

индекс 3624

ԵՐԵՎԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ
ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ԳԱՐԿԱՆՈՒԹՅԱՆ
ԻՆՏԻՏՈՒՏ

ԲՈՒ-679(69)-83

Х. А. СИМОНЯН

ВОЗМУЩЕННОЕ ПОПЕРЕЧНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ
ЧАСТИЦ В ЦИКЛИЧЕСКИХ УСКОРЯТЕЛЯХ (НАКОПИТЕЛЯХ)

ԵՐԵՎԱՆԻ 1983 ԵՐԵՎԱՆ

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

БВИ-679(69)-83

Х. А. СИМОНЯН

ВОЗМУЩЕННОЕ ПОПЕРЕЧНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ
ЧАСТИЦ В ЦИКЛИЧЕСКИХ УСКОРЯТЕЛЯХ (НАКОПИТЕЛЯХ)

Ереван 1963

I. ВВЕДЕНИЕ

При проектировании кольцевых ускорителей (накопителей) существует ряд важных вопросов, решение которых зависит от точного знания поперечных и продольных размеров сгустков ускоряемых (накопленных) пучков. Среди таких вопросов можно указать, в частности, выбор размеров вакуумной камеры, расчет потерь частиц, допустимого давления в камере и т. д.

В накопительных кольцах при организации встречных столкновений важную роль играет величина светимости, которая, как известно, существенно зависит от размеров пучков в момент встречи.

Иными словами, необходимо уметь вычислять амплитуды поперечных и продольных колебаний в любой момент времени ускорения (накопления).

Теория движения пучков частиц в циклических ускорителях (накопителях) хорошо разработана и изложена в ряде обзоров и монографий [1, 2, 3].

Однако, как будет показано ниже, при расчете поперечных размеров пучка в реальных установках, когда движение частиц является возмущенным по отношению к идеальной (проектной) установке, теория не учитывает один существенный эффект, который можно

назвать - изменение амплитуды "свободных" колебаний из-за наличия в установке возмущения.

В большинстве практически важных случаев в реальных установках вводится понятие возмущенной замкнутой орбиты, отличающейся от идеальной (проектной), рассчитанной при отсутствии возмущений. Теория утверждает [1,2,3], что в реальной установке вокруг возмущенной орбиты частицы совершают те же свободные бета-атронные колебания, которые они совершали бы вокруг идеальной в отсутствие возмущения.

На самом же деле (см. ниже) вокруг возмущенной орбиты частицы совершают колебания, амплитуды которых уже зависят от величины возмущения.

Так, например, учет этого факта в случае нарушения азимутальной симметрии ведущего поля, приводит к тому, что эффективная апертура камеры уменьшается на величину $r_{зам}^{max} + |r_{зам}^{min}| + 2|r_{зам}^0|$ вместо $r_{зам}^{max} + |r_{зам}^{min}|$, как следует из теории, где $r_{зам}^0$ - значение замкнутой орбиты в точке инжекции.

Существование такого эффекта объясняет, в частности, разногласие экспериментальных результатов работы [4] по измерению рабочей области вакуумной камеры от предоказаний теории.

С другой стороны, этот эффект вводит ограничения на предельно достижимое уменьшение размеров пучка в данной установке.

Для целей вывода частиц из ускорителя или наведения пучка на внутреннюю мишень обычно используют специальные возмущения ведущего магнитного поля, и, тем самым, изменяют и размеры осевого пучка.

Характер такого изменения, особенно если оно не постоянно во времени, может существенно влиять на результаты эксперимента,

в частности, при растянутом во времени выводе.

В связи с этим в настоящей работе проводится детальный анализ поперечного движения частиц в сильнофокусирующей магнитной структуре при наличии различного рода возмущений магнитного поля.

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

В циклических ускорителях (накопителях) частицы совершают много оборотов.

В связи с этим удобно характеризовать положение частицы в данный момент времени, указывая её азимут S и номер оборота K . Введем переменную $x = S + (K-1)L$, где S отсчитывается от некоторой точки $S=0$ вдоль равновесной (реперной) орбиты, длина которой есть L . В сильнофокусирующей магнитной системе эта реперная кривая лежит в медианной плоскости и состоит из дуг постоянного радиуса $\rho = const$ в блоках ведущего магнитного поля и отрезков прямых - в промежутках между блоками.

В такой системе уравнения поперечного движения в реальном случае (без учета ускорения) имеют вид:

$$y'' + \mathcal{K}(x)y = F(x), \quad (1)$$

где $y = r, z$; r - отклонение частицы от реперной кривой по радиусу; z - отклонение от медианной плоскости. $\mathcal{K}(x)$ - периодическая функция, по крайней мере, с периодом L ,

$$\mathcal{K}(x) = \mathcal{K}(s + (K-1)L) = \mathcal{K}(s) \quad (2)$$

$F(x)$ - описывает возмущение. В одном случае оно обязано

несовершенству магнитной структуры кольца. В другом — специально вводимое, как например, для целей вывода частиц из ускорителя или наведения пучка на внутреннюю мишень.

