

индекс 3624

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ  
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЕФИ-532(19)-82

Մ.Տ.ԵՐԵՄՅԱՆ, Ա.Յ.ՆԱԶԱՐՅԱՆ

РЕДЖЕОННАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ ПРИ  $D = 2$

ЧАСТЬ II

ДВУХПЕТЛЕВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

ԵՐԵՎԱՆ 1982 ԵՐԵՎԱՆ

#### 4. Двухпетлевое приближение

##### а) Вычисление диаграмм, констант перенормировки и ренормгрупповых функций

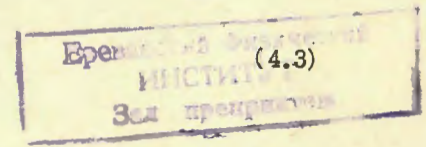
Продолжим исследование структуры пропагатора померона в теории возмущений. Рассмотрим двухпетлевой вклад в функцию Грина померона  $\Gamma^{-1,1}$ . Он имеет вид:

$$\Sigma_{4a} = \frac{E}{K} \left( \text{loop diagram} \right); \quad \Sigma_{4b} = \frac{E}{K} \left( \text{ghost loop diagram} \right) \quad (4.1)$$

$$\Sigma_4 = 2 \Sigma_{4a} + 2 \Sigma_{4b} \quad (4.2)$$

Согласно правилам реджеонной диаграммной техники (РДТ), изложенной в главе I, для  $\Sigma_{4a}$  имеем

$$2 \Sigma_{4a} = -\frac{z_0^2}{4\pi^2} \int e^{\xi_0(E+E_1-3\delta_0) - \xi_0 \alpha_0 (2K_1^2 + (\vec{K} - \vec{K}_1)^2)} \frac{d^2 K_1 dE_1}{2\pi^2 i} \quad (4.3)$$



$$\frac{\sum_2 (E_1, K_1^2) - \delta \Delta}{(-E_1 + \delta_0 + \alpha_0' K_1^2)^2 (-E + E_1 + \delta_0 + \alpha_0' (K - K_1)^2)}$$

В (4.3)  $\sum_2 - \delta \Delta$  обозначает однопетлевую диаграмму из (3.2) и регуляризуемый её контрчлен. Из (3.1) имеем

$$\sum_2 - \delta \Delta = (E - \alpha_0' K^2 - \delta_0) e^{-\frac{\xi_0 (E - \delta_0 - \alpha_0' K^2)}{-i\Gamma^{1,1}}}, \quad (4.4)$$

где  $i\Gamma^{1,1}$  должно быть разложено в ряд по членам порядка  $z_0^2$ . Полученное выражение должно быть подставлено в уравнение (4.3) и проинтегрировано. Для  $\sum_{4b}$  ответ получается более простым. Записав диаграмму по правилам РДТ и делая подстановку Фейнмана, получаем интеграл, который можно вычислить численно.

Для дальнейших ренормгрупповых расчетов нужны функции  $Z_i$ , которые в двухпетлевом приближении запишутся в следующем виде:

$$Z_3^{-1} = 1 - \frac{g_0^2}{16\pi} a^{(0)} + g_0^4 f, \quad (4.5a)$$

$$Z_2^{-1} = Z_3 \left( 1 - \frac{g_0^2}{32\pi} a^{(0)} + g_0^4 f_2 \right), \quad (4.5b)$$

$$Z_5 = Z_3 \left( 1 - \frac{g_0^2}{8\pi} a^{(0)} + g_0^4 f_5 \right), \quad (4.5c)$$

$$Z_1^{-1} = 1 - \frac{g_0^2}{2\pi} b^{(0)} + g_0^4 d. \quad (4.5d)$$

Во всех этих выражениях индекс  $(0)$  ( $a^{(0)}$  или  $b^{(0)}$ ) обозначает, что в них стоят  $\rho_0$  и  $h_0$ , и при переходе к окончательным вы-

ражениям необходимо сделать перенормировку этих величин по формулам (3.35)–(3.37).

Из уравнений (2.8)–(2.10) и (1.30) имеем

$$f = -\frac{a_1^{-1}}{g_0^4} \frac{\partial}{\partial E} \sum_4 \Big|_{\substack{E = -E_N \\ K^2 = K_N^2}}, \quad (4.6a)$$

$$f_2 = \frac{a_1^{-1}}{g_0^4} \frac{1}{\alpha_0'} \frac{\partial}{\partial K^2} \sum_4 \Big|_{\substack{E = -E_N \\ K^2 = K_N^2}}, \quad (4.6b)$$

$$f_5 = \frac{a_1^{-1}}{g_0^4} \frac{\partial}{\partial \delta} \sum_4 \Big|_{\substack{E = -E_N \\ K^2 = K_N^2}}, \quad (4.6c)$$

$$d = \frac{(2\pi)^{3/2}}{z_0} \Gamma_5^{1,2} \Big|_{\substack{E = 2E_1 = 2E_2 = -E_N \\ K = 2K_1 = 2K_2 = K_N}}, \quad (4.6d)$$

где  $\Gamma_5^{1,2}$  – вершинная функция пятого порядка по  $z_0$ . Из уравнений (4.5) и (4.6) видно, что на самом деле нужна не сама  $\Sigma$ , а ее производные по  $E$ ,  $K^2$  и  $\delta$ . На рис.10 показаны функции  $f$ ,  $f_2$  и  $f_5$  при различных значениях  $h$ ,  $\rho$  и  $\xi_N$ . Все эти производные имеют вид двойных интегралов, которые вычислялись численно на ЭВМ.

Рассмотрим теперь двухпетлевую вершинную функцию  $\Gamma_5^{1,2}$ . Она имеет вид

$$\Gamma_5^{1,2} = \Gamma_V^{1,2} + \Gamma_G^{1,2} + \Gamma_S^{1,2}, \quad (4.7)$$

где

$$\Gamma_V^{1,2} = 2 \left( \triangle + \triangle + \triangle + \triangle + \triangle + \triangle \right) \quad (4.8)$$

$$\Gamma_G^{1,2} = 2 \left( \triangle + \triangle + \triangle \right), \quad (4.9)$$

$$\Gamma_S^{1,2} = \triangle + \triangle + \frac{1}{2} \triangle. \quad (4.10)$$

По аналогии с работами [26,28] введем следующие обозначения:

$$J_1(a, b, c) = \left( \frac{\alpha'}{E_N} \right)^2 \int \frac{d^2 k_1}{\mathcal{N}} \int \frac{d^2 k_2}{\mathcal{N}} \exp \left\{ -\xi_N \frac{\alpha'}{E_N} (dk_1^2 + ek_2^2 - f\vec{k}_1 \vec{k}_2) \right\} \cdot \left( a + \frac{p}{2} + 2 \frac{\alpha'}{E_N} k_1^2 \right)^{-1} \left( b + \frac{p}{2} + 2 \frac{\alpha'}{E_N} k_2^2 \right)^{-1} \left( c + \frac{3}{4} p + 2 \frac{\alpha'}{E_N} \cdot (k_1^2 + k_2^2 - \vec{k}_1 \vec{k}_2) \right)^{-1}. \quad (4.11)$$

$$J_2(a, b, c) = - \frac{\partial}{\partial c} J_1(a, b, c). \quad (4.12)$$

Получим

$$\Gamma_{V_1}^{1,2} = \frac{\tau_0 g_0^4}{(2\pi)^{7/2}} \int_0^1 \frac{dx e^{-\frac{3\xi_N}{2x}}}{(4-x(3-p))(2-x(1-\frac{p}{2}))} \left\{ e^{\frac{3\xi_N}{4x}(1+\frac{3}{8}p)} \cdot \text{Ei} \left[ -\frac{3\xi_N}{4x} (3 - x(1-\frac{3}{2}p)) \right] - e^{\frac{9}{4}\xi_N(1+\frac{p}{2})} \text{Ei} \left[ -\frac{3\xi_N}{4x} (3 - x(2-\frac{3}{2}p)) \right] \right\} e^{-\xi_N(3E_N+10\delta_0)}, \quad (4.13)$$

$$\Gamma_{V_2}^{1,2} = \frac{\tau_0 g_0^4}{(2\pi)^{7/2}} \left[ J_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right) - J_1 \left( 1, \frac{1}{2}, 1 \right) \right] e^{-\xi_N(3E_N+9\delta_0)}, \quad (4.14a)$$

$$\Gamma_{V_3}^{1,2} = \frac{\tau_0 g_0^4}{(2\pi)^{7/2}} \left[ J_1 \left( \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \right) - J_1 \left( 1, 1, \frac{1}{2} \right) \right] e^{-\xi_N(\frac{5}{2}E_N+7\delta_0)}, \quad (4.14b)$$

$$\Gamma_{V_4}^{1,2} = \frac{\tau_0 g_0^4}{(2\pi)^{7/2}} \left[ J_1 \left( \frac{1}{2}, 1, 1 \right) - J_1 \left( 1, 1, 1 \right) \right] e^{-\xi_N(\frac{7}{2}E_N+9\delta_0)}, \quad (4.14c)$$

$$\Gamma_{V_5}^{1,2} = \frac{\tau_0 g_0^4}{(2\pi)^{7/2}} \left[ J_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) - J_1 \left( 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right] e^{-\xi_N(2E_N+7\delta_0)}, \quad (4.14d)$$

$$\Gamma_{V_6}^{1,2} = \frac{\tau_0 g_0^4}{(2\pi)^{7/2}} \left[ J_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) - J_1 \left( 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right] e^{-\xi_N(\frac{5}{2}E_N+9\delta_0)}. \quad (4.14e)$$

