ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЕФИ-538(25)-82

А.В.ГАЙДУК, О.М.ХУДАВЕРДЯН, А.С.ШВАРЦ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ПОВЕРХНОСТЯМ В СУПЕРПРОСТРАНСТВЕ

ԵՐԵՎԱՆ 1982 ЕРЕВАН

ЕФИ-538(25)-82

УДК.53.001.1

А.В.ГАЙДУК,* О.М.ХУДАВЕРДЯН, А.С.ШВАРЦ *

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ПОВЕРХНОСТЯМ В СУПЕРПРОСТРАНСТВЕ

Изучаются (m, n) плотности - наиболее общие объекты, которые можно интегрировать по (m, n) - мерной поверхности в суперпространстве. Показывается, что интегральные формы Бернштейна--Лейтеса можно интерпретировать как плотности; характеризуется класс плотностей, отвечающих этим формам.

Ереванский физический институт

Ереван 1982

* Московский инженерно-физический институт.

ЕФИ-538(25)-82

A.V.GAIDUK*, O.M.KHUDAVERDIAN, A.S.SCHWARZ*

INTEGRATION OVER SURFACES IN A SUPERSPACE

(m,n) densities - the most general objects which may be integrated over (m,n)-dimensional surface in a superspace are studied. It is shown that the Bernstein-Leites integral forms may be interpreted as densities; the class of densities corresponding to these forms is characterized.

Yerevan Physics Institute

Yerevan 1982

* Moscow Physical Engineering Institute

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЕФИ-538(25)-82

А.В.ГАЙДУК, О.М.ХУДАВЕРДЯН, А.С.ШВАРЦ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ПОВЕРХНОСТЯМ В СУПЕРПРОСТРАНСТВЕ

Ереван 1982

Во многих ситуациях приходится иметь дело с интегрированием по поверхности, лежащей в суперпространстве. Объекты, которые можно интегрировать по такой поверхности, рассматривались в ряде работ [I-6] . В частности, в работах [3-6] было введено понятие (m, n) - плотности ранга K . К этому понятию мы приходим, рассматривая интегралы вида

$$\int A\left(z^{B}(\zeta^{R}), \frac{\partial z^{B}}{\partial \zeta^{R}}, \ldots, \frac{\partial^{k} z^{B}}{\partial \zeta^{R_1} \ldots \partial \zeta^{R_k}}\right) d\zeta^{m+n}, \tag{I}$$

где $z=(y,\theta)$ - точка (M, N) - мерного суперпространства $E^{M,N}$, $\zeta=(x,\nu)$ пробегает (m, n) - мерное суперпространство; $z(\zeta)$ - параметрическое уравнение (m, n) - мерной поверхности Ω в суперпространстве $E^{M,N}$. Если интеграл (I) не меняется при репараметризации поверхности Ω (т.е. при переходе от параметрического уравнения $z=f(\zeta)$ к уравнению $z=f(g(\zeta))$, то функция A называется (m, n) - плотностью ранга K (ранг плотности - это максимальный порядок производных, от которых зависит функция A). Понятие плотности оказалось полезным при построении формализма квантовой теории поля, в котором полевые и координатные переменные равноправны [3,5] . В настоящей работе мы будем изучать (m, n) – плотности ранга I. Мы установим, в частности, что интегральные формы Бернштейна-Лейтеса [I] можно рассматривать как частный случай плотности ранга I.

Приведем основные определения. Под отображением суперпространства будем понимать всегда отображение с грассмановыми коэффициентами. Точнее, мы будем говорить, что суперпространство с координатами (x, v) отображается в суперпространство с координатами (y, θ), если

$$y = f(x, v),$$
$$\theta = \varphi(x, v),$$

где f – четные, а φ – нечетные функции с грассмановыми коэффициентами. Функция на суперпространстве определяется как выражение вида

$$f = \sum_{\alpha} f_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x)\, v^{\alpha_1} \dots v^{\alpha_n}, \qquad (2)$$

где $f_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x)$ – числовые бесконечно дифференцируемые функции. (Функция с грассмановыми коэффициентами определяется как линейная комбинация выражений вида (2) с коэффициентами, принадлежащими произвольной грассмановой алгебре).