Уравнение (I) без правой части ($F=0$) имеет два частных решения:

$$y_1 = \beta^{1/2}(x) \cdot \cos \psi(x),$$

$$y_2 = \beta^{1/2}(x) \cdot \sin \psi(x);$$

где β, ψ — известные [2] амплитудная и фазовая функции, обладающие свойствами:

$$\beta(x+L) = \beta(x) = \beta(s); \quad (3)$$

$$\psi(x+m\ell) = \psi(x) + 2\pi Q \cdot m.$$

Здесь Q — число бетатронных колебаний на длине L по соответствующей степени свободы. Функция $\psi(x)$ связана с $\beta(x)$ соотношением

$$\psi(x) = \int_0^x \frac{dx}{\beta(x)}. \quad (4)$$

Метод вариации постоянных позволяет найти общее решение уравнения (I).

Для $y(x)$ и $y'(x) = \frac{dy}{ds}$ имеем:

$$y(x) = \beta^{1/2}(x) [a_1 \cos \psi(x) + a_2 \sin \psi(x)] +$$

$$+ \beta^{1/2}(x) \int_0^x F(t) \beta^{1/2}(t) \sin [\psi(x) - \psi(t)] dt, \quad (5)$$

$$y'(x) = \beta^{-1/2}(x) \{ a_1 [-\alpha(x) \cos \psi(x) - \sin \psi(x)] + a_2 [-\alpha(x) \sin \psi(x) + \cos \psi(x)] \} -$$

$$- \beta^{-1/2}(x) \alpha(x) \int_0^x F(t) \beta^{1/2}(t) \sin [\psi(x) - \psi(t)] dt +$$

$$+ \beta^{-1/2}(x) \int_0^x F(t) \beta^{1/2}(t) \cos [\psi(x) - \psi(t)] dt, \quad (6)$$

здесь введено общепринятое обозначение $\alpha(x) = -\frac{1}{2} \beta'(x)$.

Первый член в (5) описывает свободные бетатронные колебания, второй — вынужденные, т.е.

$$y(x) = y_{св}(x) + y_{вын}(x). \quad (7)$$

Произвольные постоянные a_1, a_2 определяются обычно из начальных условий

$$y(0) = y_0; \quad y'(0) = y'_0. \quad (8)$$

Вместо постоянных a_1, a_2 удобно ввести две другие постоянные $A = y_{\max}$ и φ , связанные с начальными условиями соотношениями

$$A = \beta_{\max}^{1/2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \beta_{\max}^{1/2} \left[\frac{y_0^2 + (\alpha_0 y_0 + \beta_0 y'_0)^2}{\beta_0} \right]^{1/2}$$

$$\varphi = \arctg \frac{a_2}{a_1} = \arctg \frac{y'_0 \beta_0 + \alpha_0 y_0}{y_0} \quad (9)$$

Подставляя (9) в (5) и (6), получим:

$$y(x) = \left(\frac{\beta(x)}{\beta_{\max}} \right)^{1/2} A \cos [\psi(x) - \varphi] +$$

$$+ \beta^{1/2}(x) \int_0^x F(t) \beta^{1/2}(t) \sin [\psi(x) - \psi(t)] dt \quad (10)$$

$$y'(x) = -\frac{A}{(\beta(x)\beta_{\max})^{1/2}} \left\{ \alpha(x) \cos[\psi(x) - \vartheta] + \sin[\psi(x) - \vartheta] \right\} + \\ + \beta^{-1/2}(x) \left\{ -\alpha(x) \int_0^x F(t) \beta^{1/2}(t) \sin[\psi(x) - \psi(t)] dt + \right. \\ \left. + \int_0^x F(t) \beta^{1/2}(t) \cos[\psi(x) - \psi(t)] dt \right\}. \quad (II)$$

Величина A есть амплитуда бетатронных колебаний или максимальное значение огибающей оогласованного пучка при отсутствии возмущения.

Частицы пучка отличаются друг от друга значениями параметров (A, ϑ) , возможные значения которых есть $0 < A < A_{\max}$, $0 \leq \vartheta < 2\pi$.

Частица с параметрами $A = \vartheta = 0$ является центральной частицей пучка и в отсутствие возмущения движется по замкнутой траектории (орбите) $y(x) = 0$.

Из (IO) видно, что при наличии возмущения, центральная частица движется по кривой, описываемой вторым членом в (IO), которая при произвольном возмущении $F(x)$ не есть замкнутая кривая и, следовательно, не является новой орбитой.

Другими словами, при возмущенном движении частицы совершают нормальные бетатронные колебания вокруг $y_{\text{бета}}(x)$, которая, в общем случае, не есть замкнутая кривая.