Для вычисления  $J_1$  надо сделать экспоненциальную параметризацию знаменателя, и делая замену переменных и проинтегрировав два раза, окончательно получим

$$J_1(a, b, c) = - \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^1 dy A(b, c; e) e^{B(a; d, e, f)} \text{Ei}(-B(a; d, e, f)), \quad (4.17)$$

$$J_2(a, b, c) = - \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left( \frac{1}{y} - 1 \right) A(b, c; e) e^{B(a; d, e, f)} \text{Ei}(-B(a; d, e, f)),$$

где

$$A(b, c; e) = \frac{\exp \left\{ -\left( \frac{1}{x} - 1 \right) \left( b + \frac{p}{2} \right) - \left( \frac{1}{y} - 1 \right) \left( c + \frac{3}{4} p \right) \right\}}{x^2 y^2 \left( e \xi_N + 2 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - 2 \right) \right)}, \quad (4.18)$$

$$B(\alpha; d, e, f) = \frac{2\alpha + \rho}{4} \left[ d \xi_N + 2 \left( \frac{1}{y} - 1 \right) - \frac{(f \xi_N + 2 \left( \frac{1}{y} - 1 \right))^2}{4(e \xi_N + 2 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - 2 \right))} \right].$$

Интегралы по  $x$  и  $y$  приходится вычислять численно при помощи ЭВМ при различных значениях  $\rho$ ,  $h$  и  $\xi_N$ .

Если ввести обозначение

$$J_3(a, b; c, d) = \int_0^\infty \frac{dK'^2 e^{-4\alpha' \xi_0 K'^2} [\sum_2 (c(aE_N + \delta_0 + \alpha'_0 K'^2), K'^2) - \delta \Delta]}{(aE_N + 2\delta_0 + 2\alpha'_0 K'^2)^2 (bE_N + d(2\delta_0 + 2\alpha'_0 K'^2))} \cdot e^{-\xi_N [(2a+b) + (4+d) \frac{\rho}{4}]}, \quad (4.19)$$

то для  $\Gamma_G^{1,2}$  из (4.9) получим

$$\Gamma_G^{1,2} = \frac{z_0^3}{2(2\pi)^{5/2}} \left[ J_3\left(\frac{1}{2}, 1; -1, 1\right) + J_3\left(1, \frac{1}{2}; 1, 1\right) + J_3\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -1, 0\right) - J_3\left(1, \frac{1}{2}; -1, 0\right) \right]. \quad (4.20)$$

Взяв  $\sum_2 - \delta \Delta$  из (4.4) и подставив в (4.10) получаем выражение, пригодное для численного интегрирования на ЭВМ. На рис. IД приведены графики для функций  $d_{VG}$  и  $d_S$  при различных значениях  $h$ ,  $\rho$  и  $\xi_N$ , где

$$d_{VG} = \frac{(2\pi)^{3/2}}{z_0} (\Gamma_V^{1,2} + \Gamma_G^{1,2}), \quad (4.21)$$

$$d_S = \frac{(2\pi)^{3/2}}{z_0} \Gamma_S^{1,2}. \quad (4.22)$$

Выясняется интересная закономерность: оказывается, что если нанести на те же графики рис. IО и II члены порядка  $z_0^4$ , которые получатся в результате разложения в ряд функций

$Z_i$  из уравнений (3.25)–(3.28) в пределе теории возмущений, то они точно совпадут с графиками для  $f$ ,  $f_2$ ,  $f_5$  и  $d_{VG}$  при всех значениях  $h$ ,  $\rho$  и  $\xi_N$ .

После некоторого анализа становится очевидным, что в РГП при  $D = 2$  так и должно быть. На самом деле, в однопетлевом приближении имелись диаграммы (3.2) и (3.5), вычисление этих графов проводилось точно, без всяких приближений, после чего они закладывались в ренормгруппу и вычислялся нетеоретико-возмущенческий ответ (3.25)–(3.28), который потом разлагался обратно в ряд теории возмущений. При этом, если все делалось правильно, кроме однопетлевого вклада, должны были воспроизвестись вклады всех двухпетлевых диаграмм, содержащих в себе в качестве составных блоков графы из (3.2) и (3.5). Функция Грина  $\Gamma^{1,1}$  воспроизводится полностью, так как в двухпетлевом приближении имеются два графа из (4.1), которые полностью построены из диаграмм (3.2) и (3.5). Вершинные графы  $\Gamma_V^{1,2}$  из (4.8) содержат в себе в качестве основных блоков диаграммы из (3.5), а графы  $\Gamma_G^{1,2}$  из (4.9) построены из диаграммы (3.2); следовательно, ренормгруппа должна правильно воспроизвести сумму  $\Gamma_V^{1,2} + \Gamma_G^{1,2}$ . Диаграммы же для  $\Gamma_S^{1,2}$  из (4.10) невозможно построить из графов (3.2) или (3.5), поэтому они и не воспроизводятся ренормгруппой. Следовательно, мы могли вообще не вычислять вклады от графов (4.1) и (4.8), (4.9), а ограничиться вычислением  $\Gamma_S^{1,2}$  из (4.10) и добавить их к теоретико-возмущенческому разложению для  $Z_1^{-1}$ , которое можно получить из уравнения (3.28) при помощи уравнений (1.26) и (3.25), (3.26). Полученная нами полная обращаемость ренормгрупповых преобразований,

указывает на главное преимущество работы при  $D = 2$  - прямую связь с теорией возмущений.

Исходя из вышесказанного, для функции  $f_i$  и  $d$  вместо громоздких выражений типа (4.15) или (4.16) в дальнейшем будут использованы результаты, полученные после разложения в ряд теории возмущений формул (3.25)-(3.28). Тогда получим

$$f = \frac{a}{2(16\pi)} \left[ a_\gamma - \frac{a}{2a_4} \left( \frac{h}{2} - p \right) \right], \quad (4.23)$$

$$f_2 = \frac{a}{4(16\pi)^2} \left[ a_4 - \frac{a}{2a_4} \left( \frac{h}{2} - p \right) \right], \quad (4.24)$$

$$f_\delta = \frac{a}{(16\pi)^2} \left[ a_\delta - \frac{a}{2a_4} \left( \frac{h}{2} - p \right) \right], \quad (4.25)$$

$$d = \frac{b}{(8\pi)^2} \left[ a_\beta - \frac{a}{2a_4} \left( \frac{h}{2} - p \right) \right] + d_s, \quad (4.26)$$

где  $a_i$  были определены в уравнении (3.12) и

$$\begin{aligned} a_4 &= 16b - 2a, \\ a_\beta &= 24b - \frac{5}{2}a, \\ a_\gamma &= 16b - \frac{5}{2}a, \\ a_\delta &= 16b - \frac{a}{2}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

а  $d_s$  показано на рис. II.

Наконец, вычисляя все нужные производные, совершая перенормировки всех величин с индексами (0) (см. напр. уравнение (4.5)) и подставляя все это в уравнения (2.26)-(2.30), после достаточно долгих и сложных расчетов окончательно получаем следующие выражения для обобщенных ренормгрупповых функций в двухпетле-

вом приближении:

$$\bar{\gamma} = -\frac{g^2}{16\pi} a + \frac{g^4}{(16\pi)^2} a^2 \left( \frac{1}{a_4} \left( p - \frac{h}{2} \right) - \xi_N p \right), \quad (4.28)$$

$$\bar{\gamma}_d = -\frac{g^2}{32\pi} a, \quad (4.29)$$

$$\bar{\gamma}_\delta = -\bar{\gamma} + \frac{g^2}{(16\pi)^2} a^2 \left[ \frac{1}{2a_4} \left( p - \frac{h}{2} \right) - \xi_N \left( p - \frac{h}{4} \right) \right], \quad (4.30)$$

$$\bar{\gamma}_g = \frac{g^2}{32\pi} \left( 16b - \frac{5}{2}a \right) - 2g^4 d_s, \quad (4.31)$$

$$\bar{\beta} = -\frac{1}{2}g(1+g^2\beta_1+g^4\beta_2) + \frac{g^4}{(16\pi)^2} Q^2 \left( \frac{1}{a_4} \left( p - \frac{h}{2} \right) - \xi_N \left( p - \frac{h}{4} \right) \right),$$

