_E [(1 + \tau_K)(1 + z_5) - \tau_\delta z_K] + \gamma_K [(1 - \tau_E)(1 + z_5) - \\ & - \tau_\delta (1 - z_E)] + \gamma_\delta [z_K (\tau_E - 1) - (1 + \tau_K)(z_E - 1)], \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\bar{\gamma}_\alpha = (\tau_E + \tau_K)(1 + z_5) + \tau_\delta (1 - z_E - z_K), \quad (2.28)$$

$$\bar{\gamma}_\delta = (z_E + z_5)(1 + \tau_K) + z_K (1 - \tau_E - \tau_\delta), \quad (2.29)$$

$$\bar{\gamma}_g = \frac{1}{2} [(1 + \tau_K)(1 + z_5) - \tau_\delta z_K] + \frac{1}{g} \bar{\beta}. \quad (2.30)$$

Уравнения (2.20), (2.23)–(2.25) имеют следующие решения:

$$z_3 = \exp \int_0^g \frac{dq' \bar{\gamma}(q')}{\bar{\beta}(q')}, \quad (2.31)$$

$$z_2 = \exp - \int_0^g \frac{dq' \bar{\gamma}_\alpha(q')}{\bar{\beta}(q')}, \quad (2.32)$$

$$Z_S = \exp \int_0^g \frac{dg' \bar{\gamma}_S(g')}{\bar{\beta}(g')} , \quad (2.33)$$

$$Z_g = \exp \int_0^g \frac{dg' \bar{\gamma}_g(g')}{\bar{\beta}(g')} . \quad (2.34)$$

В дальнейшем мы будем придерживаться следующей последовательности действий [10] :

1. По теории возмущений вычисляются величины $\Gamma^{1,1}$ и $\Gamma^{1,2}$.
2. При помощи уравнений (2.8)-(2.10), (1.30) вычисляются теоретико-возмущенческие Z_i в виде конечного ряда по степеням g_0 .
3. При помощи этих теоретико-возмущенческих Z_i вычисляются ренормгрупповые функции (2.12)-(2.15) опять в виде конечного ряда по степеням g_0 .
4. По формулам (1.25), (1.26) при помощи теоретико-возмущенческих Z_i определяется связь между g_0 и g , которая затем подставляется в ренормгрупповые функции (2.12)-(2.15), вычисленные согласно пункту 3. После этого ренормгрупповые функции χ_i , τ_i , ζ_i и β_i принимают вид конечных рядов уже по степеням g , а не g_0 .
5. И, наконец, по формулам (2.31)-(2.34) вычисляются не теоретико-возмущенческие, а ренормгрупповые Z_i . При этом не делается никаких приближений. У точных теоретико-возмущенческих Z_i ряд должен собираться и представляться в виде интегралов (2.31)-(2.34). Новые ренормгрупповые Z_i являются бесконечными степенными рядами, сингулярными при тех значениях g , где β имеет нуль. Эти сингулярности и определяют инфракрасное

поведение теории. Переход от конечных рядов теории возмущений к бесконечным, таким образом, является просто более полным использованием информации, заключенной в теории возмущений.

Для дальнейшего продвижения вперед к получению интегрального представления для пропагатора померона, нам понадобятся полученные из теории возмущений функции Z_i . Следующий раздел будет посвящен вычислению всех ренормгрупповых функций в однопетлевом приближении.

3. Однопетлевое приближение

а) Вычисление диаграмм, констант перенормировки и ренормгрупповых функций

Начнем исследование структуры пропагатора померона в теории возмущений. Полный неперенормированный обратный пропагатор померона имеет вид [8-15, 18-19] :

$$i\Gamma^{11}(E, K^2) = iG^{11}(E, K^2)^{-1} = (E - \alpha_0 K^2 - \delta_0) e^{-\xi_0(E - \delta_0 - \alpha_0 K^2)} - \Sigma(E, K^2) + \delta\Delta, \quad (3.1)$$

где $\Sigma(E, K^2)$ - неприводимая собственно-энергетическая часть померона. Диаграмма низшего порядка в теории возмущений, дающая вклад в $\Sigma(E, K^2)$, имеет вид:

$$\Sigma_2(E, K^2) = \begin{array}{c} \xrightarrow{E, \vec{K}} \text{---} \bigcirc \text{---} \xrightarrow{E, \vec{K}} \\ \xleftarrow{E', \vec{K}'} \text{---} \bigcirc \text{---} \xleftarrow{E', \vec{K}'} \end{array} \quad (3.2)$$

Согласно правилам реджеонной диаграммной техники с учетом порогов вклад этого графа при $D = 2$ будет

$$\Sigma_2(E, K^2) = \frac{z_0^2}{8\pi} \int \frac{d^2 K' dE'}{2\pi^2 i} \frac{\exp\{\xi_0(E - 2\delta_0 - \alpha'_0(K'^2 + (\vec{K} - \vec{K}')^2))\}}{(E' - \alpha'_0 K'^2 - \delta_0 + i\varepsilon)} \cdot \frac{1}{E - E' - \alpha'_0(\vec{K} - \vec{K}')^2 - \delta_0 + i\varepsilon} \quad (3.3)$$

Все интегралы в (3.3) считаются точно, без всяких приближений, и в результате получаем

$$\Sigma_2(E, K^2) = \frac{z_0^2}{16\pi\alpha'_0} E i \left[-\xi_0 \left(2\delta_0 - E + \frac{1}{2} \alpha'_0 K^2 \right) \right], \quad (3.4)$$

где E_i - обычная интегральная экспонента.

Следующим шагом должно быть определение вершинной функции $\Gamma^{1,2}(E, K^2)$. В однопетлевом приближении она имеет вид:

$$\Gamma_3^{1,2}(E_i, K_i^2) = \begin{array}{c} \begin{array}{c} E_2, \vec{K}_2 \\ \nearrow \\ E, \vec{K} \\ \searrow \\ E_1, \vec{K}_1 \end{array} \begin{array}{c} E-E' \\ \nearrow \\ \vec{K}-\vec{K}' \\ \searrow \\ E', \vec{K}' \end{array} \begin{array}{c} E_2, \vec{K}_2 \\ \nearrow \\ E, \vec{K} \\ \searrow \\ E_1, \vec{K}_1 \end{array} \begin{array}{c} E-E' \\ \nearrow \\ \vec{K}-\vec{K}' \\ \searrow \\ E', \vec{K}' \end{array} \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{c} E_2, \vec{K}_2 \\ \nearrow \\ E, \vec{K} \\ \searrow \\ E_1, \vec{K}_1 \end{array} \begin{array}{c} E-E' \\ \nearrow \\ \vec{K}-\vec{K}' \\ \searrow \\ E', \vec{K}' \end{array} \begin{array}{c} E_2, \vec{K}_2 \\ \nearrow \\ E, \vec{K} \\ \searrow \\ E_1, \vec{K}_1 \end{array} \begin{array}{c} E-E' \\ \nearrow \\ \vec{K}-\vec{K}' \\ \searrow \\ E', \vec{K}' \end{array} \end{array} \quad (3.5)$$

При $D = 2$, $\Gamma_3^{1,2}$ в точке нормировки $E_1 = E_2 = \frac{E}{2} = -\frac{E_N}{2}$,

$\vec{K}_1 = \vec{K}_2 = \frac{\vec{K}}{2} = \frac{\vec{K}_N}{2}$ записывается как

$$\Gamma_3^{1,2}(E_i, K_i^2) = -\frac{z_0^3}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\xi_0(\frac{3}{2}E_N + 4\delta_0)} \int \frac{d^2 K'}{\pi} \frac{e^{-\xi_0 \alpha'_0 (K'^2 + 2(\vec{K}_N - \vec{K}')^2 + (\vec{K} - \frac{\vec{K}_N}{2})^2)}}{(E_N + 2\delta_0 + \alpha'_0(K'^2 + (\vec{K}_N - \vec{K}')^2))} \cdot \frac{1}{E_N/2 + 2\delta_0 + \alpha'_0((\vec{K}_N - \vec{K}')^2 + (\vec{K} - \vec{K}_N/2)^2)}$$

После интегрирования получаем

$$\Gamma_3^{1,2}(E_N, K_N^2) = -\frac{z_0 g_0^2}{(2\pi)^{3/2}} b, \quad (3.6)$$

где

$$b = \hat{I}(B),$$

$$\hat{I}(B) = \frac{1}{2} e^{-\xi_N(\frac{3}{2} + \rho)} \int_0^1 dx e^{-\frac{1}{4} \xi_N h (3 - x + x^2)} B(x);$$

$$B(x) = 1/A(x) + B_1(x); \quad (3.7)$$

$$A(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{\rho}{2} + \frac{h}{2} \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4}\right);$$

$$B_1(x) = 2 \xi_N e^{2 \xi_N A(x)} Ei(-2 \xi_N A(x)).$$

При $\xi_0 = K_N^2 = \delta_0 = 0$

$$b = \rho n 2. \quad (3.8)$$

При ненулевых значениях параметров интеграл в (3.7) приходится вычислять численно при помощи ЭВМ, задавая различные значения ξ_N , h и ρ .

Для ренормгрупповых расчетов необходимы значения констант перенормировок Z_i , определяемые уравнениями (2.8)-(2.10), (1.30).

Запишем их в виде.

$$Z_3^{-1} = 1 - \frac{g_0^2}{16\pi} a, \quad (3.9)$$

$$Z_2^{-1} = Z_3 \left(1 - \frac{g_0^2}{32\pi} a\right), \quad (3.10)$$

$$Z_5 = Z_3 \left(1 - \frac{g_0^2}{8\pi} a\right). \quad (3.11)$$

Из уравнения (3.4) получаем, что

$$a = \frac{e^{-\xi_N(2 + \frac{3}{2}h + \frac{3}{4}\rho)}}{(1 + \frac{h}{2} + \frac{\rho}{2})(1 + \xi_N(1 + h + \frac{\rho}{4}))} \quad (3.12)$$

Когда $\xi_0 = K_N^2 = \delta_0 = 0$, получаем

$$a(0) = 1. \quad (3.13)$$

При этом все Z_i приобретает особенно простой вид [14] .