3. ЗАМКНУТАЯ ОРБИТА

Среди многообразия типов возмущений одним из практически важных случаев является случай, когда возмущение не зависит от времени (числа оборотов), т.е. возмущение $F(x)$ есть периоди-

ческая функция с периодом L ,

$$F(x) = F(s + (K-1)L) = F(s).$$

В этом случае (IO) и (II) приобретают вид (см. приложение I)

$$y(s, K) = \left(\frac{\beta(s)}{\beta_{\max}} \right)^{1/2} A \cos[\psi(s) + 2\pi Q(K-1) - \vartheta] + \\ + \frac{\beta^{1/2}(s)}{2 \sin \pi Q} \int_s^{s+L} F(t) \beta^{1/2}(t) \cos[\psi(s) + \pi Q - \psi(t)] dt - \\ - \frac{\beta^{1/2}(s)}{2 \sin \pi Q} \int_0^L F(t) \beta^{1/2}(t) \cos[\psi(s) + 2\pi Q(K-1) + \pi Q - \psi(t)] dt, \quad (I2)$$

$$y'(s, K) = -\frac{A}{(\beta(s)\beta_{\max})^{1/2}} \left\{ \alpha(s) \cos[\psi(s) + 2\pi Q(K-1) - \vartheta] + \right. \\ \left. + \sin[\psi(s) + 2\pi Q(K-1) - \vartheta] \right\} + \\ + \frac{-\alpha(s)\beta^{1/2}(s)}{2 \sin \pi Q} \left\{ \int_s^{s+L} F(t) \beta^{1/2}(t) \cos[\psi(s) + \pi Q - \psi(t)] dt - \right. \\ \left. - \int_0^L F(t) \beta^{1/2}(t) \cos[\psi(s) + 2\pi Q(K-1) + \pi Q - \psi(t)] dt \right\}. \quad (I3)$$

Выражения (I2), (I3) описывают положение частицы и угол наклона по отношению к равновесной орбите (медианной плоскости) на азимуте S на K -ом обороте.

Обращает на себя внимание тот факт, что второй член в (I2) не зависит от K , в то время как два других — зависят от K одинаковым образом.

Второй член в (I2) есть известная в теории (см., например [2]) стационарная замкнутая орбита при наличии стационарного возмущения:

$$y_{\text{зам}}(s) = \frac{\beta^{1/2}(s)}{2 \sin \pi Q} \int_s^{s+L} F(t) \beta^{1/2}(t) \cos[\psi(s) + \pi Q - \psi(t)] dt, \quad (I4)$$

$$y'_{\text{зам}}(s) = -\frac{\beta^{-1/2}(s)}{2 \sin \pi Q} \left\{ \alpha(s) \int_s^{s+L} F(t) \beta^{1/2}(t) \cos[\psi(s) + \pi Q - \psi(t)] dt + \int_s^{s+L} F(t) \beta^{1/2}(t) \sin[\psi(s) + \pi Q - \psi(t)] dt \right\}. \quad (I5)$$

Объединяя теперь первый и третий члены в (I2) и учитывая (I4), получим:

$$y(s, \kappa) = y_{\text{зам}}(s) + \left(\frac{\beta(s)}{\beta_{\text{max}}} \right)^{1/2} B \cos[\psi(s) + 2\pi Q(\kappa - 1) - \xi], \quad (I6)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} B^2 &= B_1^2 + B_2^2, \\ B_1 &= A \sin \varphi + \beta_{\text{max}}^{1/2} I \sin(\pi Q - \zeta) / 2 \sin \pi Q, \\ B_2 &= A \cos \varphi - \beta_{\text{max}}^{1/2} I \cos(\pi Q - \zeta) / 2 \sin \pi Q; \\ I^2 &= I_s^2 + I_c^2, \\ I_{s,c} &= \int_0^L F(t) \beta^{1/2}(t) \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} \psi(t) dt, \\ \zeta &= \arctg(I_s/I_c); \quad \xi = \arctg(B_1/B_2). \end{aligned} \quad (I7)$$

Из (I6) следует, что при стационарном возмущении поперечное движение частиц действительно представляет собой нормальные бетатронные колебания вокруг новой (возмущенной) замкнутой орбиты $y_{\text{зам}}(s)$.

Однако, амплитуда этих колебаний существенно зависит от величины возмущения. Другими словами, имеет место увеличение эмиттанса пучка, согласованного с идеальной машиной.

Действительно, как известно, величина

$$W_0 = \frac{1}{\beta(s)} [y^2(s, \kappa) + (\alpha(s) y(s, \kappa) + \beta(s) y'(s, \kappa))^2] \quad (I8)$$

при отсутствии возмущения является инвариантом движения (инвариант Куранта-Снайдера) и равна

$$W_0 = \frac{1}{\beta_0} (y_0^2 + (\alpha_0 y_0 + y_0' \beta_0)^2) = A^2 \beta_{\text{max}}^{-1}. \quad (I9)$$

Эмиттанс ϵ_0 согласованного с идеальной машиной пучка пропорционален величине W_0 ($\epsilon_0 = \pi W_0$).

Составим теперь величину

$$W_{\text{возм}} = \frac{1}{\beta(s)} \left\{ [y(s, \kappa) - y_{\text{зам}}(s)]^2 + [\alpha(s)(y(s, \kappa) - y_{\text{зам}}(s)) + \beta(s)(y'(s, \kappa) - y'_{\text{зам}}(s))]^2 \right\} \quad (20)$$

Простая подстановка (I6), (I7) в (20) дает:

$$W_{\text{возм}} = B^2 \beta_{\text{max}}^{-1} = \text{const}. \quad (21)$$

Инвариантность величины (21) указывает на то, что инжектированный в возмущенную структуру пучок с эмиттансом ϵ_0 будет совершать движение вокруг новой замкнутой орбиты в ограниченном фазовом объеме, но его эмиттанс будет уже не ϵ_0 , а

$$\epsilon_{\text{возм}} = \pi B^2 \beta_{\text{max}}^{-1}. \quad (22)$$

Величина B при этом есть максимальное значение огибающей пучка, центр которого движется по $y_{\text{зам}}(s)$.