где

$$\beta_1 = -\frac{1}{16\pi} \left[ 16b - \frac{5}{2}a + \frac{a}{2a_4} \left( \frac{h}{2} - p \right) \right], \quad (4.32)$$

$$\beta_2 = 4d_s - \frac{2a^2}{(16\pi)^2} \left[ \frac{1}{a_4} \left( p - \frac{h}{2} \right) - \xi_N \left( p - \frac{h}{4} \right) \right] - T, \quad (4.33)$$

где

$$T = -\frac{g^4}{2(16\pi)^2} \frac{a}{a_4} \left\{ \left( \frac{h}{2} - p \right) \left[ 16b + \frac{a}{2} \left( 3 + \frac{2}{a_4} \left( \frac{h}{2} - p \right) + \frac{h}{2} \xi_N \right) \right] - \right. \quad (4.34)$$

$$\left. - \frac{3}{4}ah \right\} - g^4 E_N \left[ \frac{h}{a} \frac{\partial}{\partial K^2} (f-f_2)_{BK} + \frac{p}{4} \frac{\partial}{\partial \delta_0} (f-f_\delta)_{B\delta} \right],$$

При  $\xi_0 = p = h = 0$  имеем

$$\bar{\gamma}_0 = -\frac{g^2}{16\pi} a, \quad (4.35a)$$

$$\bar{\gamma}_{d_0} = -\frac{g^2}{32\pi} a, \quad (4.35b)$$

$$\bar{\gamma}_{\delta_0} = -\bar{\gamma}_0, \quad (4.35c)$$

$$\bar{\beta}_0 = -\frac{1}{2}g\{1+g^2\beta_1+4d_s g^4\}, \quad (4.35d)$$

$$\bar{\gamma}_{g_0} = \frac{g^2}{32\pi}(16b - \frac{5}{2}a) - 2d_s g^4. \quad (4.35e)$$

Следовательно, когда все дополнительные параметры теории равны нулю,  $\bar{\gamma}_0$ ,  $\bar{\gamma}_{\alpha_0}$  и  $\bar{\gamma}_{\delta_0}$  равны своим однопетлевым значениям (3.18)–(3.20), а  $\bar{\gamma}_{g_0}$  и  $\bar{\beta}_0$  приобретают добавку из-за вклада непланарных графов в  $\Gamma_s^{1,2}$  из уравнения (4.10). Именно из-за того, что все  $\bar{\gamma}_0$  равны своим однопетлевым значениям, а добавочные члены в уравнениях (4.28)–(4.31) (кроме  $d_s$ ) появляются только из-за перенормировок дополнительных параметров, разложение в теоретико-возмущенческий ряд однопетлевых результатов совпадает с двухпетлевыми расчетами с точностью до членов, содержащих  $d_s$ .

Рассмотрим теперь полученную двухпетлевую  $\bar{\beta}$  – функцию Гелл-Манна-Лоу. Исследуем ее вначале при нулевых значениях параметров  $\bar{\xi}_0 = \kappa^2 = \delta_0 = 0$ . В однопетлевую  $\bar{\beta}_0$  добавился член  $4d_s$ , расчеты, показанные на рис. II, дают, что  $d_s > 0$ . Это обстоятельство приводит к тому, что  $\bar{\beta}$  – функция в двухпетлевом приближении не имеет действительного нуля при  $g^2 > 0$ . Это не должно быть неожиданностью, так как во всех предыдущих работах и при  $D = 2$  [27–29], и в  $\epsilon$  – разложении [26, 30] (при  $\epsilon = 2$ ) двухпетлевая  $\bar{\beta}$  – функция не имела нуля. Получаем

$$\bar{\beta}_0 = -\frac{1}{2}g(1 - g^2 0,172 + g^4 0,0158), \quad (4.36)$$

что достаточно хорошо согласуется с предыдущими результатами в [27–29]. В [28] было получено несколько большее значение для  $d_s$ , так как авторы умножили вклад третьей диаграммы из  $\Gamma_s^{1,2}$  на 2 вместо умножения на 1/2. Аналогичная ошибка была допущена и в работах [26, 30]. В работах [29] было показано, что  $\bar{\beta}$  – функция в трехпетлевом приближении имеет нуль в точке  $g_1^2/16\pi = 0,13$ . Кроме того, в [31, 32] было показано, что при учете высших порядков теории возмущений РТТ при  $D = 2$  должна иметь стабильную инфракрасную точку  $\bar{\beta}(g_1) = 0$  с  $\bar{\beta}'(g_1) > 0$ . Поэтому, следуя работе [28], найдем нуль  $\bar{\beta}$  – функции при помощи Паде-аппроксимации. Паде-аппроксиманта для  $\bar{\beta}$  – функции, заданной уравнением (4.31), имеет вид

$$\bar{\beta} [1,1] = -\frac{1}{2}g \frac{\beta_1 + g^2(\beta_1^2 - \beta_2)}{\beta_1 - g^2\beta_2}, \quad (4.37)$$

с нулем в точке

$$g_1^2 = -\frac{\beta_1}{\beta_1^2 - \beta_2}. \quad (4.38)$$

При нулевых значениях параметров  $\bar{\xi}_0 = \kappa^2 = \delta_0 = 0$  получаем

$$g_1^2/16\pi = 0,25, \quad (4.39)$$

что прекрасно согласуется со значением

$$g_1^2/16\pi = 0,26 \pm 0,02, \quad (4.40)$$

полученным в работах Карди [31, 32] при учете высших порядков теории возмущений, при  $D = 2$ . Кроме того, это значение хорошо согласуется с числом

$$g_1^2/16\pi = 0,2 + 0,25, \quad (4.41)$$

полученным в работе [33] в  $\varepsilon$ -разложении с использованием Паде-Борелевской аппроксимации. Полученные при помощи трех столь различных методов величины  $g_1^2/16\pi$  оказались очень близкими друг к другу, откуда можно сделать вывод, что настоящее точное значение этой величины, по-видимому, не должно сильно отличаться от значения (4.39).

То обстоятельство, что двухпетлевая  $\bar{\beta}$ -функция не имеет инфракрасной стабильной точки, является, по-видимому, отражением того факта, что начиная с двух петель характер ряда теории возмущений меняется: в однопетлевом случае функция Грина имеет логарифмическое поведение по  $E$ , а все остальные порядка теории возмущений дают степенные по  $1/E$  вклады, поэтому, из-за смены режима поведения пропагатора ограничиваться только двухпетлевым приближением нельзя. В [29] были проведены трехпетлевые расчеты, которые показали, что нуль в  $\bar{\beta}$ -функции снова восстанавливается, кроме того, Карди [31,32] показал, что вклады высших порядков теории возмущений в  $\bar{\beta}$ -функцию в теории с  $D=2$  образуют знакпостоянный ряд, который гарантирует существование инфракрасной стабильной точки в РТТ при  $D=2$ . И то обстоятельство, что при помощи Паде-аппроксимации мы получили именно результат Карди, а не Харрингтона [29], показывает, что Паде-аппроксиманта (4.37) гораздо точнее описывает структуру  $\bar{\beta}$ -функции, чем теория возмущений даже на трехпетлевом уровне. Поэтому во всех дальнейших расчетах мы будем использовать  $\bar{\beta}$ -функцию, имеющую вид (4.37). На рис.16 приведены значения  $g_1^2/16\pi$  как функции от параметров  $h$ ,  $\rho$  и  $\xi_N$ , вычисленные по формуле (4.38).

Сейчас необходимо вычислить ренормгрупповые константы  $Z_i$  по формулам (2.22)-(2.25), при этом в качестве  $\bar{\beta}$ -функции будет использована её Паде-аппроксиманта (4.37). Все интегралы вычисляются точно, и в результате получаем

$$Z_3 = (1 - g^2/g_1^2)^{c_3} \psi_3(g^2); \quad (4.42)$$

$$Z_2 = (1 - g^2/g_1^2)^{c_2} \psi_2(g^2).$$

$$Z_5 = Z_3^{-1}; \quad (4.43)$$

$$Z_g = (1 - g^2/g_1^2)^{c_g} \psi_g(g^2),$$

где введены следующие обозначения

$$c_3 = \frac{\bar{\gamma}(g_1^2)}{\bar{\beta}'(g_1^2)}; \quad c_2 = -\frac{\bar{\gamma}_2(g_1^2)}{\bar{\beta}'(g_1^2)}; \quad (4.44)$$

$$c_g = \frac{\bar{\gamma}_g(g_1^2)}{\bar{\beta}'(g_1^2)} = -g_1^2 \beta_1 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (\tau_k(g_1^2) + \bar{\gamma}_5(g_1^2)) \right), \quad (4.45)$$

и

$$\psi_i(g^2) = \exp \left\{ g^2 \frac{g_1^2}{\beta_1} [\gamma_{i1} \beta_2 + g_1^2 \gamma_{i2} \beta_1^2] + \frac{1}{2} g^4 \frac{g_1^2}{\beta_1} \gamma_{i2} \beta_2 \right\}, \quad (4.46)$$

$$\bar{\gamma}_i = \bar{\gamma}_i(g^2 = g_1^2) = -g_1^2 \gamma_{i1} - g_1^4 \gamma_{i2}; \quad (4.47)$$

$$\bar{\beta}'(g_1^2) = -\frac{1}{g_1^2 \beta_1}. \quad (4.48)$$

Величины  $\gamma_i$  и  $\beta_i$  определены в формулах (4.28)-(4.34).