Так как в однопетлевом приближении

$$\Gamma^{1,2}(E, K^2) = \frac{z_0^2}{(2\pi)^{3/2}} + \Gamma_3^{1,2}(E, K^2), \quad (3.14)$$

то по формуле (I.30) получим Z_4 .

$$Z_4^{-1} = 1 - \frac{g_0^2}{2\pi} b. \quad (3.15)$$

Мы уже вычислили $\Gamma^{1,1}$ и $\Gamma^{1,2}$ и получили теоретико-возмущенческие Z_i в виде конечных рядов по степеням g_0 . Тем самым выполнив первые два пункта программы, получим выражение, связывающее между собой g_0 и g . Из уравнений (I.25) и (I.26), удерживая только члены порядка g_0^2 , получим

$$Z_g^{-1} = 1 + \frac{g_0^2}{32\pi} (16b - \frac{5}{2} a) = 1 + Z_g^{-2} \frac{g^2}{32\pi} (16b - \frac{5}{2} a). \quad (3.16)$$

С точностью до членов порядка g^2 будем иметь

$$g_0 = g \left(1 + \frac{g^2}{32\pi} (16b - \frac{5}{2} a) \right). \quad (3.17)$$

Перейдем теперь к вычислению ренормгрупповых функций. Дифференцируя Z_i из (3.9)-(3.11) и (3.15), заменяя g_0 на g по формуле (3.17), получаем следующие выражения для ренормгрупповых функций:

$$\chi_E = -\frac{g^2}{16\pi} \frac{a}{a_4}; \quad \chi_K = -\frac{g^2}{16\pi} \frac{h}{2} \frac{a}{a_4};$$

$$\chi_S = -\frac{g^2}{16\pi} \frac{p}{2} \frac{a}{a_4}; \quad a_4 = 1 + \frac{h}{2} + \frac{p}{2}$$

Из уравнения (2.27) получаем

$$\bar{\gamma} = -\frac{g^2}{16\pi} a. \quad (3.18)$$

Аналогично

$$\bar{\gamma}_a = -\frac{g^2}{32\pi} a, \quad (3.19)$$

$$\bar{\gamma}_b = -\bar{\gamma}, \quad (3.20)$$

$$\bar{\gamma}_g = \frac{1}{2} + \frac{1}{g} \bar{\beta} - \frac{g^2}{64\pi} \frac{a}{a_4} \left(\frac{h}{2} - p\right) = \frac{g^2}{32\pi} \left(16b - \frac{5}{2} a\right). \quad (3.21)$$

Наконец, для $\bar{\beta}$ - функции получим

$$\bar{\beta} = -\frac{1}{2} g \left(1 - g^2/g_1^2\right), \quad (3.22)$$

где

$$\frac{g_1^2}{16\pi} = \left[16b - \frac{5}{2} a + \frac{a}{2a_4} \left(\frac{h}{2} - p\right)\right]^{-1} \quad (3.23)$$

При $g^2 = g_1^2$, $\bar{\beta}$ - функция имеет нуль и $\bar{\beta}'(g_1) > 0$, т.е. точка g_1^2 и является искомой инфракрасной стабильной точкой теории. В пределе $\xi_0 = \kappa_N^2 = \delta_0 = 0$ для g_1^2 получаем

$$\frac{g_1^2}{16\pi} = \left(16 \ln 2 - \frac{5}{2}\right)^{-1} = 0,116. \quad (3.24)$$

Таким образом, величина $g_1^2/16\pi$ оказывается достаточно малой для того, чтобы служить эффективным параметром разложения.

Полученная в (3.23) g_1^2 является функцией от параметров ξ_N , p и h . Ее поведение в зависимости от этих параметров показано на рис.1.

Перейдем к выполнению пункта 5 программы, изложенной в конце предыдущего раздела. Вычислим ренормгрупповые Z_1 по формулам (2.31)-(2.34).

Получим

$$Z_3 = \left(1 - \frac{g^2}{g_1^2}\right) \bar{\gamma}(g_1^2), \quad (3.25)$$

$$Z_\varepsilon = (1 - q^2/q_1^2)^{-\bar{\gamma}_\alpha(q_1^2)}, \quad (3.26)$$

$$Z_\delta = (1 - q^2/q_1^2)^{\bar{\gamma}_\delta(q_1^2)} \quad (3.27)$$

$$Z_q = (1 - q^2/q_1^2)^{\frac{1}{2} [1 + \tau_\kappa(q_1^2) + \zeta_\delta(q_1^2)]} \quad (3.28)$$

Можно показать, что если разложить (3.25)–(3.28) в ряды по q и перейти обратно от q к q_0 по формуле (3.17), то получим точные выражения для однопетлевого приближения (3.9)–(3.11) и (3.15). Итак, можно сказать, что все ряды теории возмущений точно восстанавливаются из ренормгрупповых результатов (3.25)–(3.28), по крайней мере, в первом порядке по q_0^2 .

б) Интегральное представление для пропагатора померона

Мы уже выполнили все пять пунктов, отмеченных в конце предыдущего раздела, и сейчас можно перейти к получению интегрального представления для пропагатора померона. Кроме общего метода, предложенного в работах [II, 15], будет использован и более простой способ, предложенный в работе [19], а также комбинация этих способов там, где это будет удобно.

Как уже указывалось, специфика РПН заключается в том, что в ней экспериментально наблюдаемыми являются именно затравочные, а не перенормированные величины. Поэтому в дальнейшем понадобятся выражения для Z_i через q_0^2 . Для этого надо выразить q через q_0 . Из формул (I.25), (I.16) и (3.28) имеем

$$q = q_0 (1 - q^2/q_1^2)^{c_q}, \quad (3.29)$$

где

$$C_g = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} [\tau_\kappa(q_1^2) + Z_\delta(q_1^2)]. \quad (3.30)$$

Тогда

$$Z_g = (1 - g^2/q_1^2)^{C_g} = (1 + g/g_1)^{C_g} (1 - g/g_1)^{C_g}.$$

Обозначив [10, 15]

$$\bar{Z}_g = (1 + g/g_1)^{C_g}, \quad (3.31)$$

получим

$$g = Z_g q_0 = q_0 \bar{Z}_g (1 - g/g_1)^{C_g}, \quad (3.32)$$

отсюда

$$1 - g/g_1 = \left(\frac{g}{q_0 \bar{Z}_g} \right)^{1/C_g}, \quad (3.33)$$

$$g = q_1 \left[1 - \left(\frac{g}{q_0 \bar{Z}_g} \right)^{1/C_g} \right], \quad (3.34)$$

что хорошо согласуется с уравнением (I.45). Из уравнений (I.23) и (I.34) получаем

$$q_0 = g Z_g^{-1}(g, p, h, \xi_N), \quad (3.35)$$

$$h_0 = \frac{\alpha_0 K_N^2}{E_N} = h Z_2(g, p, h, \xi_N), \quad (3.36)$$

$$p_0 = \frac{4\delta_0}{E_N} = p Z_3^{-1}(g, p, h, \xi_N). \quad (3.37)$$

Эти три уравнения должны иметь и обратные или соотношения, которые формально запишем в следующем виде:

$$g = \lambda(q_0, h_0, p_0, \xi_N),$$

$$h = \eta(q_0, h_0, p_0, \xi_N),$$

$$p = \nu(q_0, h_0, p_0, \xi_N).$$

(3.38)

Используя λ , η и ν , выразим производные от Γ^{11} из уравнений (2.8)-(2.10) в терминах голых параметров g_0 , h_0 и ρ_0 .

$$\left. \frac{\partial i \Gamma^{11}}{\partial E} \right|_{\substack{E_2 = E_N \\ K^2 = K_N^2}} = z_3^{-1}(\lambda, \eta, \nu) a_1, \quad (3.39a)$$

$$\left. \frac{\partial i \Gamma^{11}}{\partial K^2} \right|_{\substack{E_2 = E_N \\ K^2 = K_N^2}} = -\alpha'_0 z_2^{-1}(\lambda, \eta, \nu) z_3^{-1}(\lambda, \eta, \nu) a_1, \quad (3.39b)$$

$$\left. \frac{\partial i \Gamma^{11}}{\partial \delta} \right|_{\substack{E_2 = E_N \\ K^2 = K_N^2}} = -z_5(\lambda, \eta, \nu) z_3^{-1}(\lambda, \eta, \nu) a_1. \quad (3.39c)$$

Далее, необходимо исследовать инфракрасное поведение этих производных, устремляя $E_N \rightarrow 0$ при фиксированных z_0 , α'_0 и δ_0 и варьируя h и ρ некоторым образом, который станет ясным в дальнейшем [14, 15]. В инфракрасном пределе $g_0 \rightarrow \infty$ и надо знать поведение λ , η и ν при $g_0 \rightarrow \infty$. Начнем с уравнения (3.35). Из уравнения (1.45) имеем, что если g_1 является инфракрасной точкой, то в пределе $E_N \rightarrow 0$ $g \rightarrow g_1$. Поэтому при $g_0 \rightarrow \infty$ должны получить, что $Z_g \rightarrow 0$. То, что это на самом деле так, явно видно из уравнения (3.28) или (3.34). Из уравнения (3.34) получаем:

$$\lambda(g_0, h_0, \rho_0) \underset{g_0 \rightarrow \infty}{\sim} g_1(\eta, \nu) \left[1 - \left(\frac{g_0(\eta, \nu)}{g_0 \bar{z}(\eta, \nu)} \right)^{1/c_2} \right]. \quad (3.40)$$

Но соотношение (3.40) все еще не является полным обращением, так как с правой стороны появляются η и ν . Поэтому надо рассмотреть и уравнения (3.36), (3.38) в пределе, когда $g \rightarrow g_1$, т.е., когда

$$g \rightarrow \lambda, \quad h \rightarrow \eta, \quad p \rightarrow \nu. \quad (3.41)$$

Обозначим

$$C_3 = \bar{\delta}(g_1^2), \quad (3.42)$$

$$C_2 = -\bar{\delta}_\alpha(g_1^2),$$

$$C_\delta = \bar{\delta}_\delta(g_1^2),$$

и

$$\bar{z}_i(p, h) = (1 + g/g_1)^{c_i}. \quad (3.43)$$

Тогда

$$z_i = \bar{z}_i (1 - g/g_1)^{c_i}. \quad (3.44)$$

Подставляя сюда выражение (3.33), окончательно получим при $g \rightarrow g_1$

$$\begin{aligned} z_3 &= \bar{z}_3 \left[\frac{g_1(\eta, \nu)}{g_0 \bar{z}_g(\eta, \nu)} \right]^{c_3/c_g}, \\ z_2 &= \bar{z}_2 \left[\frac{g_1(\eta, \nu)}{g_0 \bar{z}_g(\eta, \nu)} \right]^{c_2/c_g}, \\ z_\delta &= \bar{z}_\delta \left[\frac{g_1(\eta, \nu)}{g_0 \bar{z}_g(\eta, \nu)} \right]^{c_\delta/c_g}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} h_0 &= \eta \bar{z}(\eta, \nu) \left[\frac{g_1(\eta, \nu)}{g_0 \bar{z}_g(\eta, \nu)} \right]^{c_2/c_g}, \\ p_0 &= \nu \bar{z}_\delta^{-1}(\eta, \nu) \left[\frac{g_1(\eta, \nu)}{g_0 \bar{z}_g(\eta, \nu)} \right]^{-c_\delta/c_g}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Или, подставляя вместо g_0 его выражение через α'_0 и E_N из уравнения (I.23), окончательно получим

$$\begin{aligned} p_\alpha &= \eta \bar{z}_2(\eta, \nu) \chi^{c_2/c_g}, \\ p_\delta &= \nu \bar{z}_\delta^{-1}(\eta, \nu) \chi^{-c_\delta/c_g}, \\ \lambda &= g_1(\eta, \nu) \left\{ 1 - E_N^{1/2 c_g} \chi^{1/c_g} \right\}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

