

индекс 3624

**ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ**  
**ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**

БФИ-649(39)-83

Լ.Գ.ՄԵԼՍՄԻՆ, Շ.Վ.ՏԵՐ-ԱՆՏՈՆՅԱՆ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ  
В ОБРАБОТКЕ ИНФОРМАЦИИ С РЕНТГЕНОЭМУЛЬСИОННЫХ  
ПЛЕНОК

ԵՐԵՎԱՆ 1983 ԵՐԵՎԱՆ

Изучение ядерных взаимодействий при экстремально высоких энергиях в последние годы значительно интенсифицировалось в связи с применением рентгеномульсионной (РЭ) методики [1-5], базирующейся на результатах осевого приближения каскадной теории [1,2]. Успешность метода РЭК в значительной степени зависит от точности восстановления пространственно-энергетических параметров источника каскадных ливней ( $\gamma$ -квант, электрон) по пятнам почернения в рентгеновской пленке. Съем информации с РЭК в настоящее время можно условно разделить на два типа: интегральный метод, основанный на фотометрировании пятен потемнения круговыми диафрагмами разных радиусов [2,4] и дифференциальный метод, основанный на автоматическом сканировании логарифмических плотностей пятен почернения микроденситометрами с высоким пространственным разрешением [6]. В работе [6] показано, что дифференциальный метод анализа почернений является наиболее эффективным и перспективным при изучении  $\gamma$ -семейств. Восстановление энергии  $\gamma$ -кванта в этой работе проводится методом моментов по матрице плотностей, полученной с различными шагами сканирования. Однако отметим, что представленные

результаты незначительно увеличили точность восстановления параметров источника пятен, что, вероятно, связано с процедурой частичного интегрирования внутри уровня одинаковой плотности.

В данной работе впервые предлагается использовать метод максимального правдоподобия для восстановления пространственно-энергетических параметров источника  $\gamma$ -семейств.

Хотя метод максимального правдоподобия часто приводит к более сложным вычислениям, чем метод моментов, наиболее правдоподобные (в статистическом смысле) оценки оказываются предпочтительнее, особенно в случаях малых выборок. Кроме того, при достаточно общих условиях уравнения правдоподобия имеют решения, дающие состоятельные, асимптотически нормальные и асимптотически эффективные оценки [7].

#### 1. Постановка задачи

В системе координат  $X_I Y_I$  на плоскости пленки РЭК имеется пятно почернения, вызванное  $\gamma$ -квантом с энергией  $E_0$ , зенитным углом  $\theta$  и азимутальным углом  $\varphi$  (рис.1). Точка генерации каскадного ливня ( $Z_0$ ) расположена в олове поглотителя на расстоянии  $z_0 = Z_0/c$  от центра пятна  $(x_0, y_0)$ . Рентгеномульсионная пленка сканируется автоматическим микроденситометром с шагом сканирования  $\Delta x$ ,  $\Delta y = \Delta x$  и определяются локальные плотности почернения  $\rho_{ij}$  внутри прямоугольных ячеек  $(\Delta x, \Delta y)$  с координатами центров  $x_i, y_j$  ( $i, j = 1, \dots, N$ ). Размеры раstra сканирования при разбиении его на  $N^2$  элементарных площадок соответственно равны  $x_p = \Delta x N$ ,  $y_p = \Delta y N$ .

Задача заключается в восстановлении параметров  $\gamma$ -кванта  $(E, \theta, \varphi, x_0, y_0)$  по матрице плотностей почернения  $\{\rho(x_i, y_j)\}$ , если задана функция распределения генеральной совокупности

$f(p(x, y)/E_0, \theta, \varphi, x_0, y_0) dp$ . Определение функции распределения  $f(p/\bar{n})$ , где  $\bar{n} = \bar{n}(E_0, \theta, \varphi, x_0, y_0)$ , проводится по априорной информации, основанной на осевом приближении каскадной теории [1, 2].