На рис.16 приведены результаты численных расчетов на ЭВМ для критических показателей  $S_i$  в двухпетлевом случае при

различных значениях параметров  $h$ ,  $\rho$  и  $\xi_N$ . Видно, что при разумно малых значениях  $\xi_N$  все  $C_i$  очень слабо зависят от  $h$  и  $\rho$ , поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что

$$C_i(h, \rho) = C_i(h = \rho = \xi_N = 0). \quad (4.49)$$

Приведем здесь значения  $C_i$ , которые будем использовать в дальнейшем

$$\begin{aligned} C_3 &= -0,555, \\ C_2 &= -C_3/2 = 0,277, \\ C_9 &= 0,973 \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$g^2/16\pi = 0,254; \beta_1 = -0,171; \beta_2 = 0,0158; \bar{\beta}'(g_1^2) = 0,458 \quad (4.51)$$

Если полученные ренормгрупповые константы  $Z_i$  разложить в ряд по  $g$  и перейти от  $g$  к  $g_0$  и от  $a$  к  $a^{(0)}$ , то совершенно точно восстановятся исходные ряды теории возмущений.

б) Интегральное представление для пропагатора померона

Следуя методике, подробно изложенной в первой части раздела 3(б), согласно формуле (3.67), можно сразу написать асимптотический вид пропагатора померона в двухпетлевом приближении

$$i\Gamma^{11}(E, k^2) = - \frac{(-E)^{1-C_3/2C_9} \bar{Z}_3^{-1} a_1}{1 - C_3/2C_9} \chi^{-C_3/C_9}. \quad (4.52)$$

$$\cdot \left[ 1 + \eta \left( 1 + \frac{C_2}{2C_9} \right) + \frac{\nu}{4} \left( 1 - \frac{C_5}{2C_9} \right) \right],$$

где

$$\bar{Z}_i = \Psi_i (1 + g/g_1)^{C_i},$$

и  $\eta$  и  $\nu$  в неявной форме заданы уравнениями

$$\rho_a = \frac{\alpha_0' K^2}{(-E)^{1+C_2/2C_9}} = \eta \Psi_2 \Psi_9^{-C_2/C_9} \bar{\chi}^{C_2/C_9}, \quad (4.53)$$

$$\rho_b = \frac{4\delta_0}{(-E)^{1-C_5/2C_9}} = \nu \Psi_5 \Psi_9^{-C_5/C_9} \bar{\chi}^{C_5/C_9}, \quad (4.54)$$

$$\bar{\chi} = g_1(\eta, \nu) \frac{\sqrt{\alpha_0'}}{z_0}. \quad (4.55)$$

Из уравнения (4.52) можно сделать вывод, что функциональный вид пропагатора померона в двухпетлевом приближении остался точно таким же, каким он был в однопетлевом случае, изменились только численные коэффициенты  $C_i$  и  $\bar{Z}_i$ .

Рассмотрим теперь уравнения (4.42)-(4.43) при малых  $h$  и  $\rho \sim g_1^4$ . Тогда из уравнений (4.44)-(4.48) имеем

$$\Psi_g(h \sim \rho \sim g_1^4) = 1; \quad C_3 = -0,555 = -C; \quad (4.56)$$

$$\bar{\gamma}_g \approx \frac{1}{2}; \quad \bar{\beta}' \approx \frac{1}{2,16}; \quad C_9 = 0,973 \approx 1.$$

Следовательно, при малых  $h$  и  $\rho$  можно записать

$$g^2 = g_1^2 \left( 1 + \frac{g_1^2}{2g_0^2} G \right), \quad (4.57)$$

где

$$G = 1 - \left( 1 + \frac{4g_0^2}{g_1^2} \right)^{1/2}. \quad (4.58)$$

Эта формула является двухпетлевым аналогом уравнения (3.69).

Подставляя сюда выражение  $g^2$  через  $E$ , получим

$$g^2 = g_1^2 \left( 1 - \frac{E}{2E_0} G \right), \quad (4.59)$$

$$G = 1 - \left( 1 - \frac{4E_0}{E} \right)^{1/2}, \quad (4.60)$$

$$E_0(\xi_N, \rho, h) = \frac{z_0^2}{\alpha_0' g_1^2(\xi_N, \rho, h)}, \quad (4.61)$$

$$1 - g^2/g_1^2 = \frac{E}{2E_0} G. \quad (4.62)$$

Подставляя формулу (4.52) в уравнения (4.42)–(4.43), получаем следующие выражения для констант перенормировок  $Z_i$  через  $E$  и  $E_0$ :

$$Z_3 = \beta^{-c} \exp[-c\alpha(1-\beta)], \quad (4.63)$$

$$Z_2^{-1} = \beta^{-c_2} \exp[-c_2\alpha(1-\beta)], \quad (4.64)$$

где

$$\beta = \frac{E}{2E_0} G, \quad (4.65)$$

$$\alpha = \beta_2/\beta_1^2. \quad (4.66)$$

Все дальнейшие расчеты будем проводить при  $\rho = 0$  и малых  $h$ . Из уравнения (3.61) имеем

$$\frac{\partial i\Gamma}{\partial E} \Big|_h = Z_3^{-1} \left[ 1 - \alpha'_0 Z_2^{-1} \frac{\partial K^2}{\partial E} \Big|_h \right] a_1. \quad (4.67)$$

Кроме того,

$$K^2 = -\frac{h}{\alpha'_0} E Z_2 = -\frac{h}{\alpha'_0} E \beta^{c_2} \exp[c_2\alpha(1-\beta)]. \quad (4.68)$$

Дифференцируя (4.68) по  $E$  получаем

$$-\alpha'_0 Z_2^{-1} \frac{\partial K^2}{\partial E} \Big|_h = h \left\{ 1 + \frac{1}{2} C_2 \frac{1-\beta}{1-\frac{1}{2}\beta} (1-\alpha\beta) \right\}. \quad (4.69)$$

Подставляя уравнения (4.63), (4.64) и (4.69) в (4.68), получаем

$$i\Gamma^{1,1}(E, K^2) = \int_0^E dE' \beta^{c_2} e^{c\alpha(1-\beta)} a_1 \left\{ 1 + h + \frac{1}{2} C_2 \frac{1-\beta}{1-\frac{1}{2}\beta} (1-\alpha\beta) \right\}. \quad (4.70)$$

При  $\xi_n < \xi_0$ ,  $E_0$  не зависит от  $E$  и уравнение (4.70) можно проинтегрировать. Получим

$$i\Gamma^{1,1}(E, K^2) = -\frac{2E_0}{2+c} \beta^{2+c} e^{c\alpha} \left\{ (1+h) [\Phi_1(2+c, 2, 3+c; \beta, -c\alpha\beta) - \right. \\ \left. - \frac{2+c}{2(3+c)} \beta \Phi_1(3+c, 2, 4+c; \beta, -c\alpha\beta) + \right. \quad (4.71)$$

$$\left. + \frac{h}{4} C_2 [\Phi_1(2+c, 1, 3+c; \beta, -c\alpha\beta) - \alpha\beta \frac{2+c}{3+c} \Phi_1(3+c, 1, 4+c; \beta, -c\alpha\beta)] \right\},$$

где  $\Phi_1(a, b, c; x, y)$  – вырожденная гипергеометрическая функция от двух переменных второго порядка.