Если значение const в (21) определить из начальных условий, т.е.

$$W_{\text{возм}} = \frac{1}{\beta_0} \left\{ (y_0 - y_{0\text{зам}})^2 + [\alpha_0 (y_0 - y_{0\text{зам}}) + \beta_0 (y'_0 - y'_{0\text{зам}})]^2 \right\}, \quad (23)$$

то ясно видно, что увеличение эмиттанса пучка связано тем частям, значения начальных отклонений и угла ($y_0 = y(0)$, $y'_0 = y'(0)$) которых имеют знаки, противоположные знакам значений $y_{0\text{зам}}$, $y'_{0\text{зам}}$, соответственно.

Максимальное значение B будут иметь те частицы, начальные фазы φ которых удовлетворяют при данном A условию (см. Г7))

$$\cos(\pi Q + \varphi - \zeta) / \sin \pi Q = -1 / |\sin \pi Q|, \quad (24)$$

что равносильно условию

$$\frac{1}{y_0} (y'_0 \beta_0 + \alpha_0 y_0) = \frac{1}{y_{0\text{зам}}} (\alpha_0 y_{0\text{зам}} + \beta_0 y'_{0\text{зам}}). \quad (25)$$

Тогда увеличение максимального значения огибающей пучка принимает относительно простой вид:

$$\begin{aligned} \Delta A &= B - A = \beta_{\text{max}}^{1/2} I / 2 |\sin \pi Q| = \\ &= \left(\frac{\beta_{\text{max}}}{\beta_0} \right)^{1/2} \sqrt{y_{0\text{зам}}^2 + (\alpha_0 y_{0\text{зам}} + y'_{0\text{зам}} \beta_0)^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Из (26) следует, что для уменьшения величины ΔA инжекцию пучка следует проводить в такой точке, где значения $y_{0\text{зам}}$ и $y'_{0\text{зам}}$ относительно малы.

Однако, на практике не всегда это возможно, поскольку возмущение $F(s)$ не всегда бывает заранее известным.

Рассмотрим несколько типичных примеров возмущения.

4. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ

Практически важным случаем возмущенного движения является случай, когда возмущение связано с ошибками в изготовлении магнитов и их расстановке в кольце.

В общем виде возмущение $F(s)$ есть [2] :

$$F(s) = \pm \frac{n}{\rho^2} \delta y \mp \frac{\delta B(s)}{B_0}, \quad (27)$$

где δy - смещения элементов магнита из-за ошибок в их расстановке;

δB - ошибки поля из-за изготовления элементов магнита;

ρ - показатель спада магнитного поля;

ρ - радиус кривизны в элементах магнита на равновесной орбите;

B_0 - значение поля на равновесной орбите.

Поскольку значения δy , δB носят случайный характер, то для нахождения интеграла I обычно вводят предположение, что возмущение постоянно на протяжении одного магнитного блока, а от блока к блоку меняется случайным образом. При этом нет корреляции между величинами δy и δB .

Магнитное кольцо сильнофокусирующей системы обычно состоит из M -периодов градиента магнитного поля ℓ , т.е. $L = M\ell$.

Каждый период содержит, как правило, два блока (F - и D - блоки в системе $FODD$ и FD - и DF - блоки в системе $FOFDOD$).

Введем обозначения для возмущений $F_{i,m}$ в каждом блоке магнитного кольца (здесь i - номер периода, m - номер блока), а также обозначения для интегралов:

$$J_{F,D}^{s,c} = \int_{F,D} \beta^{1/2}(t) \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} \psi(t) dt,$$

$$J_{F,D}^2 = (J_{F,D}^s)^2 + (J_{F,D}^c)^2 \quad (28)$$

Индексы F, D указывают, что интегрирование ведется, соответственно, на длине F - блока (FD - блока) или D - блока (DF - блока) в первом периоде градиента поля.

Тогда, используя периодичность функции $\beta(s+m\ell) = \beta(s)$ и свойство функции $\psi(s+m\ell) = \psi(s) + m\mu$, где $\mu = 2\pi Q/M$ - набег фазы на длине ℓ , интегралы I^s и I^c можно представить в виде:

$$I^s = \sum_{m=1}^M \left\{ F_{m,1} [J_F^s \cos(m-1)\mu + J_F^c \sin(m-1)\mu] + F_{m,2} [J_D^s \cos(m-1)\mu + J_D^c \sin(m-1)\mu] \right\}, \quad (29)$$

$$I^c = \sum_{m=1}^M \left\{ F_{m,1} [J_F^c \cos(m-1)\mu - J_F^s \sin(m-1)\mu] + F_{m,2} [J_D^c \cos(m-1)\mu - J_D^s \sin(m-1)\mu] \right\}. \quad (30)$$

Величины $F_{m,i}$ являются статистически независимыми. Математическое ожидание от их парных произведений равно нулю, если сомножители разные.