где

$$\beta_a = \frac{\alpha'_0 K_N^2}{E_N^{1+c_2/2c_3}} \quad (3.48)$$

$$\beta_\delta = \frac{4\delta_0}{E_N^{1-c_6/2c_3}} \quad (3.49)$$

$$\chi = \frac{\sqrt{\alpha'_0} g_1(\eta, \nu)}{z_0 \bar{z}_g(\eta, \nu)} \quad (3.50)$$

Теперь мы имеем инфракрасное поведение производных обратного неперенормированного пропагатора, заданных уравнением (3.45), с η и ν , определяемых в неявном виде через соотношение (3.47) в терминах двух масштабных переменных β_a и β_δ . Производные от $\Gamma^{1,1}$ согласно уравнениям (2.8)-(2.10) примут вид:

$$\frac{\partial i\Gamma^{1,1}}{\partial E} \Big|_{\substack{E = E_N \\ K^2 = K_N^2}} = E_N^{-c_3/2c_3} \bar{z}_3^{-1}(\eta, \nu) \chi(\eta, \nu)^{-c_3/c_3} a_1 \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial i\Gamma^{1,1}}{\partial K^2} \Big|_{\substack{E = -E_N \\ K^2 = K_N^2}} = -\alpha'_0 E_N^{-\frac{c_3+c_2}{2c_3}} \bar{z}_2^{-1}(\eta, \nu) \bar{z}_3^{-1}(\eta, \nu) \chi(\eta, \nu)^{-\frac{c_3+c_2}{c_3}} a_1 \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial i\Gamma^{1,1}}{\partial \delta} \Big|_{\substack{E = -E_N \\ K^2 = K_N^2}} = E_N^{\frac{c_3-c_6}{c_3}} \bar{z}_6(\eta, \nu) \bar{z}_3^{-1}(\eta, \nu) \chi(\eta, \nu)^{-\frac{c_3+c_6}{c_3}} a_1 \quad (3.53)$$

При $E_N \rightarrow 0$ масштабные переменные β_a и β_δ должны изменяться таким образом, чтобы $\beta(g, \rho, h)$ продолжала бы иметь нуль при $g_1(\eta, \nu)$. Достаточным условием является то, чтобы масштабные переменные и, следовательно, η и ν , оставались бы фиксированными [12, 15] при $E_N \rightarrow 0$. В этом можно убедиться непосредственно. При $E_N \rightarrow 0$, $g \rightarrow g_1$, тогда из (3.31)

$$\bar{z}_g(\eta, \nu) = 2^{c_3} \quad (3.54)$$

и

$$\chi = 2^{-c_g} g_1(\eta, \nu) \frac{\sqrt{\alpha'_0}}{\tau_0} \quad (3.55)$$

следовательно,

$$\rho_\alpha = \eta(g_1(\eta, \nu) \frac{\sqrt{\alpha'_0}}{\tau_0})^{c_2/c_g}, \quad (3.56)$$

$$\rho_\delta = \nu(g_1(\eta, \nu) \frac{\sqrt{\alpha'_0}}{\tau_0})^{-c_5/c_g}. \quad (3.57)$$

Выражение в скобках от E_N в явном виде не зависит, поэтому отсюда следует, что $\rho_\alpha \sim \eta$ и $\rho_\delta \sim \nu$, т.е. фиксация масштабных переменных ρ_α и ρ_δ автоматически приводит к фиксации η и ν , и

$$\bar{\chi} = g_1(\eta, \nu) \frac{\sqrt{\alpha'_0}}{\tau_0} = f(x). \quad (3.58)$$

Здесь необходимо отметить, что критические показатели C_3 , C_2 , C_5 и C_g , сами являются функциями очень слабо зависящими от ρ и h и не содержат никакой явной зависимости от E_N . (Зависимость от ρ и h показана на рис 1). При фиксации η и ν происходит также фиксация и C_1 .

Как уже было отмечено, все Z_i являются конечными величинами при фиксированных τ_0 , α'_0 , δ_0 , E_N и K_N . Поэтому появляется возможность вычислить пропагатор померона $\Gamma^{1,1}$, хотя он на самом деле не зависит от E_N и K_N^2 . Такая операция на первый взгляд кажется немного сомнительной, но после некоторого размышления с учетом работ [12, 14, 15, 19] становится ясно, что все величины (Z_i, Γ, E_N, K_N^2 и т.д.), связанные с ренормгруппой, могут быть использованы с целью определения производных от $\Gamma^{1,1}$, заданных уравнениями (3.51)–(3.53), если просто заменить $E_N \rightarrow -E$, $K_N^2 \rightarrow K^2$ и записать $\eta = \eta(\tau_0, \alpha'_0, \delta_0, -E_N, K_N^2) = \eta(\tau_0, \alpha'_0, \delta_0, E, K^2)$ или $\nu = \nu(\tau_0, \alpha'_0, \delta_0, -E_N, K_N^2) =$

$$= \nu(\tau_0, \alpha'_0, \delta_0, E, K^2) \quad \text{и т.д.}$$

Обратный неперенормированный полный пропагатор с наложенным на него условием единичности интерсепта (I.18) определяется интегрированием уравнения (3.39a) по E' в пределах от 0 до E при фиксированных η и ν [12,14,15,19]. Получим

$$i\Gamma^{11}(E, K^2) = \int_0^E dE' \left. \frac{\partial}{\partial E'} i\Gamma^{11}(E', \eta, \nu) \right|_{\eta, \nu}, \quad (3.59)$$

где

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial i\Gamma^{11}(E, \eta, \nu)}{\partial E} \right|_{\eta, \nu} &= \left. \frac{\partial i\Gamma^{11}}{\partial E} \right|_{K^2, \delta} + \left. \frac{\partial i\Gamma^{11}}{\partial K^2} \right|_{E, \delta} \frac{\partial K^2}{\partial E} \Big|_{\eta, \nu} + \\ &+ \left. \frac{\partial i\Gamma^{11}}{\partial \delta_0} \right|_{E, K^2} \frac{\partial \delta_0}{\partial E} \Big|_{\eta, \nu}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Все производные от $i\Gamma^{11}$ определены из уравнения (3.39) или (3.51)–(3.53), если в них сделать обратную замену $-E_N \rightarrow E$ и $K_N^2 = K^2$, поэтому

$$\left. \frac{\partial}{\partial E} i\Gamma^{11}(E, \eta, \nu) \right|_{\eta, \nu} = \alpha_1 \bar{z}_3^{-1} \left\{ 1 - \alpha'_0 \bar{z}_2^{-1} \left. \frac{\partial K^2}{\partial E} \right|_{\eta, \nu} - \bar{z}_6 \left. \frac{\partial \delta_0}{\partial E} \right|_{\eta, \nu} \right\}. \quad (3.61)$$

Вычислим теперь производные от K^2 и δ_0 . Из уравнения (3.47) имеем

$$K^2 = \frac{\eta}{\alpha'_0} \bar{z}_2 \chi^{c_2/c_2} (-E)^{1+c_2/2c_2}, \quad (3.62)$$

$$\delta_0 = \frac{\nu}{4} \bar{z}_6^{-1} \chi^{-c_5/c_2} (-E)^{1-c_5/2c_2},$$

или

$$\left. \frac{\partial K^2}{\partial E} \right|_{\eta, \nu} = -\frac{\eta}{\alpha'_0} \left(1 + \frac{c_2}{2c_2} \right) \bar{z}_2 \chi^{\frac{c_2}{c_2}} (-E)^{c_2/2c_2}, \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial \delta_0}{\partial E} \Big|_{\eta, \nu} = -\frac{\nu}{4} \left(1 - \frac{c_6}{2c_9}\right) \bar{z}_6^{-1} \chi^{\frac{c_6}{c_9}} (-E)^{-c_6/2c_9} \quad (3.64)$$

Из (3.45) имеем

$$\begin{aligned} z_3 &= \bar{z}_3 \chi^{c_3/c_9} (-E)^{c_3/2c_9}, \\ z_2 &= \bar{z}_2 \chi^{c_2/c_9} (-E)^{c_2/2c_9}, \\ z_6 &= \bar{z}_6 \chi^{c_6/c_9} (-E)^{c_6/2c_9}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Подставляя (3.63), (3.64) и (3.65) в уравнение (3.61), получим

$$\frac{\partial i\Gamma^{(1)}}{\partial E} \Big|_{\eta, \nu} = a_1 \bar{z}_3^{-1} \chi^{-c_3/c_9} (-E)^{-c_3/2c_9} \left\{ 1 + \eta \left(1 + \frac{c_2}{2c_9}\right) + \frac{\nu}{4} \left(1 - \frac{c_6}{2c_9}\right) \right\}. \quad (3.66)$$

После интегрирования при фиксированных η и ν окончательно получим

$$i\Gamma^{(1)}(E, K^2) = -\frac{(-E)^{1 - \frac{c_3}{2c_9}} \bar{z}_3^{-1} \chi^{-\frac{c_3}{c_9}} \cdot a_1}{1 - \frac{c_3}{2c_9}} \left[1 + \eta \left(1 + \frac{c_2}{2c_9}\right) + \frac{\nu}{4} \left(1 - \frac{c_6}{2c_9}\right) \right], \quad (3.67)$$

где η и ν в неявной форме заданы уравнения (3.56), (3.57), в которых надо заменить $E_N = -E$ и $K_N^2 = K^2$.

Уравнение (3.67) и является искомой инфракрасной асимптотической формой пропагатора померона. Оно было впервые получено в работе [14, 15], похожее выражение было выведено также в работе [11].

Пропагатор (3.67) обладает некоторыми недостатками, например, его трудно разложить в ряд теории возмущений из-за отсутствия явной зависимости от g_0 , или трудно исследовать область перехода к асимптотическому пределу, так как уравнение (3.67) уже само является предельным асимптотическим выражением.