Пусть, задано отображение $\zeta \to f(\zeta)$ пространства $E^{m,n}$ в $E^{M,N}$. Будем считать дифференциал $\mathcal{D}f(\zeta)$ этого отображения несингулярным оператором. (Дифференциал $\mathcal{D}f(\zeta)$ можно рассматривать как линейный оператор с матрицей $\frac{\partial z^A}{\partial \zeta^R}$). В случае $m \le M, n \le N$ линейный оператор, действующий из $E^{m,n}$ в $E^{M,N}$ мы называем несингулярным, если его образ является (m, n) – мерной плоскостью в $E^{M,N}$. Мы будем говорить, что рассматриваемое отображение задает (m, n) – мерную поверхность в $E^{M,N}$, два отображения f и f' задают одну и ту же поверхность, если существует такое обратимое отображение g суперпространства $E^{m,n}$ в себя, что $f' = f \circ g$. Отображение g называется репараметризацией поверхности. (Данное выше определение поверхности локально; это же замечание относится ко всем дальнейшим рассмотрениям. Переход к исследованию поверхности в целом производится стандартными методами и не вызывает каких-либо затруднений). От параметрического задания поверхности, описанного только что, можно перейти к заданию поверхности с помощью уравнений, т.е. можно определить поверхность уравнениями

$$\varphi_\ell(z) = 0, \quad \varphi_\lambda(z) = 0; \quad \ell = 1, \dots, M-m, \ \lambda = 1, \dots, N-n,$$

где φ_ℓ и φ_λ – соответственно, четные и нечетные функции. Часто удобно объединять четные и нечетные уравнения, вводя обозначение $\Phi_L = (\varphi_\ell, \varphi_\lambda)$. Тогда уравнение поверхности записывается в виде

$$\Phi_L(z) = 0 \tag{3}$$

Функции $\varphi_\ell(z)$ и $\varphi_\lambda(z)$ определяют отображение $E^{M,N}$ в $E^{M-m,N-n}$.

Мы требуем, чтобы дифференциал этого отображения был несингулярен (оператор S, действующий из $E^{M,N}$ в $E^{M-m,N-n}$, мы называем несингулярным в случае, когда уравнение $Sz = 0$ определяет (m, n) – мерную плоскость в $E^{M,N}$). Если $\eta_L^{L'}(z)$ функция на $E^{M,N}$, принимающая значения в множестве обратимых линейных операторов, действующих в $E^{M-m,N-n}$, то уравнения

$$\Phi'_L(z) = 0,$$

где $\Phi'_L(z) = \eta_L^{L'}\Phi_{L'}(z)$, определяют ту же самую поверхность. (Доказательство возможности перехода от задания поверхности с помощью уравнений к параметрическому заданию см. в [7]).

Рассмотрим функцию $A(z, R)$, где z – точка суперпространства $E^{M,N}$, R – несингулярный линейный оператор, действующий из $E^{m,n}$ в $E^{M,N}$. Функцию $A(z, R)$ мы будем называть плотностью, если

$$A(z, RL) = A(z, R)\,\mathrm{Ber}\,L \tag{4}$$

для любого оператора L, действующего в $E^{m,n}$. Легко проверить, что условие (4) гарантирует, что интеграл

$$\int\limits_{\Omega} A(z(\zeta), \mathcal{D}z(\zeta))\,d^{m+n}\zeta$$

не зависит от выбора параметризации $z = z(\zeta)$ поверхности Ω. Таким образом, функцию $A(z, R)$, удовлетворяющую условию (4), можно рассматривать как (m, n) – плотность ранга I в указанном выше смысле. В настоящей статье рассматриваются только плотности ранга I, поэтому мы назвали $A(z, R)$ просто (m, n) – плотностью *.

Нет необходимости требовать, чтобы плотность $A(z, R)$ была определена для всех несингулярных операторов R, мы предположим, однако, что замыкание операторов, на которых плотность не определена, нигде не плотно и что функция $A(z, R)$ непрерывна там, где она определена.

Приведем примеры плотностей. Заметим прежде всего, что понятие формы объема в суперпространстве $E^{M,N}$ совпадает с понятием (M, N) – плотности в $E^{M,N}$. Напомним, что форма объема записывается в виде $f(z)\,V(z)$, где $f(z)$ функция на

* Отметим, что в случае отсутствия нечетных координат $(N = n = 0)$ вводимые нами плотности сведутся к обычным m – плотностям в E^N, которые подробно рассматривались в [4].