Поэтому для среднего значения квадрата интеграла $\langle I^2 \rangle$ получим:

$$\langle I^2 \rangle = 2M [\langle F_{m,1}^2 \rangle J_F^2 + \langle F_{m,2}^2 \rangle J_D^2], \quad (31)$$

где введены обозначения

$$\langle F_{m,i}^2 \rangle = \sum_{m=1}^M F_{m,i}^2 / M. \quad (32)$$

Величины $\langle F_{m,i}^2 \rangle$ есть среднеквадратичные значения возмущений для однотипных блоков электромагнита.

Подставляя в (26), вместо $I \sqrt{\langle I^2 \rangle}$, получим среднеквадратичное увеличение максимального значения огибающей пучка при возмущенном движении:

$$\langle \Delta A \rangle = \beta^{1/2} \sqrt{\langle I^2 \rangle} / 2 |\sin \pi Q| \quad (33)$$

или

$$\langle \Delta A \rangle = \frac{\sqrt{M} \cdot \beta_{\max}^{1/2}}{\rho \sqrt{2} |\sin \pi Q|} \left\{ \left[\frac{n^2}{\rho^2} \langle \delta y_{m,1}^2 \rangle + \left\langle \left(\frac{\delta B_{m,1}}{B_0} \right)^2 \right\rangle \right] J_F^2 + \left[\frac{n^2}{\rho^2} \langle \delta y_{m,2}^2 \rangle + \left\langle \left(\frac{\delta B_{m,2}}{B_0} \right)^2 \right\rangle \right] J_D^2 \right\}^{1/2}. \quad (34)$$

Величины $\langle \delta y_{m,i}^2 \rangle$ и $\left\langle \left(\frac{\delta B_{m,i}}{B_0} \right)^2 \right\rangle$ имеют практический предел малости. В настоящее время считается, что этими пределами являются значения

$$\langle \delta y_{m,i}^2 \rangle \approx 10^{-10} \text{ м}^2, \quad (35)$$

$$\left\langle \left(\frac{\delta B_{m,i}}{B_0} \right)^2 \right\rangle \approx 10^{-8}.$$

Оценим, для примера, величину $\langle \Delta A \rangle$ для машин с параметрами, близкими к параметрам Ереванского синхротрона

$$\left(n = 114,76, \quad \rho = 25,25 \text{ м}, \quad \beta_{\max}^{1/2} \approx 3,5 \text{ м}^{1/2}, \right. \\ \left. J_F \approx J_D = 8,82 \text{ м}^{3/2}; \quad Q = 5,28, \quad M = 24 \right)$$

$$\langle \Delta A \rangle_{\delta y} = 35,5 \sqrt{\langle \delta y^2 \rangle} \text{ м}, \quad (36)$$

$$\langle \Delta A \rangle_{\delta B} = 7,8 \sqrt{\left\langle \left(\frac{\delta B}{B_0} \right)^2 \right\rangle} \text{ м};$$

что для предельных значений дает

$$[\langle \Delta A \rangle_{\delta B}]_{\text{прег}} = 7,8 \cdot 10^{-4}; [\langle \Delta A \rangle_{\delta y}]_{\text{прег}} = 3,5 \cdot 10^{-4}. \quad (37)$$

Для Ереванского синхротрона (АРУС) допустимая величина

$$\left[\sqrt{\langle \frac{\delta B^2}{B_0} \rangle} \right]_{\text{гоп}} \quad \text{принята равной}$$

$$\left[\sqrt{\langle \frac{\delta B}{B_0} \rangle} \right]_{\text{гоп}} = 1,30 \cdot 10^{-3}, \quad (38)$$

что дает увеличение максимального значения огибающей пучка на величину

$$[\langle \Delta A \rangle_{\delta B}]_{\text{АРУС}} \approx 10 \text{ мм}. \quad (39)$$

При выборе поперечных размеров камеры этот эффект не был учтен и естественно предположить, что это является одной из причин того, что в начале цикла ускорения пучок занимает почти всю область вакуумной камеры.

Аналогичная ситуация, по-видимому, имеет место и на других подобных установках. Отличие может быть только в численном значении $\langle \Delta A \rangle_{\delta B}$.

Заметим, что величина $\langle \Delta A \rangle$ при ускорении адиабатически затухает подобно свободным колебаниям.

Увеличение эмиттанса пучка из-за возмущений налагает, например, на бустерные системы, предназначенные для уменьшения эмиттанса пучка адиабатическим сжатием, более жесткие условия на изготовление магнита, с тем, чтобы не вносить дополнительного увеличения эмиттанса.