Для исследования связей с теорией возмущений и режима пе-

рехода к асимптотическому пределу, удобнее рассмотреть другое представление для пропагатора померона, частные случаи которого были впервые рассмотрены в работе [19].

Вернемся еще раз к уравнению (3.29). Из соотношений (2.13) и (2.14) можно получить, что

$$\frac{1}{2} (\tau_k(q_1^2) + \zeta_\delta(q_1^2)) = - \frac{q_1^2}{64\mathcal{A}} \frac{\alpha}{a_u} \left(\frac{h}{2} - \rho \right). \quad (3.68)$$

Так как $q_1^2/64\mathcal{A}$ достаточно мало и, кроме того, имеющие физический смысл значения h и ρ также малы, то можно переписать уравнение (3.29) в следующем виде

$$q = q_0 \left(1 - \frac{q^2}{q_1^2} \right)^{1/2}, \quad (3.69)$$

$$C_q \approx \frac{1}{2}. \quad (3.70)$$

То, что это на самом деле так, хорошо видно из рис. I. В интервале изменения h от 0 до 10 величина C_q изменяется меньше чем на 1%. Из уравнения (3.69) и (3.70) сразу получаются три полезных соотношения

$$q_0 = q \left(1 - q^2/q_1^2 \right)^{-1/2}, \quad (3.71)$$

$$q = q_0 \left(1 + q_0^2/q_1^2 \right)^{-1/2} \quad (3.72)$$

$$1 - q^2/q_1^2 = \left(1 + q_0^2/q_1^2 \right)^{-1} \quad (3.73)$$

При помощи (3.73) все Z_i теперь можно переписать в терминах q_0^2 , заменяя всюду $E_N \rightarrow -E$ и $K_N^2 \rightarrow K^2$.

Введем следующее обозначение [19]

$$1 + q_0^2/q_1^2 = 1 - \frac{E_0(p, h)}{E}, \quad (3.74)$$

где

$$E_0(p, h) = \frac{\gamma_0^2}{\alpha_0' g_1^2(p, h)} = - \frac{\gamma_0^2}{16 \sqrt{1} \alpha_0'} \frac{a}{c_3}. \quad (3.75)$$

Тогда

$$Z_3^{-1} = \left(1 - \frac{E_0(p, h)}{E}\right)^{c_3}, \quad (3.76)$$

$$Z_2 = \left(1 - \frac{E_0(p, h)}{E}\right)^{-c_2}, \quad (3.77)$$

$$Z_5^{-1} = \left(1 - \frac{E_0(p, h)}{E}\right)^{c_5}. \quad (3.78)$$

Воспользуемся теперь формулами (3.59)–(3.61) при фиксированных p и h . Для этого необходимо вычислить производные от K^2 и δ_0 . Из (3.36), (3.37), после подстановки (3.76)–(3.78), имеем

$$\frac{\partial K^2}{\partial E} \Big|_{h, p} = - \frac{h}{\alpha_0'} Z_2 \left(1 + c_2 \left(1 - \frac{E}{E_0(p, h)}\right)^{-1}\right) \Big|_{h, p}, \quad (3.79)$$

$$\frac{\partial \delta_0}{\partial E} \Big|_{h, p} = - \frac{P}{4} Z_5^{-1} \left(1 - c_5 \left(1 - \frac{E}{E_0(p, h)}\right)^{-1}\right) \Big|_{h, p}. \quad (3.80)$$

Подставляя в (3.61) окончательно получим

$$i \Gamma^{1,1}(E, K^2) = \int_0^E dE' Q_1 \left(- \frac{E_0(p, h)}{E'}\right)^{c_3} \left(1 - \frac{E'}{E_0(p, h)}\right)^{c_3} \cdot \left\{1 + h \left(1 + \frac{c_2}{1 - \frac{E'}{E_0(p, h)}}\right) + \frac{P}{4} \left(1 - \frac{c_5}{1 - \frac{E'}{E_0(p, h)}}\right)\right\}_{p, h}. \quad (3.81)$$

Подынтегральное выражение в (3.81) по структуре очень похоже на уравнение (3.66), однако в нем в явном виде присутствуют предасимптотические множители. Здесь также можно проследить зависимость от переданного импульса и явную зависимость от затравочной константы связи γ_0 . Видно, что при $E \rightarrow 0$, результаты, получаемые из уравнений (3.67) и (3.81), будут давать одинаковое степенное поведение для пропагатора померона

$$\Gamma^{1,1}(E) \sim E^{1-c_3} \quad (3.82)$$

Величина $E_0(p, h)$ устанавливает масштаб приближения к асимптотике для $i\Gamma^{1,1}$. При $E \ll E_0$, или $\mathcal{Y} = \ln S \gg E_0^{-1}$ справедлива асимптотическая форма (3.82). При $E \gg E_0$ или $\mathcal{Y} \ll E_0^{-1}$ обычно предполагается, что справедлива теория возмущений по степеням τ_0 . Вопрос об области перехода к степенному решению (3.82) будет подробно рассмотрен в дальнейшем, а сейчас вернемся к вопросу о теоретико-возмущенческом разложении пропагатора померона, заданного уравнению (3.81) по степеням E_0 (степеням τ_0^2).

Из уравнения (3.81) сразу видно, что из-за того, что интегрирование начинается от $E = 0$, подынтегральное выражение невозможно разложить в ряд по степеням E_0 , как уже было отмечено в работах [11, 12, 19]. Если, следуя методике работ [11, 19] выделить из полного пропагатора член $\Delta\delta$, который и является причиной затруднений, то увидим, что разложение в ряд теории возмущений действительно становится возможным при $E > E_0$. Для выделения $\Delta\delta$ заметим [11, 19], что при $E \rightarrow -\infty$ все диаграммы с одной и более петлями должны зануляться из-за того, что интегралы $\int d^2k$ имеют обрезание (в нашем случае экспоненциальное обрезание). В частности, $\sum(-\infty, k^2) = 0$ и из уравнения (3.1) следует, что при $\xi_0 = 0$

$$\Delta\delta - \delta_0 = \lim_{E \rightarrow -\infty} (i\Gamma^{1,1}(E, 0) - E) = \int_0^{-\infty} dE' \left\{ \mathcal{F}(E', E_0, p, h) - 1 \right\}, \quad (3.83)$$

где
$$\mathcal{F}(E, E_0, p, h) = \left(-\frac{E_0(p, h)}{E} \right)^{c_3} \left(1 - \frac{E}{E_0(p, h)} \right)^{c_3}.$$

$$\cdot \left\{ 1+h \left(1 + \frac{C_2}{1 - \frac{E}{E_0(p,h)}} \right) + \frac{P}{4} \left(1 - \frac{C_5}{1 - \frac{E}{E_0(p,h)}} \right) \right\}, \quad (3.84)$$

подынтегральное выражение в уравнении (3.81). Вычитая (3.83) из уравнения (3.81) и изменяя контур интегрирования можно, наконец, написать

$$i \Gamma^{1,1}(E, K^2) - E + \delta_0 + \alpha'_0 K^2 - \delta \Delta = \sum (E, K^2) = \\ = - \int_{E_0}^{\infty} dE' \left\{ \mathcal{F}(E', E_0, p, h)_{p,h} - \left(1+h + \frac{P}{4} \right)_{p,h} \right\}. \quad (3.85)$$

Из этого интегрального представления видно, что хотя $\delta \Delta$ и не может быть разложено в ряд по степеням z^2 , величина $\sum (E, K^2)$ имеет сходящееся теоретико-возмущенческое разложение при $E > E_0$. Надо подчеркнуть, что ряд теории возмущений является асимптотическим рядом, в любой нелинейной теории поля он не может быть сходящимся, и РП в этом смысле не является исключением.

Покажем, что хотя подынтегральное выражение в (3.81) и не может быть разложено в ряд по E_0 , но окончательное выражение для $\Gamma^{1,1} [II]$, полученное после интегрирования, уже может быть разложено в такой ряд и, более того, может правильно воспроизводить исходный ряд теории возмущений. Для иллюстрации рассмотрим сравнительно простой случай, когда $\xi_0 = 0$. При этом имеем

$$C_3 = -0,1164. \quad (3.86)$$

Сделав в (3.81) замену переменных $x = -E'/E_0$ и проинтегрировав, получим

$$i \Gamma^{1,1}(E, K^2) = - \frac{E_0(p,h)}{1-C_3} \left(- \frac{E}{E_0(p,h)} \right)^{1-C_3} \cdot \\ \cdot \left\{ \left(1+h + \frac{P}{4} \right)_2 F_1 \left(-C_3, 1-C_3; 2-C_3; \frac{E}{E_0(p,h)} \right) + \right. \\ \left. + \left(C_2 h - C_5 \frac{P}{4} \right)_2 F_1 \left(1-C_3, 1-C_3; 2-C_3; \frac{E}{E_0(p,h)} \right) \right\}, \quad (3.87)$$

где ${}_2F_1(a, b; c; z)$ - обычная гипергеометрическая функция.

Рассмотрим инфракрасную асимптотику уравнения (3.87) при $E \rightarrow 0$. Разлагая гипергеометрические функции в ряды при малых z , получаем

$$\begin{aligned} i\Gamma^{1,1}(E, K^2) &= \frac{-E_0(p, h)}{1-C_3} \left(-\frac{E}{E_0(p, h)}\right)^{1-C_3} \left\{ 1+h(1+C_2) + \frac{P}{4}(1-C_8) - \right. \\ &- \frac{E}{E_0(p, h)} \frac{1-C_3}{2-C_3} \left[C_3(1+h+\frac{P}{4}) - (1-C_3)(C_2h - C_8\frac{P}{4}) - \right. \\ &\left. \left. - \left(\frac{E}{E_0(p, h)}\right)^2 \frac{(1-C_3)^2}{2(3-C_3)} \left[C_3(1+h+\frac{P}{4}) - (2-C_3)(C_2h - C_8\frac{P}{4}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Первый член асимптотического разложения (3.88) точно совпадает с уравнением (3.67) и с результатами работ [10, 19], кроме того, в (3.88) сохранены члены, определяющие подход к асимптотическому пределу.

