

**ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ**  
**ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**

---

---

ЕФИ-549(36)-82

Յ.Ա.ԲԱԲԱԽԱՆՅԱՆ, Վ.Վ.ՄՍԱԽԱՆՅԱՆ

ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ РАСЩЕПЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОННОГО  
ПУЧКА В ПОЛЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ В  
СРЕДЕ

**ԵՐԵՎԱՆ 1982**      **ЕРЕВАН**

EDM-549(36)-82

E.A.BABAKHANYAN, V.V.MUSSAKHANYAN

ENERGY SPLITTING OF ELECTRON BEAM IN  
ELECTROMAGNETIC WAVE FIELD IN A MEDIUM

The general solution of the charged particle motion in a medium in the field of an electromagnetic wave with linear polarization is obtained. The theoretical results are compared with the experimental data on the energy spread of an electron beam in a laser wave.

Yerevan Physics Institute

Yerevan 1982

УДК. 537.533:538.56

БТИ- 549(36)-82

Э. А. БАБАХАНЫН, В. В. МУСАХАНЫН

ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ РАСЩЕПЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В  
ПОЛЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ В СРЕДЕ

Получено и исследуется общее решение задачи о движении заряженной частицы в среде в поле электромагнитной волны линейной поляризации. Проводится сравнение ускорения электронного пучка с экспериментальными результатами.

Ереванский физический институт

Ереван 1982

## 1. Введение

Исследование взаимодействия заряженных частиц с замедленной электромагнитной волной посвящено большое количество теоретических работ, что связано с многообразием областей его возможного практического применения (см., например, [1-8]).

Экспериментально, однако, в замедленной электромагнитной волне были исследованы лишь два эффекта: 1) энергетическое умирание электронного пучка в поле лазерной волны в среде при влете частиц под черенковским углом к направлению распространения замедленной электромагнитной волны [9,10] и 2) модуляция электронного пучка на оптической частоте при влете электронов под прямым углом к лазерному лучу в диэлектрической пластине [11]. Если эффект энергетического умирания можно легко объяснить теоретически, то модуляция и, особенно, вопрос об интенсивности излучения модулированного пучка электронов на мишени, остается не до конца понятным как с экспериментальной (невоспроизводимость эффекта другими экспериментальными группами [12,13]), так и с теоретической точек зрения (см., в частности, [14], где содержится обширная библиография по данному вопросу).

Поэтому представляет особый интерес рассмотрение динамики релятивистской частицы в самом общем случае влета частицы под произвольным углом к направлению распространения замедленной электромагнитной волны.

Ниже на основе решения релятивистского уравнения движения частицы в замедленной электромагнитной волне будет получено выражение для четырехмерного импульса частицы, зависящее от собственного времени нахождения частицы в волне и остальных релятивистски-инвариантных параметров частицы, таких как начальная фаза влета частицы в волну, начальный 4-импульс частицы и т.д. Затем это выражение для четырехмерного импульса частицы будет применено для нахождения энергетических ускорений и расщеплений электронного пучка и, в частности, для сравнения с экспериментальными результатами [9, 10].

Ранее полученные решения уравнения Гамильтона-Якоби [2, 3, 15], а также решения уравнения движения [4] содержали зависимость от времени в параметрической форме, не позволявшей в общем случае получить явную зависимость от времени (фаза влета частицы из волны оставалась неопределенной). В данной работе нами будет использовано уравнение для фазы частицы в волне [16]. Подчеркнем, что задача решается динамически: начальная фаза волны в момент влета частицы в волну произвольна, но изменение фазы за время пролета частицей волны, а следовательно, и импульс, и энергия частицы вполне определяются относительно начального значения фазы через время нахождения частицы в волне. Таким образом, мы можем получить энергию и импульс частицы в любой момент нахождения частицы в волне, в чем и состоит отличие данного подхода от случая "встряски" электрона в электромагнитной волне [17].