Известно, что проекция каскадного ливня (рис.1) на рентгеновской пленке при отсутствии флуктуаций и заданном векторе параметров аппроксимируется эллипсами почернения равных плотностей (рис.2а), которые в произвольной системе координат описываются каноническими уравнениями

$$R_k^2 = x^2 + y^2 \cos^2 \theta, \quad (1)$$

где

$$x = (x_1 - x_0) \cos \varphi + (y_1 - y_0) \sin \varphi \quad (2)$$

$$y = -(x_1 - x_0) \sin \varphi + (y_1 - y_0) \cos \varphi$$

$x_0, y_0$  - координаты центра эллипса, а  $R_k = g(\bar{\rho}_k)$  - малые полуоси эллипсов, которые определяются из осевого приближения каскадной теории:

$$Lg(\rho_k) = 2Lg\left(\frac{E_0}{10}\right) + \sum_{i=1}^6 a_i(t) \left\{ Lg\left(R_k \frac{E_0}{10}\right) \right\}^{i-1} \quad (3)$$

Величины  $a_i(t)$  - табулированные постоянные, зависящие от глубины генерации каскадного ливня ( $t$ ). Энергия ( $E_0$ )  $\gamma$ -кванта в выражении (3) измеряется в единицах ТаВ. Средняя плотность почернения  $\bar{p}$  представляет собой среднее число эквивалентных электронов, прошедших через единичную площадку рентгеновской пленки. Флуктуации числа электронов в ячейках предполагаются распределенными по закону Пуассона [6]:

$$f_i(n, x, y/\bar{n}) = \exp(-\bar{n}) \bar{n}^n / n!, \quad (4)$$

где  $\bar{n} = \bar{\rho} \cdot S$ , а  $S = \Delta x \cdot \Delta y$

Область изменения  $\rho = \frac{n}{S}$  определяется из кривой почернения рентгеновских пленок и по аналогии с [6] соответственно равна  $2 \cdot 10^{-3} = \rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max} = 5 \cdot 10^{-1} \text{ мкм}^{-2}$ . Кроме этого, матрица плотностей содержит в себе флуктуации фона, которые не зависят от вектора параметров и распределены по Пуассону аналогично (4), со средним значением  $\bar{\rho}_f = 4 \cdot 10^{-2} \text{ мкм}^{-2}$ .

Таким образом, на основе приведенной априорной информации, необходимо решить обратную задачу - восстановление вектора параметров  $\bar{\eta} = \bar{\eta}(E, \theta, \varphi, \chi_0, \chi_0)$  по известной из эксперимента матрице плотностей  $\{\rho_{ij}\}$  для набора  $x_i, y_j$  ( $i, j = 1, \dots, N$ )

## 2. Метод максимального правдоподобия

Определение пространственно-энергетических параметров  $\gamma$  - кванта по матрице плотностей семейства является классической проблемой теории многопараметрического оценивания. Рассмотрим метод максимального правдоподобия в применении к данной задаче.

На основе априорных данных о структуре пятна почернения определим функцию правдоподобия следующим образом:

$$\Phi(\{\rho_{ij}\} / \bar{\eta}) = \prod_{k_1=1}^{N_0} f_0(n_{k_0} \leq n_{\min} / \bar{\eta}) \prod_{k_1=1}^{N_1} f_1(n_{k_1} / \bar{\eta}) \prod_{k_2=1}^{N_2} f_2(n_{k_2} \geq n_{\max} / \bar{\eta}), \quad (5)$$

где  $N_0 + N_1 + N_2 = N \cdot N$ .

$f_0$  и  $(f_2)$  - вероятности того, что в ячейке  $k_0$  ( $k_2$ ), соответствующей координатам  $x_i, y_j$ , число эквивалентных электронов меньше (больше) порогового значения  $n_{\min}$  ( $n_{\max}$ ) при данном значении  $\bar{\eta}$ .  $N_0$  и  $(N_2)$  - число ячеек из матрицы плотностей, удовлетворяющих этим условиям.