Рассмотрим теперь предел теории возмущений, т.е. когда $E \gg E_0$, или $E/E_0 \gg 1$. Делая аналитическое продолжение гипергеометрической функции в область $|z| > 1$, получаем

$$\begin{aligned} i\Gamma^{1,1} &= E(1+h+\frac{P}{4}) - E_0 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1-C_3+n)}{n!n} \left(\frac{E_0(p, h)}{E}\right)^n \left[\frac{1+h+\frac{P}{4}}{\Gamma(-C_3)(n+1)} - \right. \right. \\ &- \frac{C_2h - C_8\frac{P}{4}}{\Gamma(1-C_3)} \left. \right] + [C_3(1+h+\frac{P}{4}) + C_2h - C_8\frac{P}{4}] \left[\ln\left(-\frac{E}{E_0(p, h)}\right) + \psi(2) - \right. \\ &\left. \left. - \psi(1-C_3) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.89)$$

При $\xi_0 = 0$ имеем

$$C_8 = -C_3, \quad (3.90)$$

$$C_2 = -\frac{1}{2}C_3,$$

$$a = \frac{1}{1 + \frac{P}{2} + \frac{h}{2}}.$$

Подставляя (3.90) в (3.89) получаем

$$i\Gamma^{11} = E - \alpha'_0 k^2 - \delta_0 - \frac{\tau_0^2}{16\mathcal{A}\alpha'_0} \left[\ln \left(\frac{16\mathcal{A}\alpha'_0}{\tau_0^2} C_3 \left(E - \frac{\alpha'_0 k^2}{2} - 2\delta_0 \right) \right) + \psi(2) - \psi(1 - C_3) \right] + \frac{\tau_0^4}{2(16\mathcal{A}\alpha'_0)^2} \frac{1 - C_3}{C_3} \frac{1}{E - \frac{\alpha'_0 k^2}{2} - 2\delta_0} \quad (3.91)$$

Член порядка τ_0^2 в уравнении (3.91) совершенно точно воспроизводит формулу (3.4) при $\xi_0 \rightarrow 0$, где вместо параметра обрезания стоит выражение $-\tau_0^2/(16\mathcal{A}\alpha'_0 C_3)$, что точно совпадает с выражением для параметра обрезания, полученным в [II]. Как будет показано в дальнейшем, член порядка τ_0^4 также достаточно точно отражает действительность.

Сейчас можно сделать утверждение, что формулы (3.81) и (3.87) дают правильное выражение для пропагатора померона в однопетлевом приближении. При этом получается правильное асимптотическое выражение при $E \rightarrow 0$ (уравнение (3.88)) и правильное разложение в ряд теории возмущений (уравнение 3.91)). Рассмотрим теперь, как сшиваются между собой ряд теории возмущений (3.4) с асимптотическим рядом (3.88) и точным решением (3.87). Результат показан на рис.2. Видно, что сшивка этих решений происходит в достаточно широкой области изменений E от $E \approx 0.05$ до $E \approx 0.25$, а не только в точке $E = E_0 = 0.123$, как это кажется на первый взгляд из уравнения (3.87).

Рассмотрим уравнение (3.81) при $\xi_0 \neq 0$. Этот случай труден для исследования, поэтому ограничимся только его асимптотическим разложением при $E \rightarrow 0$. Разложим (3.81) в ряд по E/E_0 . Выделим из $E_0(\xi_0, \rho, h)$ зависимость от ξ_0 , разложим E_0 в ряд при малых E , вплоть до членов порядка E^2 и проинтегрировав получим

$$i\Gamma^{11} = \frac{\bar{E}_0}{1-c_3} \left(\frac{E}{E_0} \right)^{1-c_3} \left\{ 1 + \frac{E}{E_0} \frac{1-c_3}{2-c_3} (c_3 - \xi_0 \bar{E}_0 (2-3c_3)) - \right. \\ \left. - \left(\frac{E}{E_0} \right)^2 \frac{c_3(1-c_3)}{2(3-c_3)} [1-c_3 - 2\xi_0 \bar{E}_0 (1+c_3(2-3c_3))] + \right. \\ \left. + (\xi_0 \bar{E}_0)^2 (1-c_3)(5-7c_3) \right\}, \quad (3.92)$$

$$\text{где } \bar{E}_0 = \frac{z_0^2}{16\pi d_0'} \frac{1}{c_3 Q_4}.$$

Уравнение (3.92) точно совпадает с асимптотическим разложением (3.88) при $\xi_0 = 0$. Член, пропорциональный ξ_0 , появляется только в первом порядке по E . Следовательно, учет порога рождения померона ξ_0 не влияет на асимптотику и только несколько изменяет предасимптотические члены.

в) Преобразование Зоммерфельда-Ватсона

Для получения экспериментально наблюдаемых величин необходимо иметь вид пропагатора померона в (J, t) представлении, который определяется при помощи преобразования Зоммерфельда-Ватсона от пропагатора в (E, K^2) при фиксированных $K^2 = -t$. Оно имеет вид [19]

$$F(J, K^2) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\uparrow} [i\Gamma^{11}(E, K^2)]^{-1} e^{-EJ} dE. \quad (3.93)$$

Полученное в предыдущем разделе выражение для "точного" однопетлевого пропагатора (3.87) мало пригодно для каких-либо практических вычислений, поэтому здесь будут рассматриваться различные частные случаи.

Рассмотрим вначале самый важный случай, когда $K^2 = \delta_0 = 0$, при этом $F(J, 0)$ будет определять поведение полных сечений

при $\mathcal{U} \gg E_0^{-1}$. Подставляя в (3.93) асимптотический вид функции Грина из (3.88) при $\rho = h = \xi_0 = 0$ и интегрируя получим

$$\sigma_{tot} \propto F(\mathcal{U}, 0) = \frac{1+c}{\Gamma(1+c)} (\bar{E}_0 \mathcal{U})^c \left\{ 1 + \frac{1}{\bar{E}_0 \mathcal{U}} \frac{c^2(1+c)}{2+c} + \frac{1}{(\bar{E}_0 \mathcal{U})^2} \frac{c^2(1+c)^2(1-c)(4-2c-c^2)}{2(3+c)(2+c)^2} \right\}. \quad (3.94)$$

Когда $k^2 = \delta_0 = \xi_0 = 0$, структура сингулярностей в комплексной E -плоскости очень простая: имеется только один разрез, начинающийся в точке $E = 0$ и направленный по положительной части реальной оси (см. рис.3). В формуле (3.94), как и всюду далее в этом разделе, мы написали вместо $C_3 \rightarrow C$, где

$$C = -C_3. \quad (3.95)$$

При $k^2 = \delta_0 = \xi_0 = 0$, C_3 определено в (3.86). \bar{E}_0 определено в уравнении (3.92).

Рассмотрим теперь случай, когда $\xi_0 \neq 0$ и $k^2 = \delta_0 = 0$. Воспользуемся при этом формулой (3.92), подставляя ее в (3.93), получим

$$\sigma_{tot}(\mathcal{U}, \xi_0) \propto \frac{1+c}{\Gamma(1+c)} (\bar{E}_0 \mathcal{U})^c \left\{ 1 + \frac{1}{\bar{E}_0 \mathcal{U}} \frac{c(1+c)}{2+c} (c + \xi_0 \bar{E}_0 (2+c)) \right\}. \quad (3.96)$$

Структура сингулярностей в этом случае такая же, что и на рис.3. Сравнивая уравнения (3.94) и (3.96) видим, что введение порога рождения померона влияет только на скорость подхода к масштабному пределу, но не изменяет сам предел. При асимптотических значениях энергии $\mathcal{U} \gg E_0^{-1}$, полное сечение будет вести себя как очень малая степень \mathcal{U} , преасимптотические члены пропорциональны обратным степеням $\bar{E}_0 \mathcal{U}$, кроме того, умножаются на очень

малые численные коэффициенты, так что формулы (3.94) или (3.96) остаются справедливыми и тогда, когда $\bar{E}_0 \gamma \approx 1$, т.е. масштабное поведение полных сечений должно достигаться при меньших энергиях, чем это формально следует из уравнения (3.94). Это хорошо видно из рис.4, где приведено отношение $\sigma_{tot}(\gamma)/\sigma_{tot}(0)$, для асимптотического решения (3.94) и для ряда теории возмущений. Видно, что асимптотическое решение начинает совпадать с теоретико-возмущенческим (с учетом членов до $\sim \tau_0^4$) уже при $\gamma = 5$. При численных расчетах нами были взяты следующие значения для констант

$$\tau_0^2 = 0,36, \quad (3.97)$$

$$\alpha'_0 = 0,5, \quad (3.98)$$

$$\bar{E}_0 = 0,123. \quad (3.99)$$

Было взято самое оптимистическое значение для константы τ_0 из работ [21-23]. Результат оказался не очень чувствительным к значению τ_0^2 , например, при $\tau_0^2 = 0,2$ сдвиг теоретико-возмущенческого и асимптотического решений смещается к $\gamma \approx 6$.

Из полученных результатов вытекает, что при энергиях ISR мы находимся в самом начале переходной области, и уже при увеличении энергии на 1-1,5 порядка, должны наблюдаться эффекты, характерные для переходной области: например, должна уменьшиться скорость роста полных сечений.

Рассмотрим, наконец, случай, когда $P \neq 0$ и $h = \xi_0 = 0$. При этом имеем

$$E_0(P) = \frac{\bar{E}_0}{1 + \frac{1}{2}P}, \quad (3.100)$$

и

$$P = -\frac{4\delta_0}{E} \left(-\frac{E}{E_0(P)}\right)^{c_5} \left[1 + \left(-\frac{E}{E_0(P)}\right)\right]^{-c_5}, \quad (3.101)$$

где

$$C_5 = -C_3 = C.$$

Исследуем теперь структуру сингулярностей в E - плоскости при $p \neq 0$ и $h = \xi_0 = 0$ из уравнения (3.88). В первом приближении по $E/\bar{E}_0 \ll 1$, уравнение (3.88) имеет полюс при

$$P_{\text{пол}} = -\frac{4}{1-C_5}. \quad (3.102)$$

При малых δ_0 и E , так как $C_5 \ll 1$, можно принять, что

$$P \approx P_0 = -\frac{4\delta_0}{E}. \quad (3.103)$$

Тогда положение полюса (3.102) в E - плоскости будет

$$E_{\text{пол}} \approx \delta_0 (1-C_5), \quad (3.104)$$

кроме того, пропагатор будет иметь точку ветвления при

$$E_{\text{cut}} \approx 2\delta_0, \quad (3.105)$$

и структура сингулярностей в E - плоскости будет иметь вид, показанный на рис.5. Следовательно, когда интерсепт меньше единицы, главной сингулярностью является простой полюс, лежащий левее единицы в j - плоскости [19,24]. Рассмотрим теперь поведение полного сечения на асимптотике при $\delta_0 > 0$.