$E^{M,N}$, а $V(z)$ – символ, преобразующийся при замене переменных $W \to z$ по формуле

$$V(z) = \mathrm{Ber}\, \mathcal{D}z(W)\, V(W).$$

Интеграл от $f(z)V(z)$ по пространству $E^{M,N}$ определен как $\int f(z) d^{M+N} z$. Далее отметим, что при отображении F пространства $E^{M,N}$ в пространство $E^{M',N'}$ (m,n) – плотность $A(W,Q)$ в $E^{M',N'}$ переходит в (m,n) – плотность в пространстве $E^{M,N}$, а именно, если A плотность в $E^{M',N'}$, то ей отвечает плотность $A' = F^* A$ в $E^{M,N}$, определяемая формулой

$$A'(z,R) = A(f(z), \mathcal{D}f(z) \cdot R), \tag{5}$$

где $\mathcal{D}f(z)$ – дифференциал отображения f.

Сделанное замечание позволяет построить по форме объема в $E^{m,n}$ (m,n) – плотность в $E^{M,N}$, рассмотрев отображение F пространства $E^{M,N}$ в $E^{m,n}$. Если F – линейное отображение, то форма объема ((m,n) – плотность в $E^{m,n}$) переходит в (m,n) – плотность в $E^{M,N}$, задаваемую формулой

$$A(z,R) = \mathrm{Ber}\,(FR). \tag{6}$$

Плотности вида(6), а также их произвольные линейные комбинации с коэффициентами, зависящими от z, будем называть плотностями типа Ber. В частности, плотностями типа Ber являются выражения вида

$$A = \sum_{i,j} a_{i_1 \dots i_m j_1 \dots j_n}(z)\, \mathrm{Ber}(R_{i_1 \dots i_m j_1 \dots j_n}). \tag{7}$$

Здесь $R_{i_1 \dots i_m j_1 \dots j_m}$ – матрица с элементами R_{rs}, $r = i_1, \dots i_n$, $s = j_1, \dots j_s$, а $a_{i_1 \dots i_m j_1 \dots j_n}(z)$ – произвольные функции.
* $R_{i_1, \dots, j_n}$ – матрица состоит их $(m+n)$ строк матрицы оператора R с индексами $i_1, \dots, i_m, j_1, \dots, j_n$.

Отметим, что в случае, когда имеются только четные координаты $(E^{M,N} = E^M)$, всякой m - мерной дифференциальной форме

$$\omega = \sum a_{i_1 \dots i_m}(z)\, dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_m}$$

можно сопоставить m - плотность вида (7). Это вытекает из соотношения

$$\int_\Omega \omega = \int a_{i_1 \dots i_m}(z) \frac{\mathcal{D}(z_{i_1} \dots z_{i_m})}{\mathcal{D}(\zeta_1 \dots \zeta_m)} d^m \zeta ,$$

где $\dfrac{\mathcal{D}(z_{i_1} \dots z_{i_m})}{\mathcal{D}(\zeta_1 \dots \zeta_m)}$ означает детерминант матрицы

$$A_{ij} = \frac{\partial z_i}{\partial \zeta_j} .$$

Легко проверить, что в рассматриваемом случае $(N = 0)$ всякая плотность типа Ber отвечает некоторой дифференциальной форме. В самом деле, если плотность A отвечает форме ω, то плотность F^*A отвечает форме $F^*\omega$. Используя этот факт и замечая, что форму объема можно рассматривать как дифференциальную форму, убеждаемся, что плотность типа Ber отвечает некоторой дифференциальной форме. Отметим, что в суперслучае плотности типа Ber не обладают многими из свойств, имеющих место в обычном пространстве. В частности, при $N > 0$ не всякая плотность типа Ber может быть представлена в виде (7). (При $N = 0$ мы доказали, что всякая плотность типа Ber отвечает дифференциальной форме и, следовательно, записывается в виде (7).

Интересный класс $(m, 0)$ - плотностей может быть определен с помощью формулы

$$A(z, R) = \sum_{\alpha, \beta} A_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \varepsilon_{\beta_1 \dots \beta_m} R_{\alpha_1 \beta_1} \dots R_{\alpha_m \beta_m} , \qquad (8)$$

здесь $R_{\alpha_i \beta_i}$ - матричные элементы оператора R, $A_{\alpha_1 \dots \alpha_m}(z)$ произвольные функции *.

---

*) Как обычно $\varepsilon_{\beta_1 \dots \beta_m}$ полностью антисимметричный тензор.

(Без ограничения общности можно считать, что при перестановке индексов функция $A_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}(z)$ не изменится, если оба индекса отвечают нечетным координатам, и меняет знак, если хотя бы одному индексу отвечает четная координата). Без труда доказывается, что формула (8)' действительно определяет плотность. Очевидно, что плотности вида (8) также можно рассматривать как обобщение плотностей в обычном пространстве, отвечающих дифференциальным формам.