В случае применимости пуассоновского распределения (4) со-

ответственно имеем:

$$f_0(n_{k_0} / \bar{\eta}) = \sum_{n=0}^{n_{\min}} \exp(-\bar{n}_{k_0}) \frac{\bar{n}_{k_0}^n}{n!}, \quad (6)$$

$$f_2(n_{k_2} / \bar{\eta}) = 1 - \sum_{n=0}^{n_{\max}-1} \exp(-\bar{n}_{k_2}) \frac{\bar{n}_{k_2}^n}{n!}. \quad (7)$$

Применяя к (5) стандартные процедуры метода максимального правдоподобия [7] получим оценки компонент вектора  $\bar{\eta}$  из системы уравнений

$$\partial L / \partial \eta_i = \partial (\ln \Phi) / \partial \eta_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 5). \quad (8)$$

Оценка (8) максимального правдоподобия имеет асимптотически нормальное распределение со средними значениями  $\langle \eta_i \rangle$  и дисперсией

$$\sigma_{\eta_i}^2 = -1 / M \left\{ \frac{\partial^2 L}{\partial \eta_i^2} \right\} \approx -1 / \left\{ \frac{\partial^2 L}{\partial \eta_i^2} \right\} \eta_i = \langle \eta_i \rangle, \quad (9)$$

где  $M$  - оператор математического ожидания.

Система уравнений (8), решениями которых являются точечные оценки параметров  $\langle \eta_i \rangle \equiv E_0, \theta, \varphi, \chi_0, \chi_0$ , является почти во всех случаях системой нелинейных уравнений, аналитически не разрешимых относительно параметров  $\eta_i$ . Обычно этим и обуславливается сложность применения метода максимального правдоподобия при решении многопараметрических задач. Для примера рассмотрим эксперимент с "идеальной" рентгеновской пленкой, т.е.  $\rho_{\min} = 0$ ,  $\rho_{\max} = \infty$ ,  $n_f = 0$ . Тогда на основе (1-4) и (8) имеем систему нелинейных уравнений правдоподобия

$$\frac{\partial L}{\partial (E/\hbar)} = \sum_i \sum_j [\bar{\rho}_{ij} \{2 + c \cdot \varepsilon_{ij}\} \cdot \left( \frac{\rho_{ij}}{\bar{\rho}_{ij}} - 1 \right)] = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \sum_i^N \sum_j^N [\bar{\rho}_{ij} \frac{Y_i^2}{R_{ij}^2} \varepsilon_{ij} (\frac{\rho_{ij}}{\bar{\rho}_{ij}} - 1)] = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \sum_i^N \sum_j^N [\bar{\rho}_{ij} \frac{X_i Y_i}{R_{ij}^2} \varepsilon_{ij} (\frac{\rho_{ij}}{\bar{\rho}_{ij}} - 1)] = 0,$$

(10)

где  $\varepsilon_{ij} = \sum_{\ell=2}^6 b_{\ell}(t)(i-1) \{c \cdot \ln(R_{ij} \frac{E_0}{10})\}^{\ell-2}$ ,  $b_{\ell} = a_{\ell}(t) L_n 10$ .

Решение уравнений (9) возможно только лишь на ЭВМ, обладающей большой памятью для запоминания матриц координат  $\{X_i\}$ ,  $\{Y_j\}$  и плотностей  $\{\rho_{ij}\}$ .

Отметим, что для ЭВМ БЭСМ-6 это доступно подпрограмме MINSQ (ОБСП ДУБНА [8]), минимизирующей сумму квадратов функций

$$\left(\frac{\partial L}{\partial E_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi}\right)^2 = \Delta(E_0, \theta, \varphi)$$

(11)

для определения искоемых точечных оценок  $E_0, \theta, \varphi$ .