На асимптотике при  $E/E_0 \ll 1$  имеем

$$\beta = 2x^{1/2} \left( 1 - x^{1/2} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \right), \quad (4.72)$$

где

$$x = -E/4E_0. \quad (4.73)$$

Разлагая все  $\Phi_1$  в (4.71) в ряды по  $\beta$ , которые в свою очередь надо разложить в ряды по степеням  $x$ , получим следующее асимптотическое выражение для пропагатора померона в двухпетлевом приближении с точностью до предасимптотических членов порядка  $x^2$

$$i\Gamma^{1,1}(E, K^2) = -\frac{E_0}{2+c} 2^{2+c} e^{c\alpha} x^{1+\frac{c}{2}} \left\{ 1 + h \left( 1 + \frac{C_2}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{2+c}{3+c} B_1 x^{1/2} + \frac{2+c}{4+c} B_2 x + \frac{2+c}{5+c} B_3 \left( x^{3/2} + \frac{2+c}{6+c} B_4 x^2 \right) \right\}. \quad (4.74)$$

Основное отличие уравнения (4.74) от (3.88), заключается в том, что кроме других констант  $C_i$ , в уравнении (4.74) появились полупетельные степени  $E/4E_0$ . Коэффициенты  $B_i$  в уравнении (4.74) являются функциями от  $h$  и имеют следующий вид:

$$B_1 = -(1+2\alpha) \left[ c + h \left( c + \frac{c^2}{2} (1+c) \right) \right], \quad (4.75)$$

$$B_2 = A_1 + h \left[ A_1 \left( 1 + \frac{c^2}{2} \right) + \frac{1}{2} c c_2 (1+2\alpha)^2 + 2c_2 \alpha \right], \quad (4.76)$$

$$B_3 = A_2 + h \left[ A_2 \left( 1 + \frac{c^2}{2} \right) + \frac{c^2}{4} (1-6\alpha) - c_2 (1+2\alpha) \left( 2c\alpha + \frac{1}{2} A_1 \right) \right], \quad (4.77)$$

$$B_4 = A_3 + h \left[ A_3 \left( 1 + \frac{c^2}{2} \right) + 2c_2 \alpha A_1 - \frac{c^2}{2} (1+2\alpha) \left( A_2 + \frac{c}{2} (1-6\alpha) \right) \right], \quad (4.78)$$

где

$$A_1 = \frac{c}{2} [c + 4\alpha(1+c(1+\alpha))], \quad (4.79)$$

$$A_2 = \frac{c}{6} (1-c^2) - c\alpha [(1+c)^2 + 2c\alpha(2+c + \frac{2}{3}c\alpha)], \quad (4.80)$$

$$A_3 = -\frac{c^2}{24} (4-c^2) + c^2 \alpha \left\{ \frac{1}{3} (2+c) + c + 4\alpha \left[ \left( 1 + \frac{c}{2} \right)^2 + c\alpha \left( 1 + \frac{c}{3} + \frac{c\alpha}{6} \right) \right] \right\}. \quad (4.81)$$

Рассмотрим теперь предел теории возмущений, т.е. , когда  $E_0/E \ll 1$ . При этом имеем.

$$\beta = 1 - \left( -\frac{E_0}{E} \right) + 2 \left( -\frac{E_0}{E} \right)^2 - 5 \left( -\frac{E_0}{E} \right)^3. \quad (4.82)$$

Следовательно, малой величиной, по которой можно вести разложение, является  $1-\beta$ . Подставляя (4.82) в (4.70), разлагая экспоненту в ряд и почленно интегрируя, получим

$$i\Gamma^{1,1}(E) = -2E_0 \left( \frac{\beta}{1-\beta} \right)^{2+c} e^{c\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-c\alpha)^n}{n!} \left( \frac{\beta}{1-\beta} \right)^n.$$

$$\cdot \left\{ \frac{1}{2+c+n} F \left( 1+c+n, 2+c+n; 3+c+n; \frac{\beta}{\beta-1} \right) - \right. \quad (4.83)$$

$$\left. - \frac{1}{2} \frac{\beta}{1-\beta} \frac{1}{3+c+n} F \left( 2+c+n, 3+c+n; 4+c+n; \frac{\beta}{\beta-1} \right) \right\}.$$

В пределе теории возмущений  $\beta/(\beta-1) \rightarrow \infty$ , поэтому разлагая гипергеометрические функции в асимптотические ряды, подставляя в них уравнения (4.82) и (4.44)-(4.48), окончательно получаем

$$i\Gamma^{1,1}(E) = E - \frac{\tau_0^2}{16\pi\alpha_0} \left[ \ln \left( \frac{E}{\tau_0} 16\pi\alpha_0 c_0 \right) + \psi(z) \right] -$$

$$- \frac{\tau_0^2}{16\pi\alpha_0} \left[ \ln(1-\alpha) - \frac{1}{c_0} (1-\alpha) e^{c\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-c\alpha)^n}{n!} (c+n) \psi(2+c+n) \right] + \quad (4.84)$$

$$+ \frac{\tau_0^4}{2(16\pi\alpha_0)} \frac{1}{E} \frac{1}{c_0} (c+3 - \alpha(4+c(2-\alpha))),$$

где  $c_0 = 0,116$  - критический показатель в однопетлевом случае. Численный коэффициент перед членом  $\sim \tau_0^2$  точно равен полученному в уравнении (3.91), а перед членом  $\sim \tau_0^4$  равен 8,8, (в однопетлевом приближении равен 9.6). Эта разница обусловлена приближением, сделанным в уравнении (4.56), где мы заменили  $c_0$  на единицу. Как уже было показано, ряд (3.91) точно совпадает с затравочным теоретико-возмущенческим рядом. Следовательно, ряд (4.84) является достаточно хорошим приближением к точному ответу. Поэтому в дальнейшем мы будем использовать приближение (4.56) и пропагатор (4.70).

в) Преобразование Зоммерфельда-Ватсона

Определим теперь поведение полного сечения при асимпто-

ческих значениях энергии. Для этого надо произвести преобразование Зоммерфельда-Ватсона (3.93) от пропагатора (4.47).

Получим

$$\sigma_{tot}(y) \propto F(y) = \frac{1+c/2}{\Gamma(1+c/2)} e^{-c\alpha} (\bar{E}_0 y)^{c/2} \left\{ 1 + \frac{2+c}{3+c} c(1+2\alpha) \cdot \frac{\Gamma(1+\frac{c}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{c}{2})} (4\bar{E}_0 y)^{-1/2} + \frac{c}{2} D_1 (4\bar{E}_0 y)^{-1} - \frac{1}{2} (1-c) \frac{\Gamma(1+\frac{c}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{c}{2})} \right\}. \quad (4.85)$$

$$\cdot D_2 (4\bar{E}_0 y)^{-3/2} - \frac{c}{2} (1-\frac{c}{2}) D_3 (4\bar{E}_0 y)^{-2} \},$$

где

$$\bar{E}_0 = \frac{\tau_0^2}{16\pi\alpha_0' c_0} (1-\alpha), \quad (4.86)$$

и

$$D_1 = \frac{2+c}{3+c} \left[ \frac{2+c}{3+c} c^2 (1+2\alpha)^2 - \frac{3+c}{4+c} A_1 \right], \quad (4.87)$$

$$D_2 = - \left( \frac{2+c}{3+c} \right)^2 c(1+2\alpha) \left[ \frac{2(3+c)}{4+c} A_1 - \frac{2+c}{3+c} c^2 (1+2\alpha)^2 \right] - \frac{2+c}{5+c} A_2, \quad (4.88)$$

$$D_3 = - \left( \frac{2+c}{3+c} \right)^2 c(1+2\alpha) \left\{ \frac{2(3+c)}{5+c} A_2 + \frac{2+c}{3+c} c(1+2\alpha) \cdot \left[ \frac{3(3+c)}{4+c} A_1 - \frac{2+c}{3+c} c^2 (1+2\alpha)^2 \right] \right\}. \quad (4.89)$$

Выражение (4.85) очень похоже на однопетлевое сечение (3.94), только сейчас возросла скорость роста полных сечений: если в однопетлевом случае сечение росло как  $y^{0,166}$ , то сейчас оно растет как

$$\sigma_{tot}(y) \propto (\bar{E}_0 y)^{0,277}, \quad (4.90)$$

что хорошо согласуется с результатом Карди [26]. Аналитическая структура пропагатора в  $E$ -плоскости при  $h=p-\xi_0=0$

показана на рис.3.

При  $h=\xi_0=0$  и  $p \neq 0$ , структура сингулярностей в  $E$ -плоскости имеет вид рис.5, и полное сечение экспоненциально убывает

$$\sigma_{tot}(y, \delta_0) \propto e^{-\delta_0 y} (1-c\delta/2). \quad (4.91)$$

При  $\xi_0 \neq 0$  и  $p=h=0$  полное сечение на асимптотике имеет вид

$$\sigma_{tot}(y, \xi_0) \propto (\bar{E}_0 y)^{c/2} \left\{ 1 + \frac{2+c}{3+c} c(1+2\alpha) \frac{\Gamma(1+c/2)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{c}{2})} \cdot (4\bar{E}_0 y)^{-1/2} (1+(2\xi_0 \bar{E})^{1/2}) \right\}.$$

Таким образом, как и в однопетлевом случае (уравнение (3.96)), введение порога рождения померона влияет только на скорость подхода к масштабному пределу, но не изменяет сам предел. На рис.12 проведено сравнение асимптотического решения (4.85) с рядом теории возмущений, взятом с точностью до членов  $\sim \tau_0^6$ . Из рисунка видно, что хотя точное совпадение решений наступает при  $y = \bar{E}_0^{-1} = 17,6$ , что соответствует энергии  $S = 4,8 \cdot 10^7 \text{ ГэВ}^2$ , тем не менее уже при достаточно малых энергиях эти две кривые идут близко друг к другу, т.е. можно сказать, что при достижимых в настоящее время энергиях мы находимся в самом начале переходной области, и повышение энергии на 2 порядка уже должно привести к асимптотическому поведению полных сечений, растущих с  $E$  согласно уравнению (4.90).