Указанное выше определение плотности было приспособлено для того, чтобы определить интеграл по поверхности, заданной параметрически. Часто бывает удобно рассматривать интеграл по поверхности, заданной с помощью уравнений. Мы введем понятие $\mathcal{D}$ - плотности, приспособленное для интегрирования по поверхностям, заданным уравнениями.

Назовем (m, n) - $\mathcal{D}$ - плотностью функцию $B(z, S)$, удовлетворяющую условию

$$B(z, LS) = B(z, S) \operatorname{Ber} L \tag{9}$$

для любого линейного оператора L, действующего в $E^{M-m,\, N-n}$. Здесь z - точка суперпространства $E^{M,N}$, S - несингулярный линейный оператор, действующий из $E^{M,N}$ в $E^{M-m,\, N-n}$. Легко проверить, что условие (9) гарантирует, что интеграл

$$\int B(z, \mathcal{D}\phi(z))\, \delta(\phi(z))\, d^{m+n} z \tag{10}$$

зависит только от поверхности, определяемой уравнениями (3) (т.е. не зависит от произвола в выборе функций $\phi_i(z)$).

Построим взаимно-однозначное соответствие между (m, n) -

– плотностями и (m, n) – $\mathcal{D}$ – плотностями.

Заметим прежде всего, что в силу условия (4) (m, n) – – плотность A достаточно задать на операторах R с матрицей вида $\begin{pmatrix} Y \\ I \end{pmatrix}$, где I – единичная матрица. (Мы считаем, что пространство $E^{M,N}$ отождествлено с прямой суммой $E^{M-m, N-n} \oplus E^{m,n}$; это позволяет записывать оператор R, действующий из $E^{m,n}$ в $E^{M,N}$ с помощью матрицы $\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$, где R_1 – матрица оператора, действующего из $E^{m,n}$ в $E^{M-m, N-n}$, а R_2 – – матрица оператора, действующего из $E^{m,n}$ в $E^{m,n}$). В самом деле, если R_2 обратимая матрица, то оператор с матрицей $\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ может быть представлен в виде

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 R_2^{-1} \\ I \end{pmatrix} \circ R_2$$

и значит

$$A(R) = A\begin{pmatrix} R_1 R_2^{-1} \\ I \end{pmatrix} \operatorname{Ber} R_2 .$$

В случае, если матрица R_2 необратима, то $A\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ определяется по непрерывности. Аналогично, в силу условия (9) (m, n) – – $\mathcal{D}$ – плотность $B(z, S)$ достаточно задать на операторах S с матрицей вида (I, V) (мы реализуем $E^{M,N}$ как прямую сумму $E^{M-m, N-n} \oplus E^{m,n}$, символ V обозначает оператор, действующий из $E^{m,n}$ в $E^{M-m, N-n}$). Определим (m, n) – $\mathcal{D}$ – – плотность $B(z, S)$ по заданной (m, n) – плотности $A(z, R)$, считая, что

$$B(z, (I, V)) = A\left(z, \begin{pmatrix} -V \\ I \end{pmatrix}\right).$$

(На операторы, не имеющие вида (I, V), мы можем продолжить $\mathcal{D}$ – плотность, пользуясь условием (9)).

Взаимная однозначность построенного нами соответствия между (m, n) – плотностями и (m, n)–$\mathcal{D}$ – плотностями очевидна.

Легко устанавливается, что интеграл от (m,n) - плотности по поверхности равен интегралу от соответствующей (m,n) - $\mathcal{D}$ - - плотности по той же поверхности.

Соответствие между (m,n) - плотностями и (m,n) $\mathcal{D}$ - - плотностями становится очень наглядным, если геометрически интерпретировать понятие плотности. Если линейный оператор R, действующий из $E^{m,n}$ в $E^{M,N}$, несингулярен, то его образ можно рассматривать как (m,n) - мерную плоскость R в $E^{M,N}$. Если $R' = RL$, где L - обратимый оператор в $E^{m,n}$, то образы операторов R и R' совпадают. С помощью оператора R можно определить элемент объема на соответствующей (m,n) - мерной плоскости, если $R' = RL$, $\mathrm{Ber}\, L = 1$, то элементы объема, определенные операторами R и R' на (m,n) - мерной плоскости, совпадают. Это означает, что (m,n) - - плотность $A\ (z, R)$ можно рассматривать как функцию $A\ (z, \mathcal{R})$, где $\mathcal{R}$ -(m,n) - плоскость с фиксированным элементом объема, функция $A\ (z, \mathcal{R})$ должна удовлетворять условию $A(z,\lambda\mathcal{R}) = \lambda A\ (z, \mathcal{R})$. Символ $\lambda\mathcal{R}$ обозначает, ту же плоскость, в которой элемент объема умножен на λ). В геометрической терминологии переход от понятия плотности к понятию $\mathcal{D}$ - плотности состоит в переходе от параметрического задания (m,n) - - плоскости к заданию плоскости с помощью уравнений. (Иными словами,мы представляем плоскость не как образ линейного оператора, а как ядро линейного оператора).

