ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЕФИ-591(78)-82

М.Б.БАГДАСАРЯН, Л.И.ДОРМАН

К ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДОЛГОВРЕМЕННОЙ МОДУЛЯЦИИ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ

ԵՐԵՎԱՆ 1982 ЕРЕВАН

ЕФИ-591(76)-62

УДК.621.376:537.591

М.Б.БАГДАСАРЯН, Л.И.ДОРМАН*)

К ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДОЛГОВРЕМЕННОЙ МОДУЛЯЦИИ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ

Решается нестационарное уравнение диффузии с подвижным граничным условием, на основе которого исследуется воздействие "ступенчатых" изменений солнечной активности, приводящих к "ступенчатым" изменениям скорости солнечного ветра и транспортного пробега для рассеяния в межпланетном пространстве, на интенсивность галактических космических лучей. Получены аналитические решения в виде рядов, с помощью которых можно оценить размеры модуляционного объема II-летних вариаций. На основе развитого в работе метода решения предполагается в дальнейшем дать интерпретацию нестационарной долговременной модуляции космических лучей в межпланетном пространстве, в частности, дать интерпретацию так называемой "ступенчатой" вариации космических лучей в II-летнем цикле, открытой А.Н.Чарахчьяном и Т.Н.Чарахчьян [I] .

Ереванский физический институт

Ереван I982

---

* ИЗМИР АН СССР

ЕФИ-591(78)-82

M.B.BAGDASARYAN, L.I.DORMAN*

ON THE THEORY OF NONSTATIONARY LONG-TERM MODULATION OF COSMIC RAYS

The nonstationary equation of diffusion with a moving boundary condition is solved, on the basis of which the effect of "stepwise" variations of solar activity, leading to "stepwise" variations of solar wind velocity and of transport length for scattering in the interplanetary space, on the intensity of galactic cosmic rays is investigated. Analytical solutions are obtained in the form of series by means of which one can estimate the dimensions of the modulation volume of 11-year variations. The method of solution developed in this paper is intended for the interpretation of nonstationary long-term modulation of cosmic rays in interplanetary space and, in particular, the interpretation of the so-called 11-year "stepwise" variation of cosmic rays discovered by A.N.Charakhchyan and T.N.Charakhchyan [1].

Yerevan Physics Institute
Yerevan 1982

* IZMIRAN, Troitsk, Moscow Region

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЕФИ-591(78)-82

М.Б.БАГДАСАРЯН, Л.И.ДОРМАН*

К ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДОЛГОВРЕМЕННОЙ МОДУЛЯЦИИ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ

* ИЗМИР АН СССР

Ереван 1982

При решении диффузионных задач с движущейся границей, обычно в уравнениях делают такую замену переменных, которая сводит проблему к задаче с неподвижной границей [2,3,4]. Далее, для решения задачи используется метод интегральных преобразований или метод разделения переменных. В первом случае [4], ввиду сложности функций изображения не представляется возможным переход к оригиналу в общем виде. Во-втором случае из полученных решений затруднительно выделить решения, удовлетворяющие граничным условиям задачи [2,3].

В настоящей работе развивается метод, дающий возможность получить точные решения уравнений типа Фоккера-Планка с движущейся границей в общем случае.

В работах [5,7] были получены автомодельные решения уравнения диффузии, которые описывают поведение плотности галактических космических лучей между ударными волнами и во всем межпланетном пространстве. Однако эти решения зависят лишь от отношения $\xi = \frac{z}{t}$, что приводит к постоянству решения на фронтах волн.

Ниже находится решение этого же уравнения диффузии, зависящее от двух переменных, $\xi = \frac{z}{t}$ и t в явном виде. Это решение удовлетворяет тем же граничным условиям, что и в [5,7] , но в отличие от них содержит также затухание изменения плотности галактических космических лучей (ГКЛ) на фронте волны.

Это обстоятельство делает возможным определение размеров моделирующего объема таких процессов, которые можно описывать уравнением диффузии типа Фоккера-Планка.

Выпишем это уравнение в таком виде, как в работе [7]

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \beta r \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + (u - 3\beta)\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{2}{3}\,\frac{u\gamma}{r} f = 0$$

где учтено, что

$$f = \frac{n(r,t)}{n_o(R)}\ , \qquad n_o(R) = KR^{-\gamma}\ , \qquad \varkappa = \beta r.$$

Здесь $n(r,t)$ – плотность ГКЛ, $n_o(R)$ – плотность вне модуляционного объема, R – жесткость частиц, u – скорость солнечного ветра, $\varkappa = \beta r$ – коэффициент диффузии, пропорциональный r Предположим, что в момент времени $t = 0$, коэффициент диффузии во всем межпланетном пространстве $\varkappa_2 = \beta_2 r$, а начиная с этого момента из Солнца выходит волна с коэффициентом диффузии $\varkappa_1 = \beta_1 r$ и распространяется сферически симметрично со скоростью u . Определим изменение плотности ГКЛ во всем пространстве, т.е. найдем решения уравнения (I) в двух областях (см. рисунок).