### 3. Результаты численных расчетов

В настоящее время для апробирования методов обработки информации с РЭК получила распространение методика моделирования растров рентгеновских пленок с пятном почернения при фиксированных параметрах источника [2,6]. Аналогично работе [6] нами был разработан генератор растров, моделирующий методом Монте-Карло матрицу плотностей  $\{\rho_{ij}\}$  (рис.2). На рис.2 (а, б, с) для примера приведены пятна почернения, вызванные  $\gamma$ -квантом энергии 10 ТэВ при глубине генерации ливня 10 радиационных единиц для под большим зенитным углом падения. Рис.2а соответствует отсутствию флуктуаций и фона рентгеновской пленки. Рис.2(б, с) - с учетом флуктуаций (б) и фона (с) пленки. Текстовые величины  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}, \bar{E}$  соответствуют граничным плотностям меньше, 0,2, 0,4 (ФОН), .1, .2, .5, >.5  $\text{мм}^{-2}$ . Шаг сканирова-

ния  $\Delta x = \Delta y = 10$   $\mu\text{м}$ . Расчеты проводились на ЭВМ БЭСМ-6. Генератором псевдослучайных чисел, равномерно распределенных в интервале  $[0,1]$ , использовалась подпрограмма RNDM (-1) из работы [8]. По моделированной матрице плотностей  $\{\rho_{ij}\}$ , полученной для фиксированных  $N, \Delta x = \Delta y, E_0, \varphi, X_0, Y_0, P_{\phi}, P_{\min}, P_{\max}$ , минимизировалось выражение

$$\Delta(E_0, \theta, \varphi, X_0, Y_0) = -L_n \Phi(\{\rho_{ij}\} / \bar{n})$$

(12)

и определялись точечные оценки  $E'_0, \theta', \varphi', X'_0, Y'_0$ , с соответствующими значениями стандартных отклонений  $\sigma_{E_0}, \sigma_{\theta}, \dots, \sigma_{Y_0}$ . Минимизация проводилась посредством подпрограммы FUMILI - вход LIKELM [8].

Для увеличения скорости счета на ЭВМ при минимизации выражения (12) пуассоновские распределения в функции правдоподобия (5) при  $n \geq 10$  можно заменить на соответствующие нормальные распределения ( $\sigma^2 = \bar{n}$ ). Это позволит использовать быстродействующую подпрограмму NØRMCØ [8] в генераторе растров. Дифференциальный (4) и интегральные спектры плотностей (6) и (7) соответственно преобразуются к виду:

$$f_1(\bar{n}_{k_1} / \bar{n}) = n(\bar{n}_{k_1}, \sqrt{\bar{n}_{k_1}})$$

(13)

$$f_0(\bar{n}_{k_0} / \bar{n}) \approx \int_0^{\bar{n}_{\min}} n(\bar{n}_{k_0}, \sqrt{\bar{n}_{k_0}}) d\bar{n}_{k_0} = \frac{1}{2} (1 + \text{erf}(\frac{\bar{n}_{\min} - \bar{n}_{k_0}}{\sqrt{2\bar{n}_{k_0}}}))$$

(14)

$$f_1(\bar{n}_{k_2} / \bar{n}) \approx 1 - \int_0^{\bar{n}_{\max}} n(\bar{n}_{k_2}, \sqrt{\bar{n}_{k_2}}) d\bar{n}_{k_2} = 1 - \frac{1}{2} (1 + \text{erf}(\frac{\bar{n}_{\max} - \bar{n}_{k_2}}{\sqrt{2\bar{n}_{k_2}}}))$$

(15)

где  $n(\bar{n}, \sqrt{\bar{n}})$  - плотность нормального распределения со средним значением  $\bar{n}$  и среднеквадратным отклонением  $\sqrt{\bar{n}}$ .

$e^{-z} f(z)$  - функция ошибок.

Восстановление параметров моделированных растров проводилось для дискретного ряда энергий  $\gamma$  - квантов ( $E_0 = 2; 5; 10; 20; 50; 100; 200; 500; 1000$  ТэВ) и размеров ячеек соответственно  $\Delta x = \Delta y = 10, 20$  мкм, с дополнительным условием  $t = d / \cos \theta = 10$  рад.ед.длины Рь, где  $d$  - соответствующая толщина поглотителей РЭК. Последнее условие вводилось для простоты вычислений и экономии времени счета на ЭВМ. Граничные значения параметров  $\bar{n}_\phi, n_{\min}, n_{\max}$  в функции правдоподобия (5) выбирались из работы [6] и соответственно равны  $\rho_\phi = 0.4 \text{ мкм}^{-2}$ ,  $\rho_{\min} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ мкм}^{-2}$ ,  $\rho_{\max} = 0.5 \text{ мкм}^{-2}$ , где  $\rho = n / (\Delta x \cdot \Delta y)$ . Функции распределения плотности электронов при данных значениях  $E, R$  определялись согласно выражениям (4), (6), (7) с учетом плотности фона рентгеновской пленки  $\bar{n} = \bar{n}(ER) + \bar{n}_\phi$  (распределение фона предполагается пуассоновским).