Подставляя (3.88) при $K^2 = \xi_0 = 0$ в уравнение (3.93) получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{tot}}(Y, \delta_0) &\sim e^{-\Delta Y} \\ \Delta &= \bar{E}_0 (\delta_0/\bar{E}_0)^{1/(1-C_5)} (1-C_5)(1+C_5)^{C_5/(1-C_5)}. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Этот результат очень похож на результаты работ [19,24]. Здесь есть три важных области рапидити. При $\bar{E}_0^{-1} > Y$ можно использовать теорию возмущений, при $\bar{E}_0^{-1} < Y < \Delta^{-1}$ получается почти то же самое поведение, что и в случае критического поперона. Этот эффект является следствием "принципа неопределенности" [19].

который гласит, что при rapidity Y разрешение по J в J -плоскости имеет порядок $(\Delta J \approx 1/Y)$. При $Y > \Delta^{-1}$ сечение начинает экспоненциально падать.

Иследуем теперь вид дифференциального сечения в асимптотическом режиме. Для этого надо подставить в уравнение (3.93) пропагатор померона из уравнения (3.88) и проинтегрировать при фиксированных $K^2 = -t$. При этом надо вспомнить, что h определяется как функция от E и K^2 при помощи следующего уравнения:

$$h = -\frac{\alpha' k^2}{E} \left(-\frac{E_0(h)}{E}\right)^{C_2} \left[1 + \left(-\frac{E}{E_0(h)}\right)\right]^{C_2}, \quad (3.107)$$

где при $\delta_0 = \xi_0 = 0$

$$C_2 = -\frac{1}{2} C_3. \quad (3.108)$$

Численные расчеты показывают, что в интервале $0 \leq h \leq 10$ можно записать, что

$$E_0(h) = \frac{\bar{E}_0}{1+Bh}, \quad (3.109)$$

где

$$B = 0,366. \quad (3.110)$$

При $h \neq 0$ интеграл по E в уравнении (3.93) гораздо удобнее заменить на интегрирование по h , поэтому надо выразить E через h . Решая уравнение (3.107) методом итерации, выразим E/\bar{E}_0 через h

$$-\frac{E}{\bar{E}_0} = \rho \varphi_1(h) + \rho^2 \varphi_2(h) + \dots \quad (3.111)$$

где, согласно работам [10, 14], введены следующие обозначения

$$\varphi_1(h) = h^{-\frac{1}{1+C_2}} (1+Bh)^{-\frac{C_2}{1+C_2}}, \quad (3.112)$$

$$\Psi_2(h) = \bar{\Psi}_1^2(h) (1 + Bh) \frac{C_2}{1 + C_2}, \quad (3.113)$$

$$\rho = \left(\frac{\alpha'_0 K^2}{E_0} \right)^{\frac{1}{1+C_2}}. \quad (3.114)$$

Отметим, что разложение (3.111) на самом деле является рядом по степеням ρ и поэтому нам придется ограничиться малыми значениями K^2 .

Рассмотрим вначале преобразование Зоммерфельда-Ватсона для главного члена уравнения (3.111), т.е. примем

$$-\frac{E}{E_0} = \rho h^{-\frac{1}{1+C_2}} (1 + Bh)^{-\frac{C_2}{1+C_2}}. \quad (3.115)$$

Рассмотрим теперь структуру сингулярностей в E - и h -плоскостях. Из уравнений (3.109), (3.115) и (3.88) сразу видно, что сингулярности при $E=0$ уже нет, так как $h \sim E^{-1}$ при $E \rightarrow 0$. Кроме того, сингулярность уравнения (3.115) при $h = -B^{-1}$, отображается в точку $E = \infty$. Можно показать, что главными сингулярностями в E -плоскости при $K^2 > 0$ будет движущаяся (как функция от K^2) пара комплексно сопряженных точек ветвления, возникающих от сингулярностей $h(E)$, с координатами

$$E_c \sim \rho^{1+C_2} \bar{E}_0^{2C_2} (1 \pm i). \quad (3.116)$$

Хотя в общем случае невозможно обратить преобразование, определяемое уравнением (3.115) для точного определения положения сингулярностей, тем не менее, можно определить их место в комплексной h -плоскости, вычисляя производную dh/dE . Имеем

$$dE = \frac{E}{\rho} \frac{1}{1+C_2} \frac{dh}{h} \Psi_1(h) \Psi_2(h) \quad (3.117)$$

где, следуя работам [14,15,19], введены обозначения

$$\chi = (\rho \bar{E}_0 \gamma)^{1+c_2}, \quad (3.118)$$

$$\xi = \chi^{1/(1+c_2)}, \quad (3.119)$$

$$\Psi_3(h) = 1 + \frac{c_2 B h}{1 + B h}. \quad (3.120)$$

Из уравнения (3.117) видно, что производная перестает существовать в критической точке h_c , которая является отображением точек ветвлений в E -плоскости в h -плоскость.

$$h_c = - \frac{1}{B(1+c_2)} \quad (3.121)$$

В первом приближении из уравнения (3.88) имеем

$$i\Gamma^{1,1}(E, K^2) = - \frac{E_0(h)}{1+c} \left(- \frac{E}{E_0(h)} \right)^{1+c} [1+h(1+c_2)], \quad (3.122)$$

т.е. пропагатор померона имеет еще и полюс в точке

$$h_0 = - \frac{1}{1+c_2}. \quad (3.123)$$

Окончательная структура ведущих сингулярностей в E - и h -плоскостях показана на рис.6 и 7.

При $K^2 = 0$ обе сингулярности в E -плоскости совпадают в точке $E = 0$ и идут вдоль реальной оси как на рис.3. Оказывается, что главные сингулярности в E -плоскости не удовлетворяют общему соотношению

$$\alpha_c(t) = 2\alpha_p(t/4) - 1. \quad (3.124)$$

Это утверждение противоречит заключению, сделанному в работах [14,15]. Это не удивительно, так как уравнение (3.124) определяет положение двухмерного разреза, который получа-

ется из разложения уравнения (3.87) в ряд теории возмущений, а полное ренормгрупповое решение для пропагатора (3.122) должно содержать в себе информацию и о сумме всех многопомеронных разрезов высших порядков. Кроме того, из уравнения (3.91) известно, что полный пропагатор правильно воспроизводит ряд теории возмущений вплоть до члена $\sim \tau_0^4$, который именно и имеет структуру сингулярностей типа, показанных на рис.6.

Контур, показанный на рис.3, очень неудобен для численного интегрирования, но в h - плоскости он отображается в сравнительно простой контур C_h , показанный на рис.7. Получаем

$$F(\mathcal{Y}, K^2) = \frac{h_0(1+c)}{1+c_2} (\bar{E}_0 \mathcal{Y})^c \frac{1}{2\pi i} \int_{C_h} dh \frac{f_0(h, x)}{h-h_0}, \quad (3.125)$$

где

$$f_0(h, x) = \frac{1}{h} (\xi \varphi_1(h))^{-c} (1+Bh)^{-c} \varphi_3(h) e^{\xi \varphi_1(h)}. \quad (3.126)$$

Переходя от интегрирования по контуру к интегралу от главного значения, получаем

$$F(\mathcal{Y}, K^2) = \frac{1+c}{\Gamma(1+c)} (\bar{E}_0 \mathcal{Y})^c F_1(x), \quad (3.127)$$

где функция $F_1(x)$, нормированная так, чтобы $F_1(0) = 1$, имеет вид

$$F_1(x) = -\frac{h_0 \Gamma(1+c)}{1+c_2} \left\{ \frac{1}{\mathfrak{P}} \mathcal{P} \int_{-B^{-1}}^0 dh \frac{\text{Im} f_0(h, x)}{h-h_0} - \text{Re} f_0(h_0 + i\varepsilon, x) \right\}. \quad (3.128)$$

Этот результат опять совпадает с результатами работ [14, 15, 19] за исключением того, что численные значения критических показателей C_1 и B имеют другие значения. На рис. 8 показан квадрат асимптотической масштабной функции $F_1(x)$.

Второй член в асимптотическом разложении $F(y, \kappa^2)$ может быть получен аналогичным образом. Тогда амплитуда примет вид

$$F(y, \kappa^2) = \frac{1+c}{\Gamma(1+c)} (\bar{E} \cdot y)^c \left\{ F_1(x) + \frac{1}{\bar{E} \cdot y} \frac{c^2(1+c)}{2+c} F_2(x) \right\}, \quad (3.129)$$

где опять $F_2(0) = 1$ и

$$F_2(x) = h_0^2 \Gamma(1+c) \frac{2+c}{c^2(1+c)} I(x), \quad (3.130)$$

$$I(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-B^{-1}}^0 dh \operatorname{Im} \left[\frac{f_2(h) - f_2(0)}{h - h_0} + \Psi_4(h_0) \frac{f_0(h) - f_0(h_0) - f_0'(h_0)(h - h_0)}{(h - h_0)^2} \right] -$$

$$- \operatorname{Re} [\Psi_4(h_0) f_0'(h_0) + f_2(h_0)] + \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} [\Psi_4(h_0) f_0'(h_0) +$$

$$+ f_2(h_0)] \ln \left| \frac{h_0}{B^{-1} + h_0} \right| + \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[2f_0(h_0) \frac{\Psi_4(h_0)}{h_0(B^{-1} + h_0)} \right], \quad (3.131)$$

$$\Psi_4(h) = \frac{1+c}{(1+c_2)(2+c)} \xi \Psi_1(h)(1+Bh) [C + ch(1+c_2) + C_2 h], \quad (3.132)$$

$$f_1(h, x) = \xi f_0(h, x) \left[\xi \Psi_2(h) - c \frac{\Psi_2(h)}{\Psi_1(h)} - c_2 Bh \frac{\Psi_2(h)}{\Psi_3(h)} + \right.$$

$$\left. + \frac{C_2}{1+C_2} (1+Bh) \Psi_1(h) \right], \quad (3.133)$$

$$f_2(h, x) = f_1(h, x) + f_0(h, x) \varphi_5(h), \quad (3.134)$$

$$\varphi_5(h) = \frac{\varphi_4(h) - \varphi_4(h_0)}{h - h_0}. \quad (3.135)$$

Вычисление с большей точностью не имеет смысла, так как РПН дает информацию только о ~~малой~~ части амплитуды. Величина вклада реальной части в дифференциальные сечения не может быть больше 10% и по порядку величины равна вкладу $F_2(x)$.

Вклад пропагатора померона из уравнения (3.129) в дифференциальное сечение процесса $2 \rightarrow 2$ имеет вид

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{16\pi} [\beta_1(t) \beta_2(t)]^2 F^2(y, -t), \quad (3.136)$$

где $\beta_i(t)$ — вычит померона. Посмотрим, насколько наблюдаемое дифференциальное сечение $P-P$ при максимально достижимой энергии похоже на асимптотическое решение, даваемое уравнением (3.129). Для этого вместо β_i подставим константы, а вместо \bar{E}_0 , C_i и α'_0 подставим значения из ((3.97)–(3.99)). Полученный результат показан на рис.9.