## 2. Решение релятивистского уравнения движения

Геометрия задачи представлена на рис. I. Частица с зарядом  $e$  и начальным импульсом  $\vec{p}$  влетает в электромагнитную волну конечной ширины  $d$  под произвольным углом  $\nu_0$  к направлению волнового вектора  $\vec{K}$ . Для создания замедленной электромагнитной волны предположим наличие некоторой материальной среды, характеризуемой показателем преломления  $n$ . Очевидно, что понятие "среда" не обязательно означает наличие среды в обычном смысле, но может представлять собой некоторую структуру, приводящую к отличию от нуля квадрата четырехмерного волнового вектора ( $K^2 = \omega^2 \cdot (1 - n^2) \neq 0$ ). Линейно поляризованная электромагнитная волна описывается четырехмерным вектор-потенциалом

$$A_\mu = a_\mu \cdot \cos \varphi, \quad (1)$$

где фаза волны есть  $\varphi = \omega t - \vec{K} \vec{r} = K_\mu \cdot x_\mu = (Kx)$ ;  $K_\mu$  и  $x_\mu$  - четырехмерные волновой вектор и координата, соответственно, причем  $(Ka) = 0$  \*). Когда собственное время частицы  $\tau$  равно нулю, то есть в момент влета частицы в волну, имеют место следующие условия

$$\varphi = \varphi_0, \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)_0. \quad (2)$$

Решение релятивистского уравнения движения (см. [18] )

$$\frac{dq_\mu}{d\tau} = e F_{\mu\nu} q_\nu, \quad F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \quad (3)$$

\* ) Ниже всюду, где не оговорено особо, используется система единиц  $m = c = 1$  и сигнатура  $(-2)$ .

с вектор-потенциалом вида (I) можно записать в виде

$$q_{\mu} = P_{\mu} - e [A_{\mu}(\varphi) - A_{\mu}(\varphi_0)] + K_{\mu} \frac{\frac{d\varphi}{d\tau} - \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)_0}{\kappa^2}, \quad (4)$$

где  $P_{\mu}$  - начальный четырехмерный импульс частицы. Зависимость фазы  $\varphi$  и ее производной от собственного времени нахождения частицы в волне получается из решения нижеследующего уравнения (см. работу [16]):

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \left[ (\rho\kappa)^2 + 2e\kappa^2(\rho a)(\cos\varphi - \cos\varphi_0)^2 - e^2\kappa^2 a^2 (\cos\varphi - \cos\varphi_0)^2 \right]^{1/2} \quad (5)$$

с начальными условиями (2), причем ясно, что  $\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)_0 = (\rho\kappa)$ .  
Получаем

$$\varphi = 2 \operatorname{arctg} [\operatorname{dn}(U\tau + U_0, k)], \quad (6)$$

где

$$\alpha = \left[ \frac{-(\rho\kappa)^2 + 2e\kappa^2(\rho a)\cos\varphi_0 - e^2\kappa^2 a^2 \sin^2\varphi_0 - 2U^2}{(\rho\kappa)^2 - 2e\kappa^2(\rho a)(1 + \cos\varphi_0) - e^2\kappa^2 a^2 (1 + \cos\varphi_0)^2} \right]^{1/2}, \quad (7)$$

$$\operatorname{cn}(U_0, k) = \alpha^{-1} \operatorname{tg}(\varphi_0/2). \quad (8)$$

$$U = - \left\{ e^2\kappa^2 [a^2(\rho\kappa)^2 + \kappa^2(\rho a)^2 - e\kappa^2 a^2(\rho a)\cos\varphi_0 \cdot \sin^2\varphi_0] \right\}^{1/4}, \quad (9)$$

$$k = \left[ \frac{1}{2} + \frac{(\rho\kappa)^2 - 2e\kappa^2(\rho a)\cos\varphi_0 + e^2\kappa^2 a^2 \sin^2\varphi_0}{4U^2} \right]^{1/2} \quad (10)$$

С помощью выражений (6)-(10) соотношение (4) может быть записано в виде

$$q_{\mu} = P_{\mu} - 2e\alpha_{\mu} d^2 \left[ \frac{\operatorname{cn}^2(U_0, k)}{1 + \alpha^2 \operatorname{cn}^2(U_0, k)} - \frac{\operatorname{cn}^2(U\tau + U_0, k)}{1 + \alpha^2 \operatorname{cn}^2(U\tau + U_0, k)} \right].$$

$$- \frac{K_{Jn}}{K^2} \left[ (pK) + 2dU \cdot \frac{dn(U\tau + U_0, k) \cdot sn(U\tau + U_0, k)}{1 + d^2 \cdot cn^2(U\tau + U_0, k)} \right], \quad (II)$$

где  $Cn$ ,  $Sn$ ,  $dn$  - эллиптические функции Якоби [19].