5. ВОЗМУЩЕНИЕ ИЗ-ЗА $\Delta p/p_0$

Другим примером возмущенного движения является радиальное движение $r(s, \kappa)$ частиц пучка, импульс p которых отличается от номинального p_0 (равновесного) на величину Δp :

$$p = p_0 + \Delta p.$$

В этом случае возмущение $F(s)$ имеет вид:

$$F(s) = \frac{1}{\rho(s)} \frac{\Delta p}{p_0}. \quad (40)$$

Рассмотрим для определенности случай, когда $\Delta p/p_0 = \text{const}$. Тогда возмущения во всех блоках магнита одни и те же - $F_{m,i} = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{p_0}$ и поэтому в интегралах (29) и (30) могут быть вынесены из-под знаков сумм, т.е. для I^s и I^c получим:

$$I^s = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{p_0} \left\{ (J_F^s + J_D^s) \sum_{m=0}^{M-1} \cos m\mu + (J_F^c + J_D^c) \sum_{m=0}^{M-1} \sin m\mu \right\}, \quad (41)$$

$$I^c = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{p_0} \left\{ (J_F^c + J_D^c) \sum_{m=0}^{M-1} \cos m\mu - (J_F^s + J_D^s) \sum_{m=0}^{M-1} \sin m\mu \right\}. \quad (42)$$

Подставляя значения сумм [5]

$$\sum_{m=0}^{M-1} \cos(\alpha + m\mu) = \cos\left(\alpha + \frac{(M-1)\mu}{2}\right) \cdot \sin \frac{M\mu}{2} \operatorname{cosec} \frac{\mu}{2}, \quad (43)$$

$$\sum_{m=0}^{M-1} \sin(\alpha + m\mu) = \sin\left(\alpha + \frac{(M-1)\mu}{2}\right) \cdot \sin \frac{M\mu}{2} \operatorname{cosec} \frac{\mu}{2};$$

получим выражение интеграла I:

$$I = \sqrt{(I^c)^2 + (I^s)^2} =$$

$$= \frac{1}{\rho} \frac{\Delta P}{P_0} \frac{|\sin \pi Q|}{|\sin(\mu/2)|} \sqrt{(J_F^c + J_D^c)^2 + (J_F^s + J_D^s)^2} \quad (44)$$

Подставляя (44) в (26), получим

$$(\Delta A_r)_{\Delta P} = \frac{\beta_{\max}^{1/2}}{2\rho |\sin(\mu/2)|} \sqrt{(J_F^c + J_D^c)^2 + (J_F^s + J_D^s)^2} \cdot \frac{\Delta P}{P_0} \quad (45)$$

Для Ереванского синхротрона имеем

$$(\Delta A_r)_{\Delta P}^{APUC} \approx 1,7 \frac{\Delta P}{P_0} \text{ м.} \quad (46)$$

Таким образом, при $(\frac{\Delta P}{P_0})_{\text{гон}} = 5 \cdot 10^{-3}$ имеем

$$(\Delta A_r)_{\Delta P}^{APUC} = 8,5 \text{ мм.} \quad (47)$$

И эта величина достаточно большая и к тому же "работает" обе стороны от $r_{\text{зам}}(S)$, так как в пучке существуют частицы с Δp как одного, так и другого знака (см. рис. I).

При выборе размеров вакуумной камеры обычно учитывают только смещения орбиты от различных типов возмущения.

Приведенные два примера уже показывают, что эффекты увеличения эмиттанса пучка при возмущенном движении имеют тот же порядок величин и, несомненно, должны быть учтены при проектировании ускорителя (накопителя). А в действующих установках могут служить причиной несогласия экспериментально наблюдаемых явлений с предсказаниями существующей теории.

Так, например, на ВЭШ-3 были проведены эксперименты по измерению магнитных характеристик накопителя с помощью пучка [4]. В частности, создавая специальные возмущения, пучок сдвигался

к стенкам камеры в ту и другую сторону с целью определения рабочей области вакуумной камеры. По этим измерениям рабочая область оказалась примерно в 2 раза меньше его геометрических размеров (28 мм вместо 52 мм).

Если теперь учесть тот факт, что при возмущенном движении максимальное значение огибающей увеличивается примерно на ту же величину, что и отклонение орбиты, то результаты этих измерений на ВЭШ-3 становятся очевидными.

6. ЛОКАЛЬНОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ

В теории и практике циклических ускорителей особое место занимают специально вводимые возмущения для вывода частиц из ускорителя или же наведения пучка на внутренние мишени.

Как правило, такие возмущения носят локальный характер и включаются в зависимости от требований эксперимента.

Рассмотрим действие локального возмущения на параметры пучка.

Допустим, что возмущение локализовано на малом участке $[s_1, s_2]$ ($s_2 - s_1 = \Delta s \ll L$), не зависит от S в этом интервале, а от оборота к обороту изменяется по какому-то закону, т.е.

$$F(x) = \begin{cases} F_k & \text{при } s_1 + (k-1)L \leq x \leq s_2 + (k-1)L \\ 0 & \text{вне интервала } [s_1, s_2]. \end{cases} \quad (48)$$

Очевидно, что в этом случае необходимо различать значения $y(s, k)$ на k -ом обороте, соответственно, до и после k -го прохождения через возмущенный участок.

Введем для этого соответствующие обозначения: $y(s, k)|_{s < s_1}$ и $y(s, k)|_{s > s_2}$.

И здесь задача сводится к вычислению интеграла $J(x)$, входящего в (10).