Получим теперь дифференциальное сечение в асимптотическом пределе. Будем действовать точно так, как в однопетлевом случае.

Имеем

$$h = -\frac{\alpha_0 k^2}{E} \beta^{-c_2} e^{c_2 \alpha(1-\beta)}, \quad (4.93)$$

$$E_0(h) = \frac{\bar{E}_0}{1+Bh}, \quad (4.94)$$

где  $\bar{E}_0$  определено в уравнении (4.86) и  $B = 0,3106$ . Из рис. 6 видно, что  $c_3(h)$  и  $c_2(h)$  при малых  $\bar{E}_N$  практически не изменяется в интервале  $0 \leq h \leq 10$ , поэтому, во всех дальнейших расчетах будем принимать их заданными уравнениями (4.50) и (4.51). На асимптотике  $\beta$  имеет вид уравнения (4.72). Решая уравнение (4.93) методом итераций, получаем

$$-\frac{E}{\bar{E}_0} = \rho \varphi_1(h) + \rho^{3/2} \varphi_2(h), \quad (4.95)$$

где

$$\rho = \left( \frac{\alpha_0 k^2}{\bar{E}_0} 2^{c_2} e^{\alpha c_2} \right)^2 / (1+c_2), \quad (4.96)$$

$$\varphi_1(h) = h^{-\frac{2}{2+c_2}} (1+Bh)^{-\frac{c}{2+c_2}}, \quad (4.97)$$

$$\varphi_2(h) = \frac{c_2(1-\alpha)}{2+c_2} \varphi_1^{3/2}(h) (1+Bh)^{1/2}, \quad (4.98)$$

Для главного члена имеем

$$-\frac{E}{\bar{E}_0} = \rho h^{-\frac{2}{2+c_2}} (1+Bh)^{-\frac{c}{2+c_2}}. \quad (4.99)$$

Обратный пропагатор в этом приближении имеет вид

$$i\Gamma^{11}(E, k^2) = \frac{E_0(h)}{1+\frac{c}{2}} e^{c\alpha} \left( -\frac{E}{E_0(h)} \right)^{1+\frac{c}{2}} \frac{h-h_0}{h_0}, \quad (4.100)$$

где

$$h_0 = -\frac{1}{1+c_2/2}. \quad (4.101)$$

Структура сингулярностей в  $E$  и  $h$  - плоскостях в двухпетлевом случае точно такая же, что и на рис. 6 и 7. Из уравнения (4.99) имеем

$$dE = \frac{2}{2+c_2} \frac{E}{y} \frac{dh}{h} \varphi_1(h) \varphi_3(h), \quad (4.102)$$

где

$$x = (\rho \bar{E}_0 y)^{\frac{2+c_2}{2}}, \quad (4.103a)$$

$$\xi = x^{\frac{2}{2+c_2}} \quad (4.103b)$$

$$\varphi_3(h) = 1 + \frac{c_2}{2} \frac{Bh}{1+Bh}. \quad (4.103c)$$

Из (4.102) видно, что критическая точка находится теперь в

$$h_c = -\frac{2}{B(2+c_2)}. \quad (4.104)$$

Подставляя все это в уравнение (3.93), делая замену переменной  $E \rightarrow h$  и переходя от интегрирования по контуру к интегралу в смысле главного значения окончательно получаем

$$F(y, k^2) = \frac{1+c/2}{\Gamma(1+c/2)} (\bar{E}_0 y)^{c/2} F_1(x), \quad (4.105)$$

где  $F_1(0) = 1$  и

$$F_1(x) = -\frac{h_0 \Gamma(2+c)}{2+c_2} \left\{ \frac{1}{\pi} \rho \int_0^{\infty} dh \frac{\text{Im} f_0(h, x)}{h-h_0} - \text{Re} f_0(h+i\epsilon, x) \right\}, \quad (4.106)$$

и

$$f_0(h, x) = \frac{1}{h} (\xi \varphi_1(h))^{-\frac{c}{2}} (1+Bh)^{-\frac{c}{2}} \varphi_3(h) e^{\xi \varphi_1(h)}. \quad (4.107)$$

Несмотря на несколько другие численные значения параметров, функция  $F_1(x)$  из формулы (4.106) почти точно совпадает с

с однопетлевой функцией, определяемой из уравнения (3.128), их графики практически не отличаются и можно считать, что эта функция представлена на рис.8.

Вычисление второго члена проходит аналогично однопетлевому случаю, и опять он дает вклад порядка реальной части амплитуды. Здесь остаются в силе все рассуждения, приведенные в конце предыдущей главы.

### 5. Заключение

В работе развит общий метод конструирования явного представления для пропагатора померона, при введении дополнительных безразмерных параметров, таких, как порог рождения померона  $\xi_0$  или смещение интерсепта  $\delta_0$ . Кроме того, появилась возможность вычисления вклада пропагатора померона в угловое распределение упругого сечения. Показано, что развитый метод применим и в однопетлевом, и в двухпетлевом приближениях.

Проблемы, связанные с  $K^2$  и с субкритическим помероном (перенормированный интерсепт  $\alpha_P(0) < 1$ ), существенно отличаются от проблемы введения порога. Порог приводит к безразмерному параметру типа  $\xi_N = -\xi_0 E$ , который можно назвать "несущественным" параметром, так как он не дает никаких эффектов в асимптотическом пределе. Действительно, на асимптотике, когда  $E \rightarrow 0$ ,  $\xi_N \rightarrow 0$ , и все величины принимают при этом те же значения, какие они имели при отсутствии порога. Другими словами они достигают той же самой стабильной фиксированной точки, что и в случае  $\xi_0 = 0$ , и отсутствие зависимости от порога является примером Вильсоновской универсальности [7]. Большие значения параметра  $\xi_N$  ( $\xi_N > 0,1$ ) не имеют физического смысла, так как

из экспериментальных данных следует, что  $\xi_0 \approx 2$  и большие  $\xi_N$  соответствуют большим  $E$ , очень далеким от интересующих нас асимптотических значений.

С другой стороны, зависимость от  $K^2$  и субкритический померон являются примером "нетривиальных" параметров. Например, величина  $\delta$  показывает, насколько далеко от единицы лежит интерсепт померона. Соответствующий безразмерный параметр  $\rho = -4\delta/E$ , является нетривиальным, так как он существенно изменяет асимптотическое поведение. Предел  $E \rightarrow 0$  не приводит критические показатели к тем значениям, которые они имели при  $\delta = 0$ . Другими словами, фиксированная точка нестабильна по отношению к изменениям затравочного интерсепта.

Из физических соображений надо было ожидать, что для субкритического померона не будет фиксированной стабильной точки: при асимптотических энергиях главной сингулярностью в этом случае является простой перенормированный померонный полюс. Так как при этом не происходит накопления сингулярностей и нет критического феномена, асимптотическое решение не может быть охарактеризовано подходом к фиксированной точке.

Несмотря на то, что параметры  $\rho$  и  $h$  являются нетривиальными, тем не менее в [14,15,19] был разработан способ работы с ними. Он заключался в том, что сконструировалось интегральное представление для пропагатора с соответствующим набором фиксированных безразмерных параметров (фиксировались  $h$  или  $\rho$ , и не фиксировались  $K^2$  или  $\delta$ ). В случае субкритического померона это приводило к экспоненциально падающим полным сечениям (уравнение (3.106) или (4.91)).

Наши результаты по дифференциальным сечениям согласуются с результатами [19] и [14,15], хотя результат [14,15] был получен в  $\mathcal{E}$  - разложении и только в однопетлевом приближении.

Рассмотрим подробнее вопрос об асимптотике полных сечений. Как было показано в [23], правильный учет энергетической зависимости коэффициентов ливневого усиления приводит к тому, что в интервале энергий от 500 до 50000 ГэВ полные сечения растут как  $\ell_n^2 S$ , и этот рост обусловлен "вымиранием" вкладов квазилинейных неусиленных ветвлений [5,6], без учета каких бы то ни было усиленных графов. С ростом энергии скорость роста полного сечения замедляется, и при энергиях выше 100.000 ГэВ сечение растет как

$$\sigma_{tot} = A - \frac{B}{\ell_n S} \quad (5.1)$$

Если не учитывать усиление диаграммы, такое поведение будет продолжаться до бесконечности. Рассмотрим теперь, что произойдет, если включить усиленные графы. Первая диаграмма типа (3.2) появляется при энергиях больше 1000 ГэВ, графы типа (4.1) начинают работать при  $Y > 16$ , при дальнейшем росте энергии включаются диаграммы все более и более высоких порядков. Все это происходит на фоне обычных неусиленных диаграмм, которые дают вначале сечение, растущее как  $\ell_n^2 S$ , а потом изменяющееся по уравнению (5.1). Согласно рис.12 асимптотическое поведение вкладов усиленных диаграмм должно начинаться от энергий  $Y > 8$ .