Выражение (II) представляет энергию и импульс частицы (временную и пространственные компоненты четырехмерного импульса) в волне, записанные через собственное время нахождения частицы в волне и другие релятивистски-инвариантные параметры влетающей частицы. Известными преобразованиями эллиптических функций Якоби можно получить энергию и импульс частицы в волне при всевозможных соотношениях между параметрами.

### 3. Влет частицы в волну под черенковским углом

Предположим теперь, что начальный влет частицы в волну происходит под черенковским углом, т.е. выражение  $(pK)$  равно нулю, или в трехмерном виде

$$1 - n\beta_0 \cos \mathcal{V}_0 = 0, \quad (I2)$$

где  $\beta_0$  - начальная скорость частицы (отнесенная к скорости света).

Ограничимся в (II) линейными по амплитуде поля членами, пренебрегая квадратичными членами, то есть предположим, что

$$e^2 k^2 a^2 \ll 2 |ek^2(pa)|. \quad (I3)$$

Следует заметить, что в случае влета частицы в волну при выполнении условий  $(pa) = (pK) = 0$ , означающих начальный влет частицы с черенковской скоростью вдоль направления распространения

электромагнитной волны (например, рождение частицы в волне с начальным импульсом, направленным вдоль волнового вектора), энергообмен волны с частицей невозможен [16]. Это легко понять: при движении частицы с черенковской скоростью вдоль волны электрическое поле в системе покоя частицы равно нулю, а с магнитным полем покоящаяся частица не взаимодействует. Действительно, положив в соотношении (II)  $(p_a) = (p_k) = 0$ , сразу получим

$$q_{\mu} = p_{\mu}, \quad (I4)$$

таким образом, четырехмерный импульс частицы не изменяется.

В случае  $(p_a) \neq 0$  и  $(p_k) = 0$  учет квадратичных по полю членов вследствие малости параметра интенсивности волны привел бы к изменению энергии и импульса частицы на несколько порядков меньшему, чем изменение этих же величин, обусловленное членом, пропорциональным  $ek^2(p_a)$ .

Итак, считая выполненными условия (I2) и (I3), из (II) можно получить для временной компоненты импульса, то есть для энергии частицы в волне следующий результат:

$$E = E_0 - \omega \frac{\sqrt{ek^2(p_a)}}{k^2} \sin \psi_0 \cdot Sd(\sqrt{ek^2(p_a)} \tau, \sin(\psi_0/2)), \quad (I5)$$

где  $E_0$  - начальная энергия частицы (в момент влета в волну),  $Sd \equiv Sn/dn$ ,  $k = \sin(\psi_0/2)$  - модуль эллиптической функции. Так как начальные фазы влета  $\psi_0$  для пучка частиц распределены в интервале  $[0, 2\pi]$ , то при изменении фазы влета от нуля до  $\pi$  модуль эллиптической функции изменяется от нуля до единицы. Следовательно, эллиптическая функция  $Sd$  при фиксированном и не малом времени пролета (то есть при  $\sqrt{ek^2(p_a)} \tau \gg 1$ ) будет принимать значения обычного тригонометрического синуса при

$K = 0$  и значения гиперболического синуса при  $K = 1$ , поэтому поведение электронов будет существенно зависеть от значения начальной фазы: величина добавки к энергии есть сложная функция от начальной фазы. В противоположном случае малых времен пролета ( $\sqrt{e k^2 (p a)} \tau \ll 1$ ) вся зависимость от начальной фазы влета выражается простым множителем  $\sin \varphi_0$ , и соотношение (15) может быть записано в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - e(p a) \omega \tau \sin \varphi_0. \quad (16)$$

В промежуточной области, при значениях параметра  $\sqrt{e k^2 (p a)} \tau \lesssim 1$ , выражение (15) можно представить в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - e(p a) \omega \tau \sin \varphi_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \sin^2 (\varphi_0 / 2) \sqrt{e k^2 (p a)} \tau \right),$$

откуда, в частности, видно, что максимальная добавка к энергии получается при начальном значении фазы волны, равном  $\pi/2 - \sqrt{e k^2 (p a)} \tau$ , а не при  $\pi/2$ , как в случае соотношения (16).