Основные результаты численных расчетов приведены на рис.3-7. На рис.3 показана точность оценки  $E'$  энергии  $E$   $\gamma$ - кванта. Там же приведены результаты из работы [6], полученные методом моментов. Видно значительное улучшение точности восстановления энергии и независимость точности от энергии  $\gamma$  - кванта.

На рис.4 показана зависимость оценки энергии 10 ТэВ при различных зенитных углах  $\theta$  (рад) падения  $\gamma$  - кванта на рентгеновскую пленку. На рис.5 приведено распределение относительной точности ( $\theta'/\theta$ ) восстановления зенитного угла  $\theta$ . На рис.6 дано аналогичное распределение для азимутальных углов ( $\psi'/\psi$ ). Точность восстановления центра пятна потемнения ( $X_0 = Y_0 = 20$  мкм) приведена на рис.7.

Из рис.3-7 следует, что метод максимального правдоподобия при дифференциальном сканировании рентгеноэмulsionных пленок значительно увеличивает точность восстановления параметров источника. При этом расчетное значение точности восстановления согласно (8) совпадает с реальной точностью оценок. Это указывает на асимптотическую нормальность и асимптотическую несмещенность оценок. Кроме того нами исследовано влияние флуктуаций электромагнитного каскадного ливня и фона пленки на точность оценки параметров. Получено, что функция правдоподобия (5) дает несмещенные оценки даже при 2-х кратном увеличении флуктуаций.

Отметим, что предложенный метод можно применить и в случае наложенных друг на друга (перекрывающихся) пятен почернения, вызванных несколькими  $\gamma$  - квантами. Для этой цели в функции правдоподобия (5) необходимо провести замену

$$\bar{n} = \sum_{i=1}^{n_\gamma} \bar{n}(E_i, R_i) + \bar{n}_\phi$$

Соответственно число неизвестных параметров в процедуре минимизации (12) будет равно  $5 n_\gamma$ .

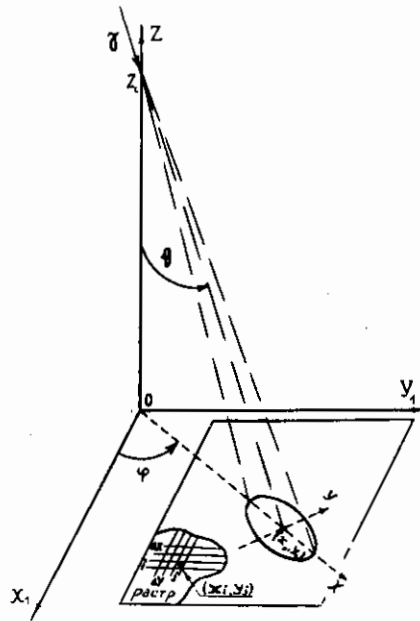


Рис.