Покажем теперь, что каждой (m,n) - плотности можно сопоставить $(M-m, N-n)$ - $\mathcal{D}$ - плотность и, следовательно, $(M-m, N-n)$ плотность, а именно, по каждой (m,n) - - плотности $A\ (z, R)$ построим $(M-m, N-n)$ - $\mathcal{D}$ - плотность

$$B(z,s) = A(z,S^*).$$

Здесь S^* обозначает оператор, сопряженный к S. Указанное только что соответствие будем называть двойственностью. Это соответствие позволяет строить примеры $\mathcal{D}$ - плотностей, исходя из описанных выше примеров плотностей. В частности ($M-m$, $N-n$) - $\mathcal{D}$ - плотности, двойственные к плотностям вида (7), могут быть записаны в виде

$$B(z,S) = \sum_{i,j} b_{i_1\ldots i_m j_1\ldots j_n}(z) \operatorname{Ber}(S_{i_1\ldots i_m j_1\ldots j_n}),$$

где $S_{i_1\ldots i_m j_1\ldots j_n}$ - матрица с элементами $S_{\tau s}$, $\tau = 1,\ldots,m+n$, $s = i_1,\ldots,i_m, j_1,\ldots j_n$ ж). (Это следует из того, что если P - линейный оператор, действующий в $E^{m,n}$, то $\operatorname{Ber} P = \operatorname{Ber} P^*$)

Плотностям вида (8) двойственны ($M-m$, N) - $\mathcal{D}$ - плотности вида

$$B(z,s) = \sum_{\alpha,\beta} B_{\alpha_1\ldots\alpha_m}(z)\,\varepsilon_{\beta_1\ldots\beta_m} S_{\beta_1\alpha_1}\ldots S_{\beta_m\alpha_m} \qquad (11)$$

Здесь $S_{\beta_i\alpha_i}$ - матричные элементы линейного оператора S, отображающего $E^{M,N}$ в $E^{m,0}$, $B_{\alpha_1\ldots\alpha_m}(z)$ - произвольные функции. Эти плотности имеют максимальную размерность по нечетным переменным.

В статьях [1-2] было определено пространство интегральных форм $\Sigma = \oplus \Sigma_i$ следующим образом. Пусть, $V(z)$ форма объема на $E^{M,N}$, δy_i, $\delta\theta_i$ - символы, удовлетворяющие соотношениям

$$\delta y_{i_1}\delta y_{i_2} = -\delta y_{i_2}\delta y_{i_1},\ \delta y_i\delta\theta_j = \delta\theta_j\delta y_i,\ \delta\theta_{j_1}\delta\theta_{j_2} = \delta\theta_{j_2}\delta\theta_{j_1};\quad \begin{matrix} i = 1,\ldots,M \\ j = 1,\ldots,N \end{matrix}$$

ж Иными словами, $S_{i_1\ldots j_n}$ - квадратная матрица, составленная из столбцов оператора S с индексами $i_1\ldots i_m, j_1\ldots j_n$.

Тогда $\omega \in \Sigma_{M-N-K}(E^{M,N})$, если

$$\omega = \sum_{\alpha,\beta} f_{\alpha_1\dots\alpha_M\beta_1\dots\beta_N}(z)V(z)(\delta y_1)^{\alpha_1}\dots(\delta(\theta_N))^{\beta_N}, \alpha_1+\dots+\beta_N = K.$$