но при этих энергиях еще достаточно велик вклад неусиленных графов. Поэтому нет однозначного ответа, из-за какого механизма происходит рост сечений: из-за неусиленных диаграмм или

из-за асимптотической формы пропагатора померона. Для выяснения этого вопроса необходимы измерения полных сечений с 1% ошибкой при совершенно фантастических энергиях порядка нескольких миллионов гигаэлектронвольт. Поэтому то, что мы говорили в конце 3 и 4 глав о начале переходной области, относилось только к вкладу усиленных диаграмм в полный пропагатор померона. Для конкретных предсказаний необходимо учитывать все вклады от неусиленных и полусиленных диаграмм. Способ их учета достаточно подробно разработан в работах [5,6,16,17,21, 22, 23, 25].

В заключение авторы выражают благодарность А.Ц.Аматуни за постоянный интерес к работе и стимулирующие обсуждения, С.Г.Матиняну, А.Б.Кайдалову, Л.Н.Липатову, К.Г.Борескову, А.А.Григоряну, Г.К.Саввиди, А.Г.Седракину за продолжительные и плодотворные дискуссии.

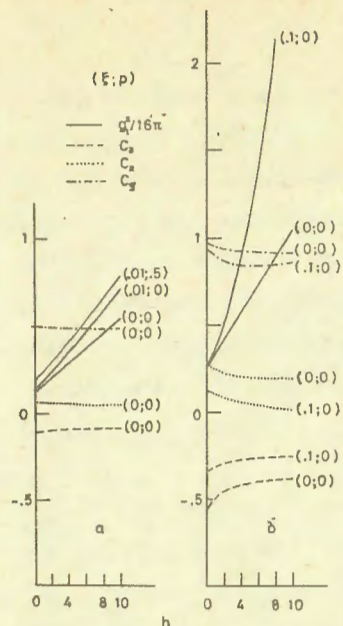


Рис.1 Критические показатели  $C_3$ ,  $C_2$  и  $C_1$ , и  $q_1^2/16\pi$  как функции от  $h$ ,  $\rho$  и  $\xi_N$ : а) в однопетлевом приближении б) в двухпетлевом приближении.

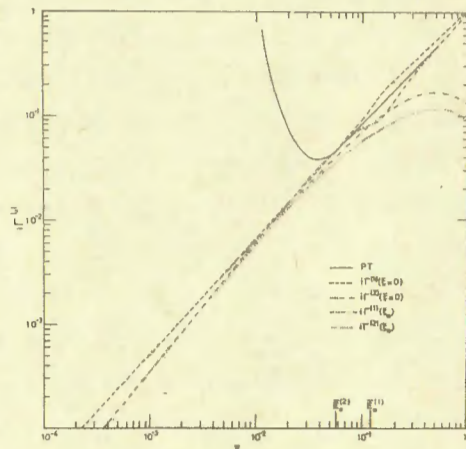


Рис.2 Сшивка теории возмущений, асимптотического и точного решений для пропагатора померона.

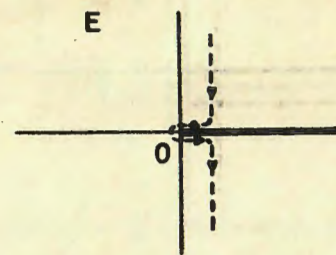


Рис.3 Структура сингулярностей в  $E$  - плоскости при  $\kappa^2 = \delta_0 = 0$ . Пунктиром показан контур интегрирования в (3.93).

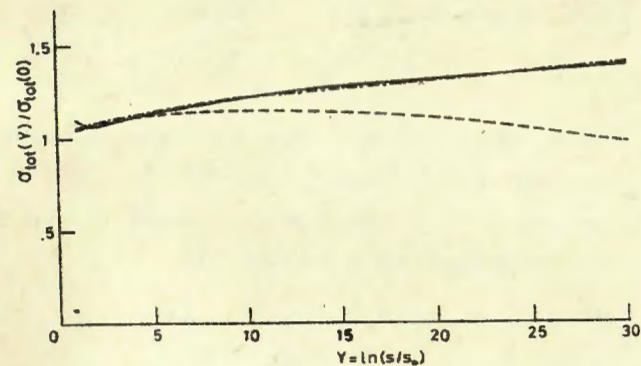


Рис.4 Сравнение полных сечений, полученных из теории возмущений и из масштабного решения (3.96). Сплошная линия - асимптотическое решение уравнения (3.96). Пунктирная - теория возмущений до членов  $\sim z^2$ . Пунктирная с точками - теория возмущений до членов  $\sim z^4$ .

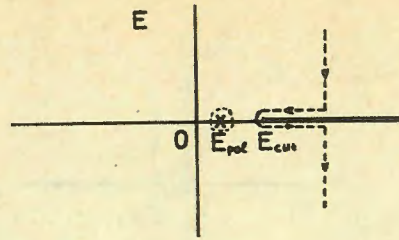


Рис.5 Структура сингулярностей в  $E$  - плоскости при  $\rho \neq 0$  и  $K^2 = \xi_0 = 0$ .

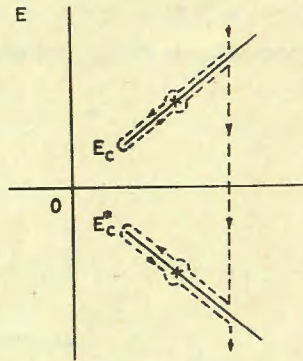


Рис.6 Сингулярности асимптотического пропагатора померона в комплексной  $E$  - плоскости при  $K^2 > 0$ . Крестик показывает положение полюса, соответствующего  $h_0$ . Пунктиром показан контур интегрирования в (3.93).

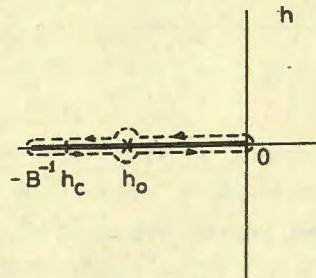


Рис.7 Сингулярности асимптотического пропагатора померона в комплексной  $h$  - плоскости. Крестик указывает положение полюса  $h_0$ , а точка  $h_c$  является образом точек ветвления в  $E$  - плоскости.

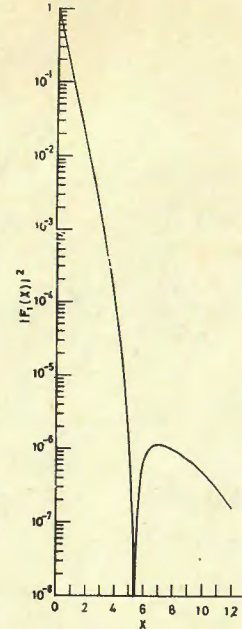


Рис.8 Квадрат асимптотической масштабной функции  $F_1^2(x)$  (уравнение (3.128)).

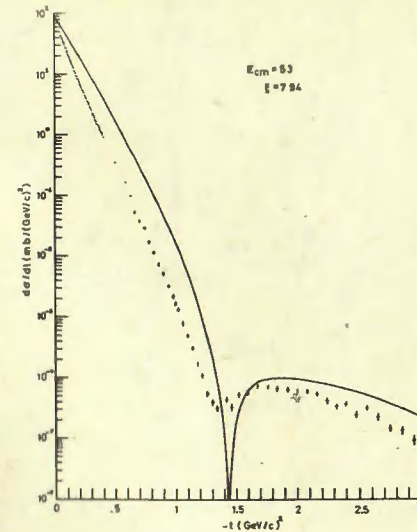


Рис.9 Сравнение между данными ISR при  $E_{cm} = 53$  ГэВ. и асимптотическим решением уравнения (3.129).

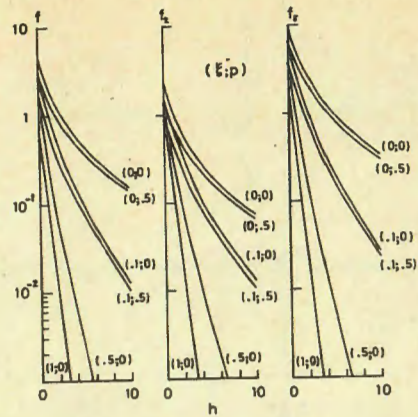


Рис. 10 Зависимость функций  $f$ ,  $f_2$  и  $f_e$  от  $h$ ,  $\rho$  и  $\xi_N$ , полученная в результате численных расчетов диаграмм из уравнения (4.1).