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} - \beta_1 r \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + (u - 3\beta_1)\frac{\partial f_1}{\partial r} + \frac{2}{3}\cdot\frac{u\gamma}{r} f_1 = 0, \ (0 \le r \le r(t)) \qquad (I)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} - \beta_2 r \frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2} + (u - 3\beta_2)\frac{\partial f_2}{\partial r} + \frac{2}{3}\,\frac{u\gamma}{r} f_2 = 0, \ (r(t) \le r < \infty) \qquad (2)$$

с начальным и граничными условиями

$$\left[f_1(z,t)=f_2(z,t)\right]\Big|_{z=z(t)}, \quad \left[\beta_1\frac{\partial f_1}{\partial z}-\beta_2\frac{\partial f_2}{\partial z}\right]\Big|_{z=z(t)}=0, \quad f_2(z,t)\Big|_{t=0}=\psi(z)$$

Запишем эти уравнения в безразмерном виде, положив

$$\frac{\partial f_1}{\partial \tau}-b_1\rho\frac{\partial^2 f_1}{\partial \rho^2}+(c-3b_1)\frac{\partial f_1}{\partial \rho}+\frac{2}{3}\frac{c\gamma}{\rho}f_1=0, \quad \left(0\le\rho\le\rho(\tau)\right),$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \tau}-b_2\rho\frac{\partial^2 f_2}{\partial \rho^2}+(c-3b_2)\frac{\partial f_2}{\partial \rho}+\frac{2}{3}\frac{c\gamma}{\rho}f_2=0, \quad \left(\rho(\tau)\le\rho<\infty\right),$$

$$\left[f_1(\rho,\tau)=f_2(\rho,\tau)\right]\Big|_{\rho=\rho(\tau)}, \quad \left[\beta_1\frac{\partial f_1}{\partial \rho}-\beta_2\frac{\partial f_2}{\partial \rho}\right]\Big|_{\rho=\rho(\tau)}=0, \quad f_2(\rho,\tau)\Big|_{\tau\to 0}=\psi(z)$$

Здесь

$$b_i=\frac{\beta_i T}{z_0^2}, \quad c=\frac{uT}{z_0^2}, \quad \rho=\frac{z}{z_0^2}, \quad \tau=\frac{t}{T}, \quad T=1 \text{ сутки}, \quad z_0^2=1\text{а.е.}$$

Произведем замену переменных

$$\tau\to\tau, \qquad z=\frac{\rho}{\tau}$$

Получим

$$\tau\frac{\partial f_1}{\partial \tau}-b_1 z\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}+(c-3b_1-z)\frac{\partial f_1}{\partial z}+\frac{2}{3}\frac{c\gamma}{z}f_1=0 \qquad (3)$$

$$\tau\frac{\partial f_2}{\partial \tau}-b_2 z\frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2}+(c-3b_2-z)\frac{\partial f_2}{\partial z}+\frac{2}{3}\frac{c\gamma}{z}f_2=0 \qquad (4)$$

с начальными и граничными условиями

$$\left[f_1(z,\tau)=f_2(z,\tau)\right]\Big|_{z=z_1}, \quad \left[\beta_1\frac{\partial f_1}{\partial z}-\beta_2\frac{\partial f_2}{\partial z}\right]\Big|_{z=z_1}=0, \quad f_2(z,\tau)\Big|_{\tau\to 0}=\psi(\tau) \qquad (5)$$

Найдем решения эти уравнений методом разделения переменных, принимая константу разделения за натуральное число, смысл которого станет ясен ниже

$$f_1(z,\tau)=z^{a_1}e^{-\frac{z}{b_1}}\sum_{n=0}^{\infty}A_n\tau^n F\left(d_{1n},S_1;\frac{z}{b_1}\right),\ (0\le z\le z_1) \qquad (6)$$

$$f_2(z,\tau)=z^{a_2}e^{-\frac{z}{b_2}}\sum_{n=0}^{\infty}B_n\tau^n F\left(d_{2n},S_2;\frac{z}{b_2}\right)+ \qquad (7)$$

$$+z^{a}e^{-\frac{z}{b_2}}\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{D}_n\tau^n F\left(d_n,S;\frac{z}{b_2}\right),\ (z_1\le z<\infty),$$

где

$$a_i=\frac{u}{2\beta_i}-1+\left[\left(\frac{u}{2\beta_i}-1\right)^2+\frac{2}{3}\frac{u\delta}{\beta_i}\right]^{1/2},\ d_{in}=3+a_i-\frac{u}{\beta_i}+n,\ S_i=3+2a_i \qquad (8)$$

$$a=\frac{u}{\beta_2}-a_2-2,\ d_n=1-a_2+n,\ S=\frac{u}{\beta_2}-2a_2-1;\ \frac{u}{\beta_i}=\frac{c}{b_i},$$

$F(d,S;z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция.