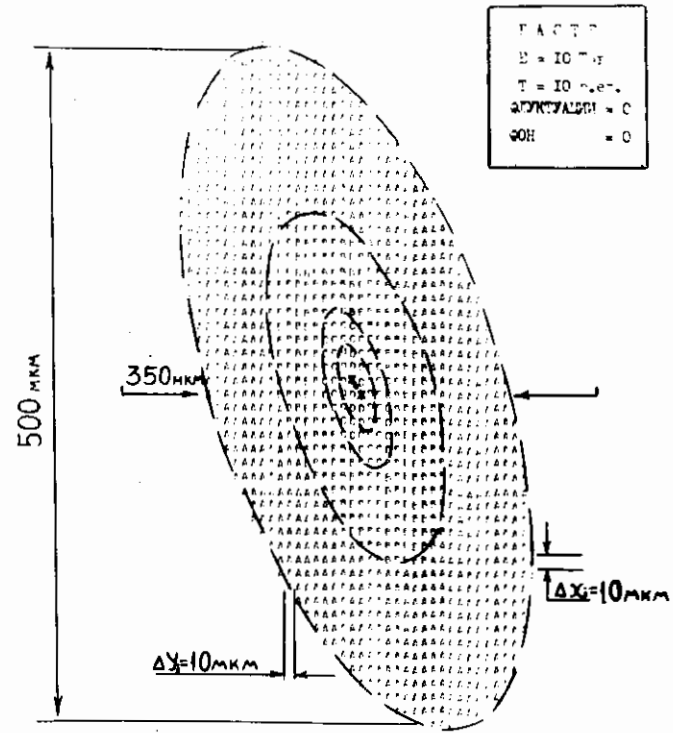
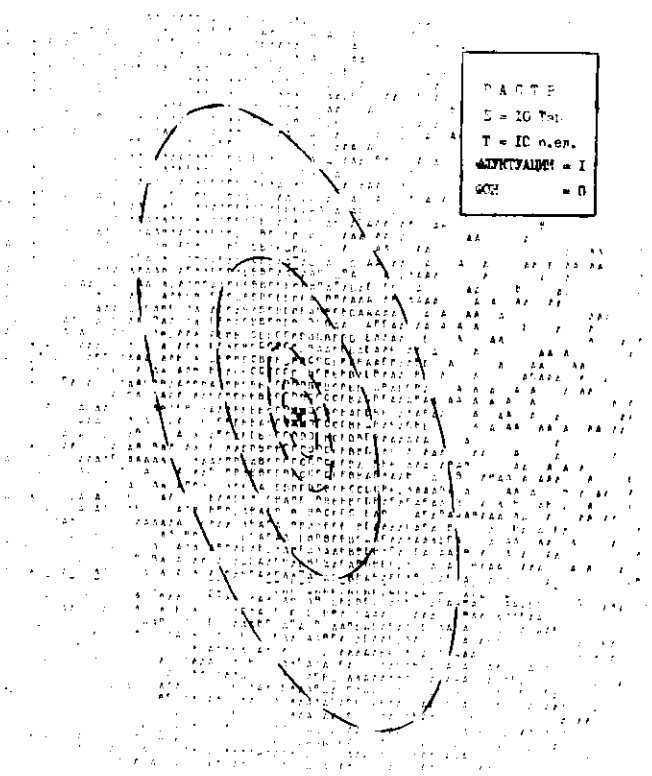
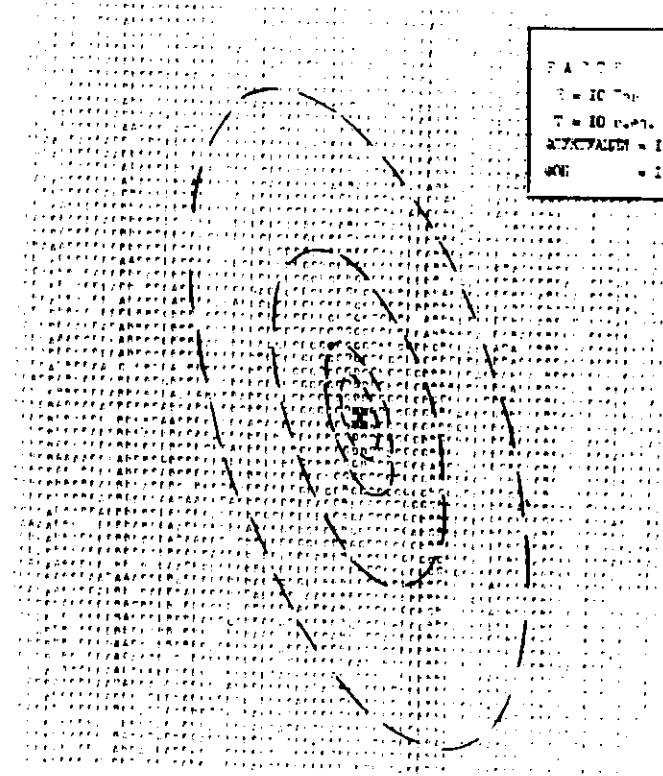


Рис.