Представляя опять $J(x)$ в виде суммы интегралов (см. приложение 2), в зависимости от значения s получаем два выражения:

$$y(s, \kappa) \Big|_{s < s_1} = \left(\frac{\beta(s)}{\beta_{\max}} \right)^{1/2} A \cos [\psi(s) + 2\pi Q(\kappa-1) - \vartheta] + \beta^{1/2}(s) I \cdot \sum_{n=0}^{\kappa-2} F_{\kappa-n-1} \sin [\psi(s) + 2\pi Q(n+1) - \zeta], \quad (49)$$

$$y(s, \kappa) \Big|_{s > s_2} = \left(\frac{\beta(s)}{\beta_{\max}} \right)^{1/2} A \cos [\psi(s) + 2\pi Q(\kappa-1) - \vartheta] + \beta^{1/2}(s) I \cdot \sum_{n=0}^{\kappa-1} F_{\kappa-n} \sin [\psi(s) + 2\pi Q \cdot n - \zeta]. \quad (50)$$

Выражения (49), (50) определяют поперечные отклонения траектории частицы на азимуте s на κ -ом обороте после включения возмущения (48), соответственно, после $(\kappa-1)$ проходов через возмущенный участок $[s_1, s_2]$ и после κ проходов.

Рассмотрим два частных случая, при которых суммы, входящие в (49) и (50), можно упростить.

6а. ПОСТОЯННОЕ ЛОКАЛЬНОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ

В случае, когда $F_{\kappa} = F = \text{const}$, используя формулы (43), выражения (49), (50) можно записать в виде:

$$y(s, \kappa) \Big|_{s < s_1} = \left(\frac{\beta(s)}{\beta_{\max}} \right)^{1/2} A \cos [\psi(s) + 2\pi Q(\kappa-1) - \vartheta] + \beta^{1/2}(s) \cdot I \cdot F \sin [\psi(s) + 2\pi Q - \zeta + (\kappa-2)\pi Q] \frac{\sin(\kappa-1)\pi Q}{\sin \pi Q}, \quad (51)$$

$$y(s, \kappa) \Big|_{s > s_2} = \left(\frac{\beta(s)}{\beta_{\max}} \right)^{1/2} A \cos [\psi(s) + 2\pi Q(\kappa-1) - \vartheta] + \beta^{1/2}(s) I \cdot F \sin [\psi(s) + 2\pi Q - \zeta + (\kappa-1)\pi Q] \frac{\sin \kappa \pi Q}{\sin \pi Q}. \quad (52)$$

Во вторых членах (51), (52) есть часть, которая не зависит от κ . Если выделить эти члены, а остальные объединить с первым членом в (51) и (52), то получим:

$$y(s, \kappa) \Big|_{s < s_1} = \left(\frac{\beta(s)}{\beta_{\max}} \right)^{1/2} B \cos [\psi(s) + 2\pi Q(\kappa-1) - \xi] + \frac{\beta^{1/2}(s) I F}{2 \sin \pi Q} \cos [\psi(s) + \pi Q - \zeta], \quad (53)$$

$$y(s, \kappa) \Big|_{s > s_2} = \left(\frac{\beta(s)}{\beta_{\max}} \right)^{1/2} B \cos [\psi(s) + 2\pi Q(\kappa-1) - \xi] + \frac{\beta^{1/2}(s) I F}{2 \sin \pi Q} \cos [\psi(s) - \pi Q - \zeta], \quad (54)$$

где введены обозначения: $B^2 = B_1^2 + B_2^2$,

$$B_1 = A \sin \vartheta + \beta_{\max}^{1/2} I \cdot F \sin(\pi Q - \zeta) / 2 \sin \pi Q, \\ B_2 = A \cos \vartheta - \beta_{\max}^{1/2} I \cdot F \cos(\pi Q - \zeta) / 2 \sin \pi Q, \\ \xi = \arctg (B_1 / B_2). \quad (55)$$

Первые члены в (53) и (54) описывают нормальные бетатронные колебания с амплитудой B вокруг стационарной кривой, которая в интервале $0 < s < s_1$ описывается вторым членом (53), а в интервале $s_2 < s < L$ - вторым членом (54).

Покажем, что эта стационарная кривая есть замкнутая орбита при локальном возмущении.

При стационарном возмущении $F(s)$ имеем (см. (14))

$$y_{\text{зам}}(s) = \frac{\beta^{1/2}(s)}{2\sin\pi Q} \int_s^{s_1} F(t)\beta^{1/2}(t) \cos[\psi(s) + \pi Q - \psi(t)] dt,$$

которое можно записать в виде:

$$y_{\text{зам}}(s) = \beta^{1/2}(s) \int_0^s F(t)\beta^{1/2}(t) \sin[\psi(s) - \psi(t)] dt + \frac{\beta^{1/2}(s)}{2\sin\pi Q} \int_0^L F(t)\beta^{1/2}(t) \cos[\psi(s) + \pi Q - \psi(t)] dt. \quad (56)$$

В случае локального постоянного возмущения при $s < s_1$, (56) принимает вид (первый интеграл равен нулю):

$$y_{\text{зам}}(s)|_{s < s_1} = \frac{\beta^{1/2}(s)F}{2\sin\pi Q} \int_{s_1}^{s_2} \beta^{1/2}(t) \cos[\psi(s) + \pi Q - \psi(t)] dt = \frac{\beta^{1/2}(s)FI}{2\sin\pi Q} \cos[\psi(s) + \pi Q - \zeta], \quad (57)$$

что совпадает со вторым членом (53).