Выделив нулевые члены в (6) и (7) определим из граничных условий (5) коэффициенты A_n, B_n и $\mathcal{D}_n$. Для них получим алгебраические уравнения

$$A_0M_{10}=B_0M_{20}+\mathcal{D}_0M_0 \qquad A_nM_{1n}=B_nM_{2n}+\mathcal{D}_nM_n$$

$$A_0M_{10}^*=B_0M_{20}^*+\mathcal{D}_0M_0^* \qquad A_nM_{1n}^*=B_nM_{2n}^*+\mathcal{D}_nM_n^* \qquad (9)$$

$$\frac{B_0b_2^{a_2}\Gamma(S_2)}{\Gamma(d_{20})}+\frac{\mathcal{D}_0b_2^{a}\Gamma(S)}{\Gamma(d_0)}=1 \qquad \frac{B_nb_2^{a_2}\Gamma(S_2)}{\Gamma(d_{2n})}+\frac{\mathcal{D}_nb_2^{a}\Gamma(S)}{\Gamma(d_n)}=-(-1)^{n-1}/(n-1)!$$

$$n=1,2,\ldots$$

Последнее уравнение получено исходя из свойства вырожденной гипергеометрической функции при больших значениях аргумента $z\to\infty$. Так как при больших z, $F(d,S;\frac{z}{b})\sim e^{\frac{z}{b}}\left(\frac{z}{b}\right)^{d-S}\frac{\Gamma(S)}{\Gamma(d)}$[6]. Из

(8) видно, что $d_{in} - S_i = n - a_i$ считая это, для $f_2(z,\tau)$ при $\tau \to 0$ получим

$$f_2(z,\tau)\Big|_{z\to\infty} = \frac{B_0 b_2^{a_2}\Gamma(S_2)}{\Gamma(d_{20})} + \frac{\mathcal{D}_0 b_2^{a}\Gamma(S)}{\Gamma(d_0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[B_n\tau^n\Big(\frac{z}{b_2}\Big)^n\frac{\Gamma(S_2)b_2^{a_2}}{\Gamma(d_{2n})} + \mathcal{D}_n\tau^n\Big(\frac{z}{b_2}\Big)^n\frac{\Gamma(S)b_2^{a}}{\Gamma(d_n)}\Big]$$

положив $z = \rho/\tau$, имеем

$$f_2(z,\tau)\Big|_{z\to\infty} \to f(\rho) = \frac{B_0 b_2^{a_2}\Gamma(S_1)}{\Gamma(d_{20})} + \frac{\mathcal{D}_0 b_2^{a}\Gamma(S)}{\Gamma(d_0)} + \sum_{n+1}^{\infty}\Big[\frac{B_n b_2^{a_2}\Gamma(S_2)}{\Gamma(d_{2n})} + \frac{\mathcal{D}_n b_2^{a}\Gamma(S)}{\Gamma(d_n)}\Big]\Big(\frac{\rho}{b_2}\Big)^n = 1 \tag{10}$$

т.е.если принять, что A_n , B_n , $\mathcal{D}_n$ коэффициенты разложения функции $-\frac{\rho}{b_2}e^{-\frac{\rho}{b_2}}$ в ряд Тейлора, получим указанное уравнение. Вместо функции $1-\rho e^{-\rho}$ можно взять другую функцию $\varphi(\rho)$, поведение которой чем ближе будет к истине вблизи границы модуляционного объема, тем точнее будет решение задачи, так как коэффициенты A_n , B_n , $\mathcal{D}_n$ будут содержать $\varphi^{(n)}(0)$.