#### 4. Уширение и расщепление энергетического спектра пучка частиц

Для пучка частиц соотношение (15) можно усреднить по фазам влета  $\varphi_0$ , что, после простых преобразований, приводит к соотношению  $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_0$ , то есть средняя энергия пучка частиц не меняется. Однако отличие от нуля среднеквадратичного отклонения [20] показывает, что может происходить уширение энергетического спектра пучка частиц. Если принять, что начальный энергетический спектр пучка частиц описывается гауссовской функцией распределения, то при выходе пучка из волны функция распределения будет иметь вид:

$$W(\varepsilon) = \frac{C}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left\{ - \left[ \varepsilon - \varepsilon_0 + \delta \sin \varphi_0 S_d(z, \sin(\varphi_0/2)) \right]^2 / \delta^2 \right\} d\varphi_0, \quad (17)$$

где  $\delta = \omega \sqrt{ek^2(\rho a)} / k^2$ ,  $z = \sqrt{ek^2(\rho a)} \tau$ ,  $\delta = \Delta_0 / 2 \sqrt{\varepsilon_{n2}}$ ,

$\Delta_0$  - начальная ширина на полувысоте энергетического распределения,  $C$  - нормировочная постоянная.

Следует заметить, что условие (12), выполнение которого было необходимо для получения соотношений (15) и (17), может нарушаться на краях начального энергетического распределения пучка частиц. Это могло бы привести к уменьшению взаимодействия с электромагнитной волной. Однако, для реальных монохроматических электронных пучков, в частности, для пучка электронов с энергией 100 МэВ начальная ширина энергетического расщепления на полувысоте составляла всего 63 кэВ [9], а для пучка с энергией 101,8 МэВ - 50 кэВ [10]; поэтому в достаточно широкой области аверсий, превышающей ширину энергетического спектра на полувысоте, остается верным неравенство

$$(\rho k)^2 \ll 2 |ek^2(\rho a)|. \quad (18)$$

Благодаря этому можно считать выполненным условие (12) для всего начального спектра частиц.

Необходимо также отметить, что эллиптические функции Якоби [19] определены для постоянного значения модуля, и для них в конечном виде не существует операций интегрирования и дифференцирования по модулю, поэтому интегрирование по фазе в функции распределения (17) может быть проведено лишь численно на ЭВМ.

Результаты численного счета на БЭСМ-6 приводятся на рисунках 2-4. На рис. 2. показана зависимость конечной энергетической ши-

рины электронного пучка (на высоте первого пика, равной  $W(\xi_0)$ ) от параметра интенсивности лазерной волны  $\xi$  ( $\xi = eE/mc\omega$ ,  $E$  и  $\omega$  - напряженность электрического поля и частота волны, соответственно,  $e$  и  $m$  - заряд и масса электрона). Как для нижней части рис.2, соответствующей диаметру лазерного пучка 0,065 см, так и для верхней, с диаметром 0,1 см, средняя начальная энергия пучка бралась равной 100 МэВ с начальной шириной энергетического распределения на полувысоте  $\Delta_0$ , равной 63 кэВ с целью сравнения с экспериментальным результатом [9]. Начальный спектр электронов нормирован на единицу. На всех рисунках предполагался влет частиц под черенковским углом.

Точкой на нижней части рис.2 отмечено уширение энергетического спектра для центрального перекрытия лазерного и электронного пучков, равное 94 кэВ и в пределах ошибки измерения совпадающее с экспериментальным результатом  $102 \pm 8$  кэВ [9].

Появление нескольких значений энергетического уширения соответствует энергетическому расщеплению начального гауссовского спектра. Динамика этого процесса показана на рисунках 3 и 4. Причем на рис.3 начальные значения взяты для сравнения с экспериментальным результатом [10] ( $\Delta_0 = 50$  кэВ,  $E_0 = 101,8$  МэВ); параметр  $\xi$  принимает десять различных значений. Случай  $\xi_2$  соответствует виду функции распределения, полученному в [10], с максимальным уширением  $\sim 215$  кэВ.