Если $\Omega \subset E^{M,N}$ (m, n) – мерная поверхность в $E^{M,N}$, то определено отображение ограничения $\Sigma_i(E^{M,N}) \to \Sigma_i(\Omega)$. Если $\omega \in \Sigma_{m-N}(E^{M,N})$, то определен интеграл от ω по (m, N) – мерной поверхности Ω, лежащей в суперпространстве $E^{M,N}$, а именно, ограничивая ω на Ω, получим форму объема на Ω, которую можно интегрировать по Ω. Нетрудно построить взаимно-однозначное соответствие между интегральными формами, принадлежащими $\Sigma_{m-N}(E^{M,N})$ и (m, N) – $\mathcal{D}$ - плотностями вида (II). Действительно, если линейный оператор S, отображающий $E^{M,N}$ в $E^{m,0}$, определяет поверхность Ω, заданную уравнением $Sz = 0$, а интегральная форма $\omega \in \Sigma_{M-m-N}(E^{M,N})$ имеет вид

$$\omega = f(z)\,V(z)\,\delta z_{i_1}\dots\delta z_{i_m} \tag{I2}$$

$1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_m \leq M+N$, то значение соответствующей плотности на S с точностью до знака определяется формулой

$$\mathcal{B}(z, S) = f(z)\,\varepsilon_{\rho_1\dots\rho_m} S_{\rho_1 i_1}\dots S_{\rho_m i_m}. \tag{I3}$$

На линейные комбинации плотностей вида (I3) соответствие продолжается по линейности. Интеграл от интегральной формы (I2) по $(M-m, N)$ – мерной поверхности совпадает с интегралом от соответствующей $\mathcal{D}$ – плотности по этой поверхности с точностью до знака.

Плотности являются наиболее общим объектом, который можно интегрировать по поверхности. Однако, в случае обычного пространства, как правило, приходится интегрировать не произвольные плотности, а дифференциальные формы: в суперпространстве несколько выделенную роль играют интегральные формы. Поэтому представляют интерес отличительные признаки этих классов плотностей. Имеет место следующее утверждение: $\mathcal{D}$ - плотность полиномиальна тогда и только тогда, когда она отвечает интегральной форме. (Мы говорим, что $\mathcal{D}$ - плотность $B(z, S)$ полиномиальна, если она является полиномом от матричных элементов оператора S). В одну сторону это утверждение очевидно. Из соотношения (I3) следует, что $\mathcal{D}$ - плотность, отвечающая интегральной форме полиномиальна. Допустим теперь, что (m, n) - - $\mathcal{D}$ - плотность $B(z, S)$ полиномиальна. Рассмотрим в $E^{M-m, N-n}$ линейные операторы L_1 и L_2, определенные формулами

$$L_1(u_1, \ldots, u_{M-m}, \zeta_1, \ldots, \zeta_{N-n}) = (\lambda u_1, u_2, \ldots, \zeta_{N-n})$$

$$L_2(u_1, \ldots, u_{M-m}, \zeta_1, \ldots, \zeta_{N-n}) = (u_1, \ldots, u_{M-m}, \mu\zeta_1, \ldots, \zeta_{N-n}), \tag{I4}$$

(здесь $(u, \zeta) \in E^{M-m, N-n}$, u - четные, ζ - нечетные координаты). В силу условия (9)

$$B(z, L_1 S) = B(z, S)\lambda \tag{I5}$$

$$B(z, L_2 S) = B(z, S)\mu^{-1}. \tag{I6}$$

Из условия (I6) мы видим, что для полиномиальности $\mathcal{D}$ - плотности $B(z, S)$ необходимо, чтобы она была максимально нечетной размерности. (Если $B\ (z, S)$ полиномиальна, то $B(z, L_2 S)$ при $n \neq N$ является полиномом от μ, который не равен тождественно нулю, по крайней мере, для некоторых S, и, следовательно, не может удовлетворить (I6). Из (I5) следует, что $\mathcal{D}$ - плотность $B\ (z, S)$ линейна по строкам матрицы S. Иными словами, для каждого α_0, $B\ (z, S)$ может быть представлено в виде $\sum_\beta c_\beta S_{\alpha_0 \beta}$, где коэффициенты c_β зависят от $S_{\alpha\beta}$ с $\alpha \neq \alpha_0$. При доказательстве этого утверждения мы используем тот факт, что полином $f(x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющий условию

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda f(x_1, \dots, x_n)$$

линеен по x_i. Если бы рассматриваемый полином имел степень $k > 1$, то $f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ при больших λ возрастало бы как λ^k. Из линейности по строкам вытекает, что $B\ (z, S)$ можно записать в следующей форме

$$B(z, S) = \sum_{\alpha, \beta} B_{\beta_1 \dots \beta_{m'} \alpha_1 \dots \alpha_{m'}}(z) S_{\alpha_1 \beta_1} \dots S_{\alpha_{m'} \beta_{m'}}, \quad m' = M - m,$$