PACTE  
 S = 10 Ton.  
 T = 10 n.en.  
 SIKYALDI = I  
 GCH = 0

Prk. 16



PACTE  
 S = 10 Ton.  
 T = 10 n.en.  
 SIKYALDI = I  
 GCH = 0

Prk. 16

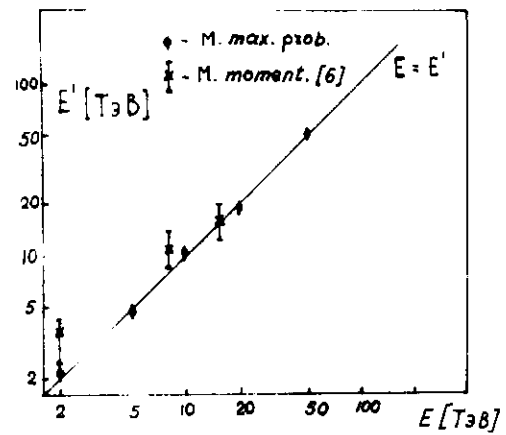


Fig. 5

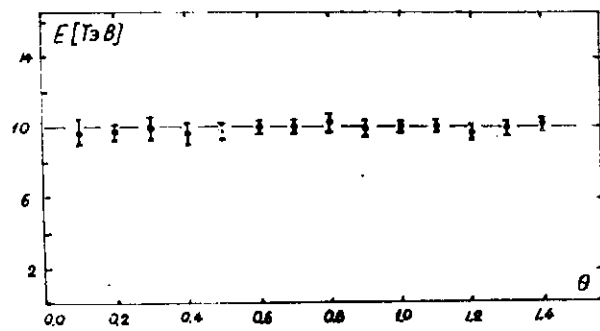


Fig. 6

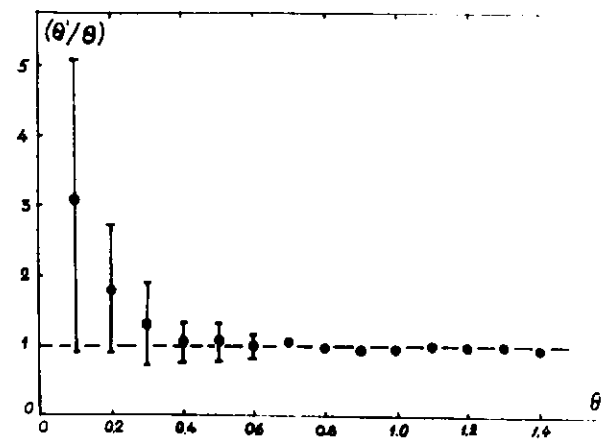


Fig. 7

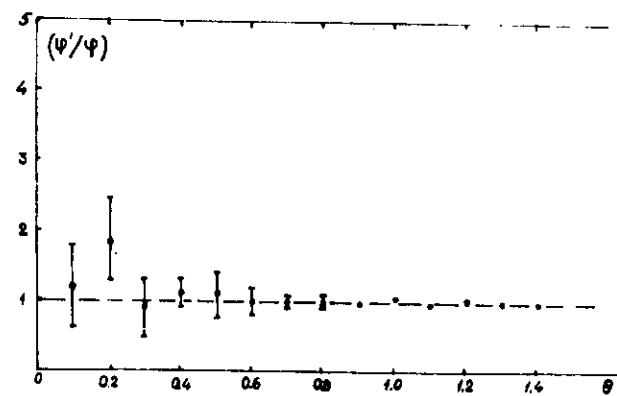


Fig. 8

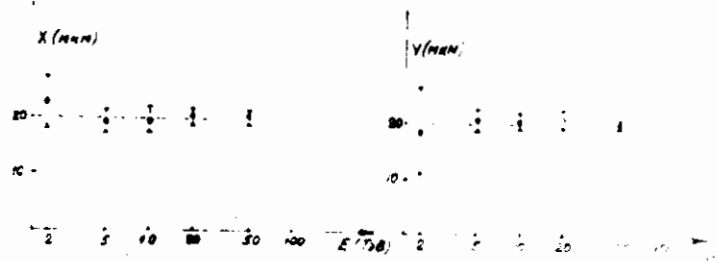


Рис.7

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ

- Рис.1 Проекция каскадного ливня на плоскость пленки.
- Рис.2 Пятна почернения, вызванные  $\gamma$  - квантом с энергией 10 ТэВ при  $t = 10$  рад.ед.длины под зенитным углом 1 рад:
- а) без флуктуаций и фона;
  - б) с учетом флуктуаций без фона;
  - в) с учетом флуктуаций и фона.
- Текстовые величины  $\square$ , А, В, С, Д, Ж соответствуют граничным плотностям  $< .02, .04, .1, .2, .5, > .5 \text{ мкм}^{-2}$   
Шаг сканирования 10 мкм.
- Рис.3 Точность оценки  $E'$  энергии  $E$   $\gamma$  - кванта.
- Рис.4 Зависимость оценки энергии 10 ТэВ при различных зенитных углах  $\theta$  (рад) падения  $\gamma$  - кванта на рентгеновскую пленку.
- Рис.5 Распределение относительной точности  $(\theta'/\theta)$  восстановления зенитного угла  $\theta$ .
- Рис.6 Распределение относительной точности  $(\varphi'/\varphi)$  восстановления азимутального угла.
- Рис.7 Точность восстановления центра пятна потемнения ( $X_0 = Y_0 = 20 \text{ мкм}$ ).

• СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arapashenko A.V., Baradzei L.T., Kanevskaya E.A. et al.  