Физически это легко понять - при малых добавках к энергии (по сравнению с начальным разбросом электронов по энергиям) возможно лишь простое уширение спектра, однако, если энергетическая добавка от взаимодействия с лазерной волной начинает превышать ширину энергетического спектра на полувысоте, пики расхо-

дятся и, как показывает рис.4, могут отойти на значительные расстояния по сравнению с первоначальной шириной энергетического распределения электронного пучка. Это расщепление наступает тем раньше, чем уже был начальный энергетический спектр, причем группирование частиц по энергиям возможно при превышении значения релятивистского параметра интенсивности всего на порядок по сравнению с лазерным пучком, использовавшимся в [9] и [10], что практически находится в пределах возможностей современной лазерной техники, не говоря уже о ее прогрессе в ближайшем будущем.

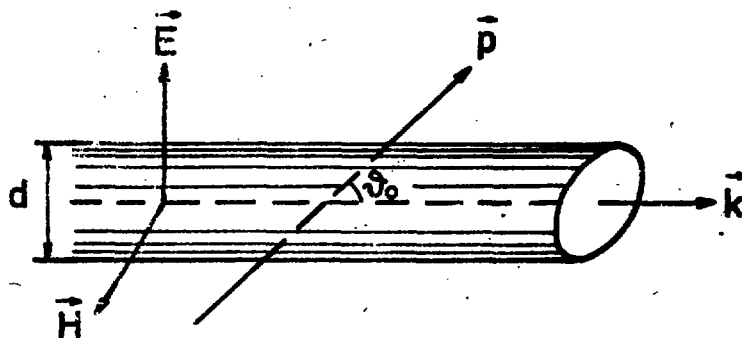


Рис.1. Геометрия задачи.  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  - векторы напряженностей электромагнитного поля.

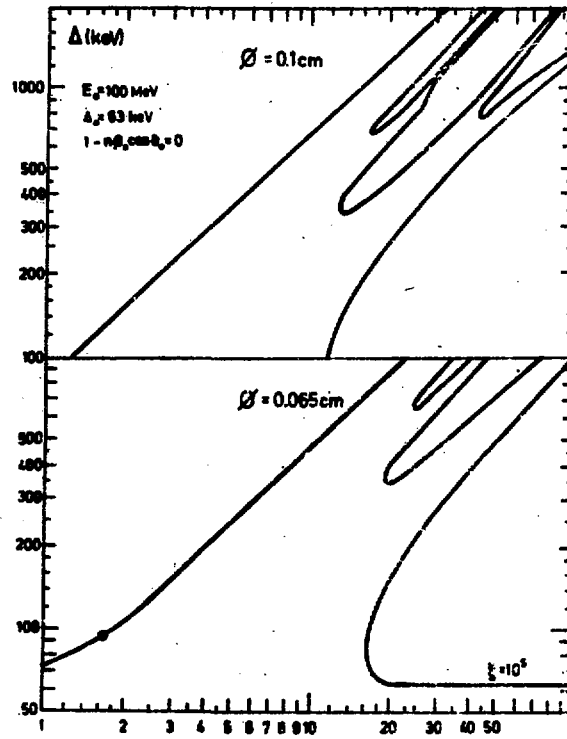


Рис.2. Зависимость уширения ( $\Delta$ ) энергетического спектра электронного пучка от параметра интенсивности  $\xi$  для двух различных диаметров лазерного пучка.