где $B_{\alpha_1 \dots \alpha_{m'}}(z) = 0$, если какая-либо пара из индексов $\alpha_1, \dots, \alpha_{m'}$ совпадает. Далее заметим, что $\mathcal{D}$ - плотность $B\ (z, S)$ не меняется при четной перестановке строк матрицы и меняет знак при нечетной перестановке строк этой матрицы. Это следует из (9), если в качестве оператора L выбрать оператор перестановки координат. Отсюда вытекает, что коэффициент $B_{\beta_1 \dots \beta_{m'} \alpha_1 \dots \alpha_{m'}}$ антисимметричен по индексам $\alpha_1, \dots, \alpha_{m'}$, т.е. имеет вид $B_{\alpha_1 \dots \alpha_{m'} \beta_1 \dots \beta_n} = \beta_{\beta_1 \dots \beta_{m'}} \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_{m'}}$.
Мы приходим к нужному нам выводу, что $B\ (z, S)$ имеет вид (II) $(m \to m')$. Очевидно, что плотность полиномиальна в том и только в том случае, если двойственная к ней $\mathcal{D}$ - плотность

также полиномиальна. Поэтому из доказанного нами предложения вытекает следующее двойственное ему утверждение: (m, n) – – плотность может быть полиномиальной только в случае $n = 0$, в этом случае полиномиальная плотность имеет вид (8). В частности, в обычном пространстве всякая полиномиальная плотность отвечает дифференциальной форме [4].

Отметим, что в обычном пространстве дифференциальные формы можно выделить среди плотностей также иным способом. Всякой плотности $A(y, R)$ сопоставляется функционал

$$\Phi_A(\Omega^m) = \int_{\Omega^m} A\left(y, \frac{\partial y}{\partial x}\right) d^m x, \qquad (17)$$

где $y = y(x)$ параметрическое задание поверхности Ω^m. Соотношение (17) является частным случаем соотношения (1) для рассматриваемых в настоящей работе плотностей ранга 1.

Рассмотрим пространство $\mathcal{E}^m$, состоящее из m – мерных поверхностей, допускающих глобальную параметризацию $y^\mu(x_1, \dots, x_m)$ где $0 \leq x_i \leq 1$. В пространстве $\mathcal{E}^m$ можно ввести различные топологии.

1. Последовательность m – мерных поверхностей Ω^m_n стремится к m – мерной поверхности Ω^m в топологии 1, если существуют такие параметризации $y^\mu_n(x_1, \dots, x_n)$ и $y^\mu(x_1, \dots, x_n)$ поверхностей Ω^m_n и Ω^m, что $y^\mu_n(x_2, \dots, x_n)$ и $\frac{\partial y^\mu_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}$ равномерно стремятся к $y^\mu(x_1, \dots, x_n)$ и $\frac{\partial y^\mu(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}$, соответственно.

2. Последовательность m – мерных поверхностей Ω^m_n стремится к m – мерной поверхности Ω^m в топологии к 2, если существуют

такие параметризации $y_n^M(x_1,\dots,x_n)$ и $y^M(x_1,\dots,x_n)$ - поверхностей Ω_n^m и Ω^m $(0 \le x_i \le 1,\ i=1,\dots,m)$, что $y_n^M(x_i)$ равномерно стремится к $y^M(x)$ и

$$\max_{x,n}\left|\frac{\partial y_n^M}{\partial x}\right| < \infty$$

Имеет место теорема аналогичная теореме A работы [4]

Теорема I. Функционал $\Phi_A(\Omega^m)$ непрерывен на $\mathcal{E}^m$ в топологии I. 2. Функционал $\Phi_A(\Omega^m)$ непрерывен на $\mathcal{E}^m$ в топологии II тогда и только тогда, когда плотность $A(y, R)$ соответствует дифференциальной форме.

Доказательство пункта I теоремы очевидно. Доказательство непрерывности $\Phi_A(\Omega^m)$ в топологии II в случае, если $A(y,R)$ соответствует форме, непосредственно вытекает из теоремы Стокса. Доказательство разрывности функционалов, соответствующих плотностям, но не отвечающих формам, в топологии II аналогично, доказательству соответствующего утверждения в теореме А работы [4].

В начале работы было отмечено, что понятие плотности оказывается полезным в формализме квантовой теории поля, в котором полевые и координатные переменные рассматриваются как равноправные. Интеграл вида (I), где A - плотность ранга K, может рассматриваться как функционал действия в этом формализме. Заметим, однако, что функционал (I) можно интерпретировать таким образом и при более слабых ограничениях - достаточно потребовать, чтобы уравнения движения, отвечающие функционалу (I), были инвариантны относительно преобразования репараметризации (если A - плотность, то инвариантен сам функционал, а не только уравнения движения). Это более слабое условие заведомо выполнено, если функционал (I) представлен в виде суммы функционала, отвечающего плотности, и функционала, приводящего к тривиальным уравнениям движения.