The spectrum of  $\gamma$ -rays in the energy range  $10^{11}$  to  $10^{13}$  eV at an atmospheric depth of  $200 \text{ g/cm}^2$ , and pion generation in high-energy nucleon interactions. *Canad. Journ. of Phys.* 1968 vol.46, p.701.
2. Барадзе Л.Т., Каневская Е.А., Смородин Ю.А. Труды ФИАН, 1970, т.46, с.200.
3. Барадзе Л.Т., Каневская Е.А., Смородин Ю.А., Соловьев М.В. Уточненный метод фотометрического определения энергии электронно-фотонных каскадов в эмульсионных камерах с рентгеновскими пленками. Препринт ФИАН № 65, Москва, 1971.
4. Содружество "Памир". Энергетические характеристики семейств  $\chi$  квантов. Изв.АН СССР, сер.физ.1980, т 44, № 3, с.450-453.  
Содружество "Памир". Пространственные характеристики семейств  $\chi$  - квантов. Изв.АН СССР сер.физ. 1980, т.44, № 3, с.454-456.
5. Noshino K., Kuramatu S., Niu K., et al. Proc. 14-th Intern. Cosmic Ray Conf., 1975, vol.7, p.2330.
6. Асатиани Т.Л., Генина Л.Э., Мелкумян Л.Г., Смородин Ю.А. Моделирование обработки электронно-фотонных каскадов на пленках рентгеноэмульсионных камер методом сканирования. Изв. АН СССР, сер.физ. 1980, т.44, № 3, с.466-468.
7. Худсон Д. Статистика для физиков. М: Мир, 1967, с.242.
8. Мазный Г.Л. Программирование на БЭСМ-6 в системе "Дубна" М.: Наука, 1978.

Рукопись поступила 8 апреля 1983 г.

ИЗДАНИЕ

Редактор Л.П.Мукаян  
Тех.редактор А.С.Абрамян

Заказ 250 ВФ-06002 Тираж 270  
Препринт ЕФИ Формат издания 60x84/16  
Подписано к печати 22/УИИ-83г. 1,0 уч.-изд.л. Ц. 15 к.  
Издано Отделом научно-технической информации  
Ереванского физического института, Ереван 36, Маркяна 2