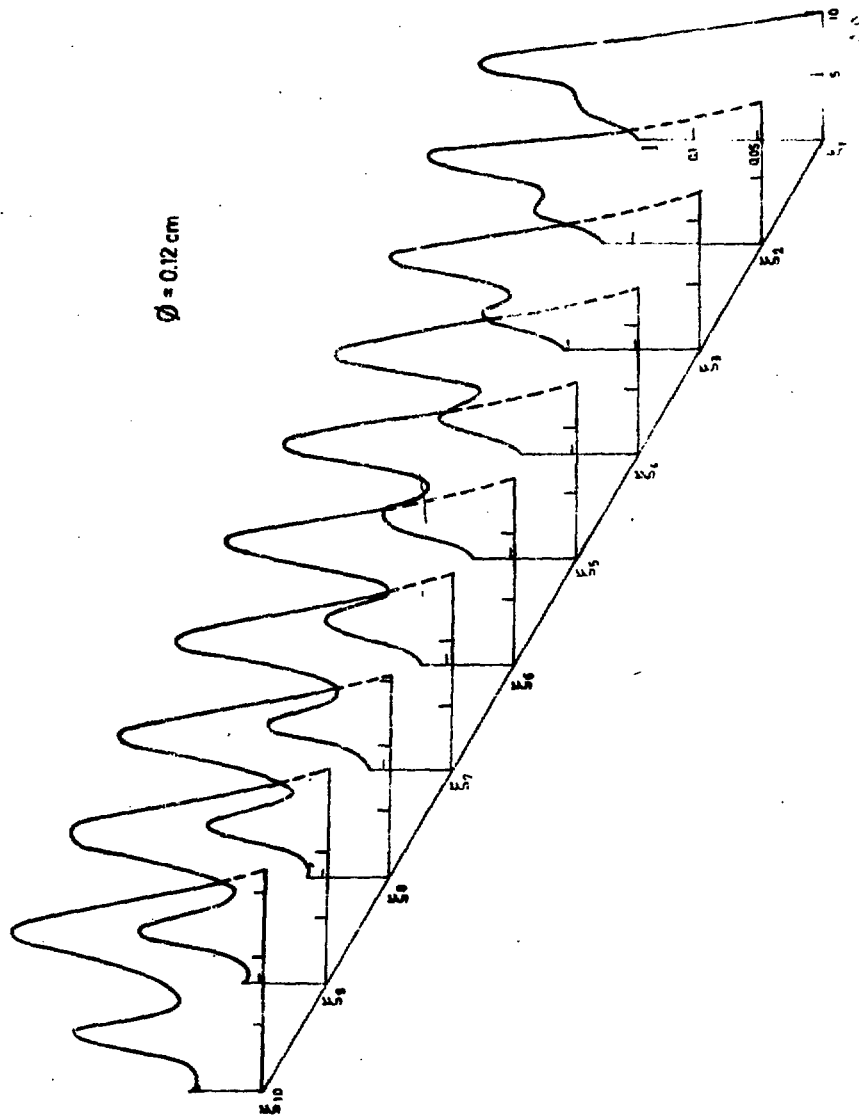


Рис.3. Динамика энергетического спектра ( $I$  дано в единицах  $I_m = 0,3247$ ) с изменением параметра интенсивности  $\xi$ .  $\xi \times 10^5$  ( $i = 1, 2 \dots 10$ ) имеют следующие значения:  $\xi_1 = 3$ ,  $\xi_2 = 3,299$ ,  $\xi_3 = 3,6$ ,  $\xi_4 = 4$ ,  $\xi_5 = 4,3$ ,  $\xi_6 = 4,6$ ,  $\xi_7 = 4,9$ ,  $\xi_8 = 5,2$ ,  $\xi_9 = 5,5$ ,  $\xi_{10} = 5,8$ .  $\xi_2$  соответствует эксперименту [10].  $\sigma = 30.03$  кэВ.