Из системы (9) для коэффициентов A_n, B_n , $\mathcal{D}_n$ получим выражения

$$\begin{gathered} A_0 = \Delta_{10}/\Delta_0 , \quad B_0 = \Delta_{20}/\Delta_0 , \quad \mathcal{D}_0 = \Delta_{30}/\Delta_0 \\ A_n = -(-1)^{n-1}\Delta_{1n}/\Delta_n(n-1)! , \quad B_n = -(-1)^{n-1}\Delta_2/\Delta_n(n-1)! \\ \mathcal{D}_n = -(-1)^{n-1}\Delta_{3n}/\Delta_n(n-1)! \qquad n = 1,2,\ldots \end{gathered} \tag{11}$$

Здесь

$$\Delta_{1n} = M_{2n}M_n^* - M_{2n}^* M_n , \quad \Delta_{2n} = M_{1n}M_n^* - M_{1n}^* M_n ,$$

$$\Delta_{3n} = M_{1n}^* M_{2n} - M_{1n}M_{2n}^* ,$$

$$\Delta_n = \frac{\Gamma(S_2)\Gamma(d_n)(M_n^* M_{1n} + M_{1n}^* M_n) - \Gamma(S)\Gamma(d_{2n})(M_{2n}^* M_{1n} + M_{1n}^* M_{2n})}{\Gamma(d_{2n})\Gamma(d_n)},$$

где $\Gamma(S)$ – гамма функция, $M_{in} = z_1^{a_i} e^{-\frac{z_1}{b_i}} F\left(d_{in}, S_i; \frac{z_1}{b_i}\right)$.

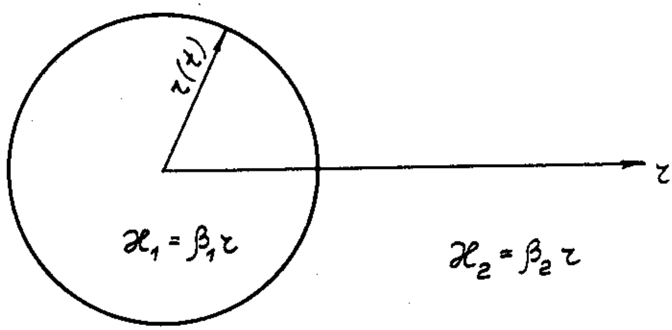
$$M_n = z_1^{a} e^{-\frac{z_1}{b_2}} F\left(d_n, S; \frac{z_1}{b_2}\right)$$

$$M_{in}^* = z_1^{a_i} e^{-\frac{z_1}{b_i}} \left[\left(\frac{a_i}{z_1} - 1\right) F\left(d_{in}, S_i; \frac{z_1}{b_i}\right) + \frac{d_{in}}{S_i} F\left(d_{in}+1, S_i+1; \frac{z_1}{b_i}\right)\right]$$

$$M_n^* = z_1^{a} e^{-\frac{z_1}{b_2}} \left[\left(\frac{a}{z_1} - 1\right) F\left(d_n, S; \frac{z_1}{b_2}\right) + \frac{d_n}{S} F\left(d_n + 1, S+1; \frac{z_1}{b_2}\right)\right]$$

$$i = 1, 2 .$$

Полученные формулы (6) и (7) с коэффициентами (II) дают возможность интерпретировать нестационарную модуляцию долговременных вариаций ГКЛ, после соответствующих численных расчетов на ЭВМ, в частности "ступенчатых" вариаций ГКЛ в II-летнем цикле, открытом А.Н.Чарахчьяном и Т.Н.Чарахчьян.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Чарахчьян А.Н., Чарахчьян Т.Н. Вековая модуляция интенсивности космических лучей в межпланетном пространстве. Изв. АН СССР сер.физ.,1967, т.3I, № 8, с.I3I3.

2. Багдасарян М.Б., Белов А.В., Дорман Л.И., Шахов Б.А. Некоторые вопросы теории модуляционных эффектов космических лучей. Изв.АН СССР, сер.физ., I97I, т.35, № I2, с.2492.

3. Багдасарян М.Б., Гущина Р.Г., Дорман Л.И., Пименов И.А., Янке В.Г. Некоторые вопросы теории вариаций космических лучей. Сб.Космические лучи, I974, № I4, с.57.

4. Прищеп В.Л., Птускин В.С. Об ускорении быстрых частиц на фронте сферической ударной волны. Астрономический журнал , I98I, т.58, с.779.

5. Багдасарян М.Б., Дорман Л.И. Нестационарная модуляция галактических космических лучей солнечным ветром расширяющейся ударной волной конечной толщины. Препринт,ИЗМИ-I34(75)

6. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции, Москва, изд. "Наука", I968, с.308.

7. Bagdasaryan M.B., Dorman L.J. Superposition of the Increases and Forbush Decreases in Galactic Cosmic Rays in the Presence of a Sequence of Shock Waves. Proc. 16th ICRC MGI-25, 1979, p.165.

Рукопись поступила I6 июля I982 г.

Редактор Л.П.Мукаян

Тех.редактор А.С.Абрамян

Заказ 5I2 ВФ-054I2 Тираж 299

Препринт ЕФИ Формат издания 60x84/I6

Подписано к печати 20/X-82 I.0 уч.изд.л.Ц . I5 к.

Издано Отделом научно-технической информации

Ереванского физического института, Ереван 36, пер.Маркаряна 2

индекс 3624