В связи с этим обсудим вопрос: при каких условиях функционал (I) приводит к тривиальным уравнениям движения (т.е. вариация δS функционала S тождественно равна нулю). Этот вопрос представляет и самостоятельный интерес. Мы покажем, что необходимым и достаточным условием тривиальности уравнений движения, как и в обычном случае, является возможность представления функции в виде дивергенции:

$$A = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{x}} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{V}} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial \nu_i} , \qquad (18)$$

где $\vec{u}$ и $\vec{V}$ – функции, зависящие от переменных x , ν , суперполей $y(x, \nu)$, $\theta(x,\nu)$ и их производных. Если функция A предствлена в виде (18), тривиальность уравнений движения очевидна. Для того, чтобы доказать, обратное утверждение заметим, что функция, определяемая по формуле

$$I = \int A \, d^n \nu,$$

обладает тем свойством, что $\delta \int I \, d^m x = 0$, поэтому I представляется в виде дивергенции по x от некоторой функции U_1 , зависящей от x , компонент суперполей $y(x,\nu)$ и $\theta(x,\nu)$ и их производных по x при $\nu = 0$ (т.е. от $y(x,0)$, $\theta(x,0)$, $\frac{\partial y}{\partial x}(x,0)$, , $\frac{\partial \theta}{\partial x}(x,0)$, $\frac{\partial y}{\partial x \partial \nu}(x,\nu)\big|_{\nu=0}$ и т.д.)
Далее, разложение A (x , ν , y , θ) по ν дает

$$A = \nu_1 \ldots \nu_n K + \prod_{r<n} \nu_{i_1} \ldots \nu_{i_r} K_{i_1 \ldots i_r} , \qquad (19)$$

где второе слагаемое представляет собой полином степени меньшей n по ν.

Ясно, что $I = K$. Так как всякий полином степени $< n$ по ν можно представить в виде дивергенции по ν от некоторой функции $\vec{V}_1$ зависящей от x компонент суперполей y и θ и их производных по x, то ясно, что справедливо соотношение (I8) с функциями $\vec{u}_1$ и $\vec{V}_1$ в правой части. Если теперь выразить в функциях $\vec{u}_1$ и $\vec{V}_1$ компоненты суперполей y и θ через суперполя и их производные по ν и обозначить таким образом полученные функции через $\vec{u}$ и $\vec{V}$, то получим, что справедливо соотношение (I8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Бернштейн И.Н., Лейтес Д.А. Интегральные формы и формула Стокса на многообразиях. Функциональный анализ. 1976, т.II, вып.I, с.55-56.

2. Бернштейн И.Н., Лейтес Д.А. Как интегрировать дифференциальные формы на супермногообразиях. Функциональный анализ. 1976, т.II, вып.3, с.70-71.

3. Schwarz A.S. Are the Field and Space Variables on an Equal Footing ? Nucl.Phys., 1980, vol. B171, p.154-166.

4. Худавердян О.М., Шварц А.С. Мультипликативные функционалы и калибровочные поля. ТМФ, 1981, т.46, № 2, с.187-198; Препринт ИТЭФ-3, Москва 1980.

5. Gayduk A.V., Romanov V.N., Schwarz A.S. Supergravity and Field Space Democracy. Commun.Math.Phys., 1981, vol. 79, p.507-528.

6. Khudaverdian O.M., Schwarz A.S., Tyupkin Yu.S. Integral Invariants for Supercanonical Transformations. Lett. in Math.Phys., 1981, vol. 5, p.517-522.

7. Березин Ф.А. Супермногообразия. Элементарные частицы. Седьмая школа физики ИТЭФ. М.: Атомиздат, 1980, вып.I-I4, с.5-II9.

Рукопись поступила 29 января 1982 г.

Редактор Л.П.Мукаян

Тех.редактор А.С.Абрамян

Заказ 203 ВФ- 05236 Тираж 299

Препринт ЕФИ Формат издания 60х84/I6

Подписано к печати 24/V-82 I,5 уч.изд.л. Ц. 22 к.

Издано Отделом научно-технической информации

Ереванского физического института, Ереван 36, Маркаряна 2

индекс 3624