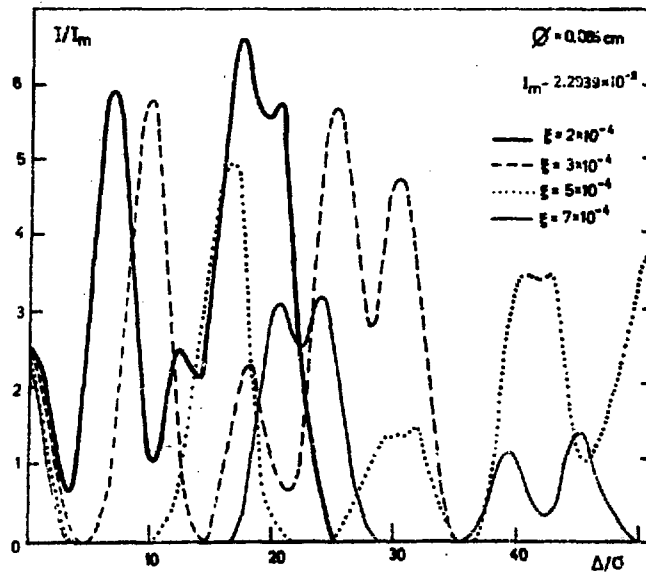


Рис.4. Аналогичная рисунку 3 картина, но для другого диаметра лазерного пучка.  $\phi = 37.84 \text{ кэВ}$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Cocke W.J. Increasing the Output of the Free Electron Laser by Using Dielectric Effects. - Opt. Commun., 1979, v.28, No.1, p.123-125.
2. Дементьев А.С., Кулькин А.Г., Павленко Ю.Г. Движение бесспиновой частицы в среде в поле плоской электромагнитной волны. Изв. ВУЗов, Физика-Астрономия, 1971, т. 12, вып. 4, с. 490-492.
3. Дементьев А.С., Кулькин А.Г., Павленко Ю.Г. Излучение заряда, движущегося в среде в поле интенсивной волны. ЖЭТФ, 1972, т. 62, вып. 1, с. 161-165.
4. Арутюнян В.М., Аветисян Г.К. Излучение заряженных частиц в поле плоской электромагнитной волны в среде. ЖЭТФ, 1972, т. 62, вып. 5, с. 1639-1647.
5. Мусаханян В.В., Никитов А.И. Об изменении черенковского излучения под действием внешнего поля. ЖЭТФ, 1974, т. 66, вып. 4, с. 1258-1268.
6. Нагорский Г.А., Орлов Ю.Ф. Устойчивость движения и ускорения в линейно поляризованной электромагнитной волне. ЖЭТФ, 1973, т. 64, вып. 3, с. 761-767.
7. Давыдовский В.Я., Якушев Е.М. Релятивистское движение заряженной частицы в плоской электромагнитной волне с медленно меняющимися параметрами. ЖТФ, 1971, т. 41, вып. II, с. 2259-2265.
8. Lawson J.D. Coherent Interaction between Waves and Particle Streams. - Part. Accel., 1980, v.10, No.2, p.73-81.
9. Piestrup M.A., Rothbart G.B., Fleming R.M., Pantell R.H. Momentum Modulation of a Free Electron Beam with a Laser. - Intl. Phys., 1975, v.46, No.1, p.132-137.

10. Edighoffer J.A., Kimura W.D., Pantell R.H., Piestrup M.A., Wang D.Y. Observation of Inverse Compton Interaction between Free Electron and Laser Light.-Phys.Rev.A,1981,v.23, No.4,p.1848-1854.
11. Schwarz H., Hora H. Modulation of an Electron Wave by a Light Wave.-Appl.Phys.Lett.,1969,v.15, No.11,p.349-351.
12. Hadley R., Lynch D.W., Stanek E., Rosauer E.A. An Attempt to Reproduce the Schwarz-Hora Effect.-Appl.Phys.Lett.,1971, v.19, No.5, p.145-147.
13. Hadley R., Stanek E.J., Hood R.H. Jr. Discussion of the Schwarz-Hora Effect.-J.Appl.Phys.,1972,v.43, No.1, p.144-148.
14. Hora H. Quantum-Mechanical Modulation of Electrons at Photoemission.-Nuovo Cim.B,1975,v.26, No.1, p.295-306.
15. Казаков А.Е., Федоров М.В. Движение заряженной частицы в поле интенсивной плоской электромагнитной волны в среде.-Кр.сообщ. по физике ФИАН,1972, вып.6, с.44-48.
16. Muskhanyan V.V. Charged Particle Motion in a Medium along an Electromagnetic Wave.-Phys.Lett.A,1979,v.70, No.4, p.313-314.
17. Дыхне А.Т., Длин Г. Вынужденные эффекты при встряске электрона во внешнем электромагнитном поле. УФН,1977, т.121, вып.1, с.157-168.
18. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.:Наука,1973.
19. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т.3. М.:Наука,1967.
20. Бабаханян Э.А., Мусеханян В.В. Уширение энергетического спектра электронного пучка в поле электромагнитной волны в среде. Изв.АН Арм.ССР, Физика,1981, т.16, вып.3, с.186-190.

Рукопись поступила 9 марта 1982 г.

Редактор И.П.Мукаян  
Тех. редактор А.С.Абрамян

Заказ 194

ВБ-01791

Тираж 299

Препринт БИИ

Формат издания 60x84/16

Подписано к печати 23/IV-82 г. 1,4 уч. изд. л. Ц. 14 к.

Издано Отделом научно-технической информации  
Бреванского физического института, Бреван 36, пер. Маргарина 2