Несмотря на то, что получено очень хорошее согласие между теоретическим и экспериментальным значениями сечений, в процессе анализа было пренебрежено многими эффектами, которые надо было бы рассмотреть при последовательном феноменологическом подходе [25]. Кроме того, не была учтена реальная часть амплитуды, не были учтены также вклады неусиленных графиков, вторичных полюсов и возможных четырех — (и более) померонных вершин.

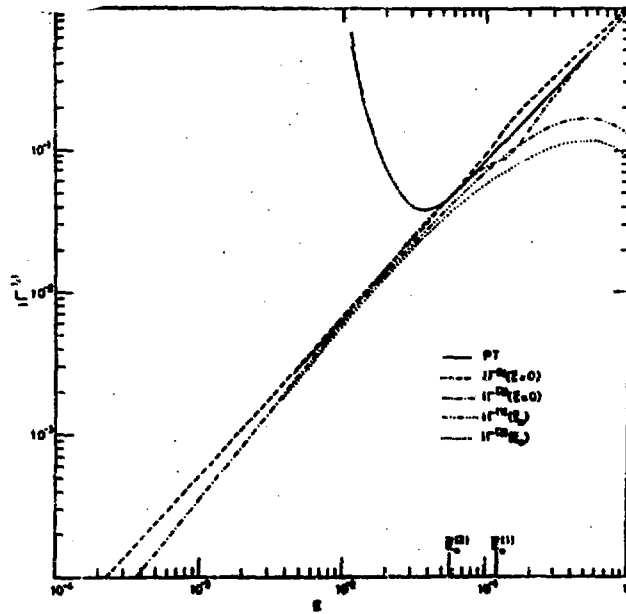


Рис 2

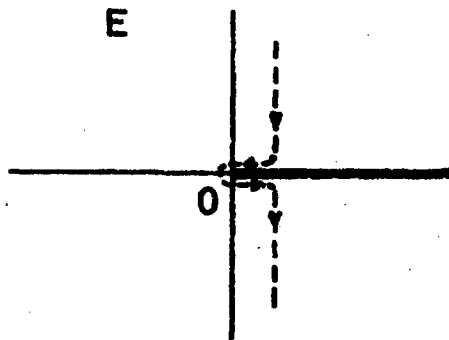


Рис 3

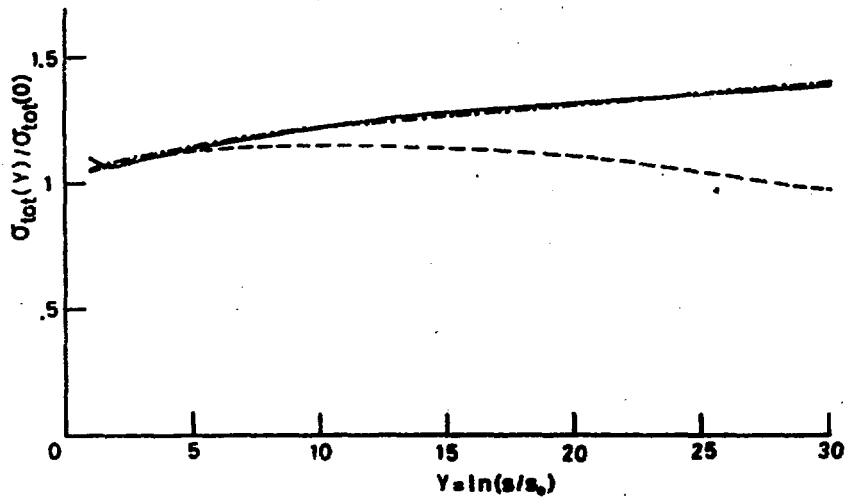


Рис 4

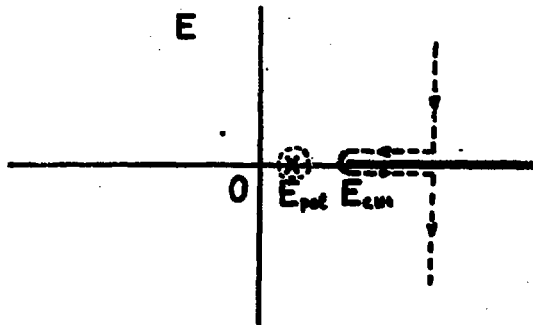


Рис 5

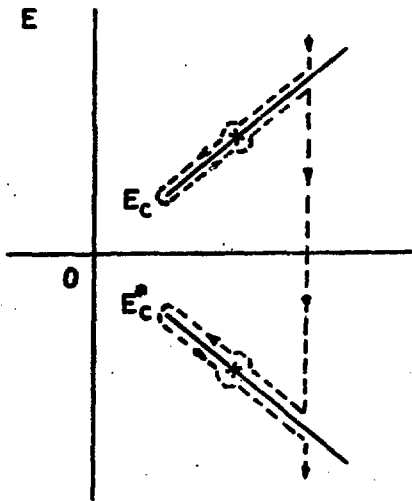


Рис 6

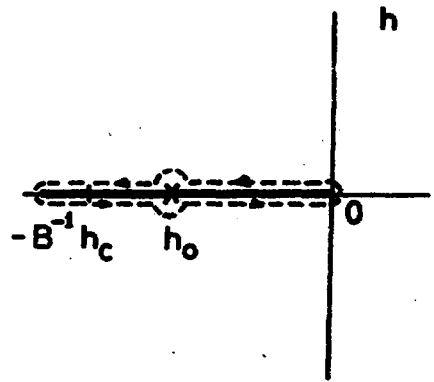


Рис 7

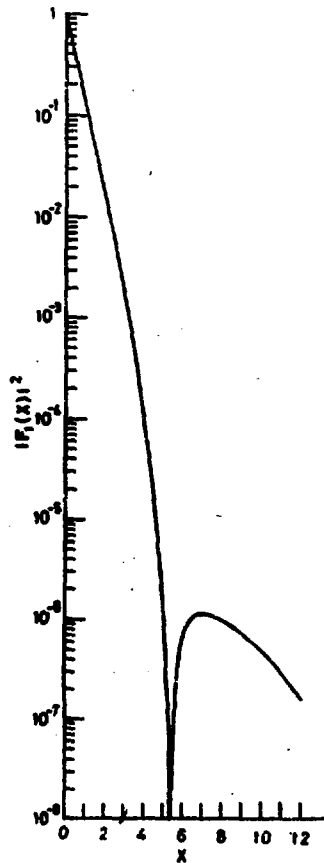


Рис 8

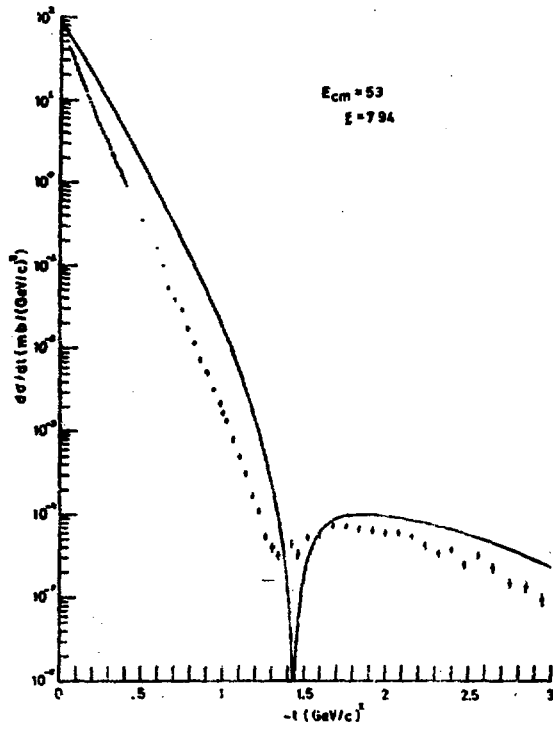


Рис 9

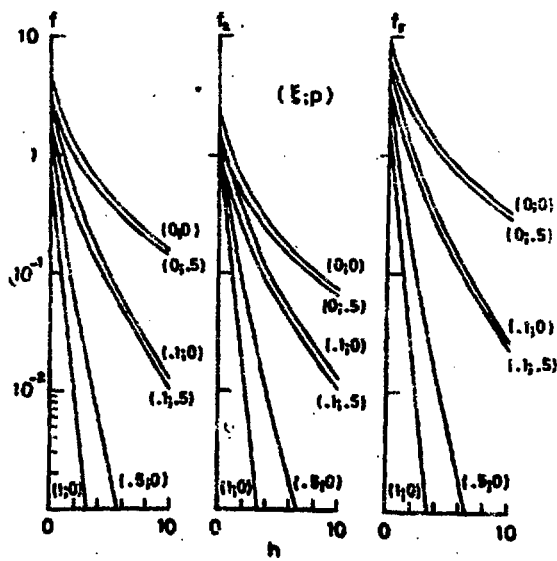


Рис 10

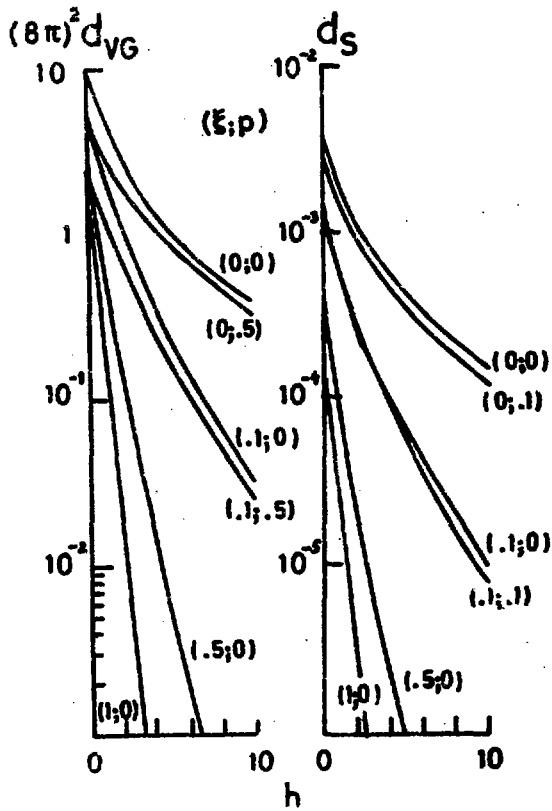


FIG II

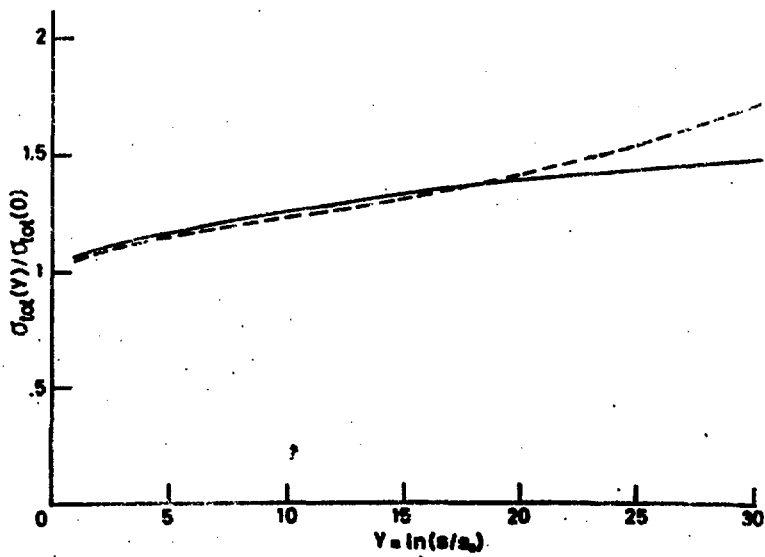


FIG I2

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ

- Рис.1 Критические показатели C_3 , C_2 , C_3 и $g_1^2/16\pi$ как функции от h , ρ , ξ_N : а) в однопетлевом приближении, б) в двухпетлевом приближении.
- Рис.2 Сливка теории возмущений, асимптотического и точного решений для пропагатора померона.
- Рис.3 Структура сингулярностей в E - плоскости при $K^2 = \delta_0 = 0$. Пунктиром показан контур интегрирования в (3.93).
- Рис.4 Сравнение полных сечений, полученных из теории возмущений и из масштабного решения (3.96). Сплошная линия - асимптотическое решение уравнения (3.96). Пунктирная линия - теория возмущений до членов $\sim z_0^2$. Пунктирная линия с точками - теория возмущений до членов $\sim z_0^4$.
- Рис.5 Структура сингулярностей в E - плоскости при $\rho \neq 0$ и $K^2 = \xi_0 = 0$.
- Рис.6 Сингулярности асимптотического пропагатора померона в комплексной E - плоскости при $K^2 > 0$. Крестик показывает положение полюса, соответствующего h_0 . Пунктиром показан контур интегрирования в (3.93).
- Рис.7 Сингулярности асимптотического пропагатора померона и комплексной h - плоскости. Крестик указывает положение полюса h_0 , а точка h_c является образом точек ветвлений в E - плоскости.
- Рис.8 Квадрат асимптотической масштабной функции $F_1^2(x)$ (уравнение (3.128)).
- Рис.9 Сравнение между данными ISR при $E_{cm} = 53$ ГэВ и асимптотическим решением (3.129).

10. Зависимость функций f , f_2 и f_6 от h , ρ и ξ_N , получаемая в результате численных расчетов диаграмм из уравнения (4.1).
11. Зависимость функций d_{v_6} и d_s от h , ρ и ξ_N , получаемая из уравнений (4.15), (4.16) и (4.20).
12. Сравнение полных сечений, получаемых из теории возмущений и из масштабного решения (4.87). Сплошная линия - асимптотическое решение. Пунктирная - теория возмущений до членов $\sim \tau^6$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грибов В.Н., Мигдал А.А. Свойства полюса Померанчука и связанных с ним ветвлений при малых переданных импульсах. *ЯФ*, 1968, т.8, вып.5, с.1002-1016.
2. Грибов В.Н., Мигдал А.А. Квазистабильный полюс Померанчука и дифракционное рассеяние при сверхвысоких энергиях. - *ЯФ*, 1968, т.8, вып.6, с.1213-1227.
3. Грибов В.Н., Мигдал А.А. Сильная связь в задаче о полюсе Померанчука. *ЖЭТФ*, 1968, т.55, вып.(4(10)), с.1498-1521.
4. Мигдал А.А., Поляков А.М., Тер-Мартirosян К.А. Теория взаимодействующих померонов и адронные реакции при высокой энергии. В кн. Проблемы ядерной физики и физики элементарных частиц. М.: Наука, 1975, с.147-184.
5. Еремян Ш.С., Назарян А.Э. Точное суммирование квазиэйкономального ряда. *ЯФ*, 1978, т.28, вып.5(11), с.1408-1418.
6. Еремян Ш.С., Назарян А.Э., Солахян В.П. Перенормировка вершинной функции померон-частица в древесном приближении. Труды IV конференции молодых ученых ЕРФИ, Ереван, 1980, с.11-20.
7. Вильсон К., Когут Дж. Ренормализационная группа и ϵ - разложении. М.: Мир, 1975.
8. Abarbanel H.D., Bronzan J.B. Structure of the Vacuum Singularity in Reggeon Field Theory.- *Phys.Lett.*, 1974, vol. 48B, num.4, p.345-349