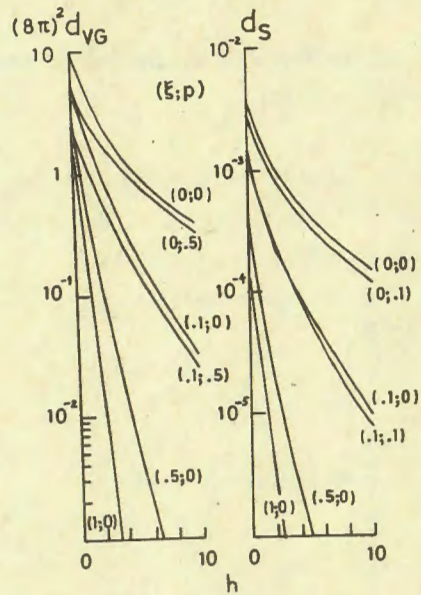


Рис. 11 Зависимость функций  $d_{vg}$  и  $d_s$  от  $h$ ,  $\rho$  и  $\xi_N$ , полученная из уравнений (4.15), (4.16) и (4.20).

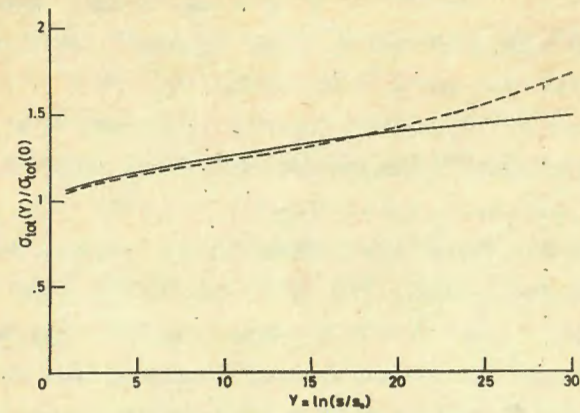


Рис. 12 Сравнение полных сечений, полученных из теории возмущений и из масштабного решения (4.92). Сплошная линия - асимптотическое решение. Пунктирная - теория возмущений до членов  $\sim \tau_0^6$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грибов В.Н., Мигдал А.А. Свойства полюса Померанчука и связанных с ним ветвлений при малых переданных импульсах. - ЯФ, 1968, т.8, вып.5, с.1002-1016.
2. Грибов В.Н., Мигдал А.А. Квазистабильный полюс Померанчука и дифракционное рассеяние при сверхвысоких энергиях. ЯФ, 1968, т.8, вып.6, с.1213-1227.
3. Грибов В.Н., Мигдал А.А. Сильная связь в задаче о полюсе Померанчука. ЖЭТФ, 1968, т.55, вып.4(10), с.1498-1521.
4. Мигдал А.А., Поляков А.М., Тер-Мартirosян К.А. Теория взаимодействующих померонов и адронные реакции при высокой энергии. В кн. Проблемы ядерной физики и физики элементарных частиц. М.: Наука, 1975, с.147-184.
5. Еремьян Ш.С., Назарян А.Э. Точное суммирование квазиэйковального ряда. ЯФ, 1978, т.28, вып.5(II), с.1408-1418.
6. Еремьян Ш.С., Назарян А.Э., Солахян В.П. Перенормировка вершинной функции померон-частица в древесном приближении. Труды IV конференции молодых ученых ЕрФИ, Ереван, 1980, с.11-20.
7. Вильсон К., Когут Дж. Ренормализационная группа и  $\epsilon$  - разложение. М.: Мир, 1975.
8. Abarbanel H.D.I., Bronzan J.B. Structure of the Vacuum Singularity in Reggeon Field Theory.- Phys.Lett., 1974, vol.48B, N.4, p.345-349.
9. Abarbanel H.D.I., Bronzan J.B. Structure of the Pomeron Singularity in Reggeon Field Theory.- Phys.Rev., 1974, vol.D9, N.8, p.2397-2411.
10. Abarbanel H.D.I. Hadron Dynamics.- Proceedings of Summer Institute on Particle Physics vol.1, SLAC Rep.N.179, 1974, vol.1, p.3999-445.
11. Sugar R.L., White A.R. Construction of the Reggeon Calculus in 4- Dimensions.- Phys.Rev., 1974, vol.10, N.12, p.4074-4087.
12. White A.R. The Reggeon Calculus and Diffraction Scattering. - Ref.TH.2137-CERN, 1976
13. Sugar R.L., White A.R. Renormalization-group sum rules and the construction of massless field in 4- dimensions.- Phys.Rev., 1974, vol.D10, N.12, p.4063-4074.
14. Abarbanel H.D.I., Bartels J., Bronzan J.B. et al. Inclusive Cross Sections and Angular Distributions in Reggeon field Theory.- Phys.Rev., 1975, vol.D12, N.9, p.2798-2815.
15. Abarbanel H.D.I., Bartels J., Bronzan J.B., Sidhu P. Reggeon diagram technique for inclusive processes in the tripple-regge limit.- Phys.Rev., 1975, vol.D12, N.8, p.2459-2482.
16. Baker M., Ter-Martirosyan K.A., Gribov's Reggeon Calculus: its physical basis and implications.- Phys.Rep., 1976, vol.28C, N.1, p.1-143.
17. Capella A., Kaidalov A.B. Hadron-Hadron and Hadron-Nucleus Scattering in Reggeon Calculus with Energy-Momentum Conservation.- Nucl.Phys., 1976, vol.B111, N.3, p.477-501.
18. Moshe M. Recent Developments in Reggeon Field Theory.- Phys.Rep., 1978, vol.37C, N.3, p.255-345.
19. Frazer W.R., Hoffman H., Fulco J.R., Sugar R.L. Representations of the Pomeron Propagator.- Phys.Rev., 1976, D14, N9, p.2387-2402.

20. Moshe M., Central Rapidity Region at Asymptotic and Non-asymptotic Energies.-Phys.Rev., 1976,vol.D14,N.9,p.2383-2387.
21. Capella A., Kaplan J. Behaviour of the Proton-Proton Total Cross Section at ISR Energies in the Reggeon Calculus-Phys.Lett., 1974,vol.52B,N.4,p.448-453.
22. Kaidalov A.B., Diffractive Production Mechanisms.-Phys. Rep., 1979, vol.50C,N.3,p.157-225.
23. Ш.С.Еремян. Дифракционное рассеяние и зависимость коэффициентов ливневого усиления от энергии и переданного импульса. ЯФ, 1978, т.27, вып.1, с.259-276.
24. Abarbanel H.D.I.,Bronzan J.B.,Schwimmer A.,Sugar R.L. Intercept of the Pomeron.-Phys.Rev.,1976,vol.D14,N.2, p.632-647.
25. Еремян Ш.С. Упругое  $NN - \bar{N}N$  - рассеяние в "квазиэйко-нальной" модели. ЯФ, 1976, т.24, вып.1, с.201-207.
26. Bronzan J.B.,Dash J.W. Higher Order -Terms in Reggeon Field Theory.-Phys.Rev.,1974,vol.D10,N.12,p.4208-4218.
27. Dash J.W.,Harrington S.J. Renormalization Point Invariance Twisted Fans, and Critical Exponents at Finite in the Reggeon Calculus.-Phys.Lett., 1975,vol.57B,N.1,p.78.
28. Dash J.W.,Harrington S.J. The n-Loop Expansion of the Reggeon Calculus.-Phys.Lett., 1975,vol.59B,N.3,p.249-253.
29. Harrington S.J. The 3-loop Calculation of Critical Exponents in the Reggeon Calculus.- Phys.Lett.,1976,vol.62B, N.4, p.433-435.
30. Baker M., Higher Order Terms in the Expansion of the Pomeron Propagator.-Phys.Lett.,1974,vol.51B,N.2,p.158-161.

31. Cardy J.L. Perturbation Theory at Large Order in Reggeon Field Theory.- Ref. TH.2315-CERN, 1977.
32. Cardy J.L. The Critical Exponents of Reggeon Field Theory Phys.Lett., 1977,vol.67B, N.1,p.97-100.
33. Bronzan J.B., Shapiro J.A., Sugar R.L. Reggeon field Theory in Zero Transverse Dimensions.-Phys.Rev.,1976,vol.D14, N.2, p.618-632.
34. Dash J.W. Thresholds and the Temperature of the Reggeon Field Theory.-Phys.Lett.,1976,vol.61B, N.1,p.53-57.
35. Della A., Selva, Garcia A., Garcia C.A.Ganal, Masperi L., Parga N. Thresholds in Reggeon Field Theory.-Phys.Lett. 1976,vol.62B, N.3, p.311-315.
36. Еремян Ш.С., Назарян А.З. О перенормируемости реджеонной теории поля с учетом порогов и массовых членов при  $D = 2$ . Препринт ЕИИ,530(17)-82, Ереван 1982.

Рукопись поступила 6 января 1982 г.

Редактор Л.П.Мукаян  
Тех.редактор А.С.Абрамян

Заказ I68 ВФ-05176 Тираж 299

Препринт ВФИ Формат издания 60x84/16

Подписано к печати 23/IV-82 2.9 уч.изд.л.Ц.29 к.

Издано Отделом научно-технической информации  
Ереванского физического института, Ереван-36, пер.Маржаряна 2