9. Abarbanel H.D., Bronzan J.B. Structure of the Pomeron Singularity in Reggeon Field Theory.- *Phys.Rev.*, 1974, vol.D9, num.8, p.2397-2411.

10. Abarbanel I.H.D. Hadron Dynamics.-Proceedings of Summer Institute on Particle Physics. vol.1. SLAC Rep.No.179, vol.1, 1974, p.339-445
11. Sugar R.L., White A.R. Construction of the Reggeon Calculus in 4- Dimensions.- Phys.Rev., 1974,vol.D10, num.12, p.4074-4087.
12. White A.R. The Reggeon Calculus and Diffraction Scattering.- Ref.TH.2137-CERN, 1976.
13. R.L.Sugar, White A.R. Renormalization-Group Sum Rules and the Construction of Massless Field Theories in 4- Dimensions.- Phys.Rev., 1974,vol.D10,num.12,p.4063-4074.
14. Abarbanel H.D., Bartels J., Bronzan J.B., Didhu P. Inclusive Cross Sections and Angular Distributions in Reggeon Field Theory.- Phys.Rev., 1975, Vol.D12,num.9,p.2798-2815.
15. Abarbanel H.D.I., Bartels J., Bronzan J.B., Sidhu P. Reggeon Diagram Technique for Inclusive Processes in the Triple-Regge Limit.- Phys.Rev., 1975,vol.D12,num.8,p.2459-2482.
16. Baker M., Ter-Martirosyan K.A. Gribov's Reggeon Calculus: its Physical Basis and Implications.-Phys.Rep., 1976,vol.28C, num.1, p.1-143.
17. Capella A., Kaidalov A.B. Hadron-Hadron and Hadron-Nucleus Scattering in Reggeon Calculus with Energy-Momentum Conservation.-Nucl.Phys., 1976,vol.B111,num.3,p.477-501
18. Moshe M. Recent Development in Reggeon Field Theory.-Phys. Rep., 1978, vol.37C, num.3,p.255-345.
19. Frazer W.R., Hofman H., Fulco J.R., Sugar R.L. Representations of the Pomeron Propagator.-Phys.Rev., 1976,vol.D14, num.9,p.2387-2402.

20. Moshe M. Central Rapidity Region at Asymptotic and Non-asymptotic Energies.-Phys.Rev., 1976, vol.D14, num.9, p.2383-2387.
21. Capella A., Kaplan J. Behaviour of the Proton-Proton Total Cross Section at ISR Energies in the Reggeon Calculus.-Phys.Lett., 1974, vol.52B, num.4, p.448-453.
22. Kaidalov A.B. Diffractive Production Mechanisms.-Phys. Rep., 1979, vol.50C, num.3, p.157-225.
23. Ш.С.Еремян. Дифракционное рассеяние и зависимость коэффициентов линейного усиления от энергии и переданного импульса. ЯФ, 1978, т.27, вып.1, с.259-276.
24. Abarbanel I.H.D., Bronzan J.B., Schwimmer A., Sugar R.L. Intercept of the Pomeron.- Phys.Rev., 1976, vol.D14, num.2, p.632-647.
25. Еремян Ш.С. Упругое NN - $\bar{N}N$ - рассеяние в "квазиэйнковальной" модели. ЯФ, 1976, т.24, вып.1, с.201-207
26. Bronzan J.B., Dash J.W. Higher Order ϵ -Terms in Reggeon Field Theory.-Phys.Rev., 1974, vol.D10, num.12, p.4208-4218.
27. Dash J.W., Harrington S.J. Renormalization Point Invariance Twisted Fans, and Critical Exponents at Finite ϵ in the Reggeon Calculus.-Phys.Lett., 1975, vol.57B, num.1, p.78.
28. Dash J.W., Harrington S.J. The n-Loop Expansion of the Reggeon Calculus.-Phys.Lett., 1975, vol.59B, num.3, p.249-253.
29. Harrington S.J. The 3-Loop Calculation of Critical Exponents in the Reggeon Calculus.-Phys.Lett., 1976, vol.62B, num.4, p.433-435.
30. Baker M. Higher Order Terms in the ϵ -Expansion of the Pomeron Propagator.-Phys.Lett., 1974, vol.51B, num.2, p.158-161.

31. Cardy J.L. Perturbation Theory at Large Order in Reggeon Field Theory.- Ref.TH.2315-CERN, 1977.
32. Cardy J.L. The Critical Exponents of Reggeon Field Theory.- Phys.Lett., 1977, vol.67B, num.1, p.97-100.
33. Bronzan J.B., Shapiro J.A., Sugar R.L. Reggeon Field Theory in Zero Transverse Dimensions.- Phys.Rev., 1976, vol. D14, num.2, p.618-632.
34. Dash J.W. Thresholds and the Temperature of the Reggeon Field Theory.- Phys.Lett.-1976, vol.61B, num.1, p.53-57.
35. Della A. Selva, Garcia A., Garcia C.A. Canal. Masperi L., Parga N. Thresholds in Reggeon Field Theory.- Phys.Lett. 1976, vol.62B, num.3, p.311-315.
36. Еремян Е.С., Назарян А.Э. О перенормируемости реджеонной теории поля с учетом порогов и массовых членов при $D = 2$. Препринт ЕФМ, 530(17)-82, Ереван 1982.

Дукопись поступила 6 января 1982 г.

Редактор Л.П.Мукаян
Тех.редактор А.С.Абрамян

Заказ 169

ВФ-05177

Тираж 299

Препринт ВФИ
Подписано к печати 23/IV-82г

Формат издания 60x84/16
4,0 уч.изд.л. Ц. 40 к.

Издано Отделом научно-технической информации
Ереванского физического института, Ереван-36, пер.Маркаряна 2