При $s > s_2$ (56) принимает вид:

$$y_{\text{зам}}(s)|_{s > s_2} = F\beta^{1/2}(s) \int_{s_1}^{s_2} \beta^{1/2}(t) \sin[\psi(s) - \psi(t)] dt + \frac{\beta^{1/2}(s)IF}{2\sin\pi Q} \cos[\psi(s) + \pi Q - \zeta],$$

который простыми преобразованиями сводится к

$$y_{\text{зам}}(s)|_{s > s_2} = \frac{\beta^{1/2}(s)IF}{2\sin\pi Q} \cos[\psi(s) - \pi Q - \zeta] \quad (58)$$

впадающему со вторым членом (54).

Таким образом, и при постоянном локальном возмущении существует стационарная замкнутая орбита, вокруг которой частицы совершают нормальные бетатронные колебания с амплитудой, зависящей от величины возмущения и длины возмущенного участка.

66. МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩЕЕСЯ ЛОКАЛЬНОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ

Более интересным случаем локального возмущения с точки зрения его практического использования является случай, когда возмущение медленно изменяется со временем.

Рассмотрим для примера возмущение, меняющееся от оборота к обороту по линейному закону, т.е.

$$F_k = \Delta F \cdot k, \quad (59)$$

Тогда суммы, входящие в (49), (50), используя формулы [5]

$$\sum_{n=0}^{k-1} n \cos(an) = \frac{k \cdot \sin(2k-1)\frac{a}{2}}{2 \sin^2(\frac{a}{2})} - \frac{1 - \cos ka}{4 \sin^2(\frac{a}{2})},$$

$$\sum_{n=0}^{k-1} n \sin(an) = \frac{\sin ka}{4 \sin^2(\frac{a}{2})} - \frac{k \cos[(2k-1)\frac{a}{2}]}{2 \sin(\frac{a}{2})}, \quad (60)$$

можно представить в виде:

$$\Delta F \sum_{n=0}^{k-2} (k-n-1) \sin[\psi(s) + (n+1)2\pi Q - \zeta] = \Delta F \cdot k \cdot \cos[\psi(s) + \pi Q - \zeta] / 2 \sin\pi Q + \Delta F \sin[\psi(s) - \zeta] / 4 \sin^2\pi Q - \Delta F \sin[\psi(s) + 2\pi Q k - \zeta] / 4 \sin^2\pi Q, \quad (61)$$

$$\Delta F \sum_{n=0}^{k-1} (k-n) \sin[\psi(s) + 2\pi Q n - \zeta] = \Delta F \cdot k \cos[\psi(s) - \pi Q - \zeta] / 2 \sin\pi Q + \Delta F \sin[\psi(s) - \zeta] / 4 \sin^2\pi Q - \Delta F \sin[\psi(s) + 2\pi Q k - \zeta] / 4 \sin^2\pi Q. \quad (62)$$

Подставляя (61) в (49) и (62) в (50) и объединяя третьи члены в (61) и (62) с первыми членами (49) и (50), соответственно, получим:

$$y(s, \kappa) |_{s < s_1} = (\beta(s)/\beta_{\max})^{1/2} B \cos [\psi(s) + 2\pi Q (\kappa - 1) - \xi] + \\ + \beta^{1/2}(s) I \Delta F \cdot \kappa \cos [\psi(s) + \pi Q - \zeta] / 2 \sin \pi Q + \\ + \beta^{1/2}(s) I \Delta F \sin [\psi(s) - \zeta] / 4 \sin^2 \pi Q,$$
(63)

$$y(s, \kappa) |_{s > s_2} = (\beta(s)/\beta_{\max})^{1/2} B \cos [\psi(s) + 2\pi Q (\kappa - 1) - \xi] + \\ + \beta^{1/2}(s) I \Delta F \cdot \kappa \cos [\psi(s) - \pi Q - \zeta] / 2 \sin \pi Q + \\ + \beta^{1/2}(s) I \Delta F \sin [\psi(s) - \zeta] / 4 \sin^2 \pi Q,$$
(64)

где введены обозначения:

$$B^2 = B_1^2 + B_2^2, \\ B_1 = A \sin \psi - \beta_{\max}^{1/2} I \Delta F \cos (2\pi Q - \zeta) / 4 \sin^2 \pi Q, \\ B_2 = A \cos \psi - \beta_{\max}^{1/2} I \Delta F \sin (2\pi Q - \zeta) / 4 \sin^2 \pi Q, \\ \xi = \arctg (B_1/B_2).$$
(65)

Вторые члены в (63) и (64) описывают замкнутую орбиту на κ -ом обороте ("мгновенная" замкнутая орбита $y_{\text{зам}}(s, \kappa)$).

Третий член в (63) и (64) стационарная, но не замкнутая, кривая.

Таким образом, при локальном возмущении, изменяющемся от оборота к обороту по линейному закону, частица с начальными условиями (A, ψ) совершает нормальные бетатронные колебания вокруг мгновенной кривой

$$Y(s, \kappa) = y_{\text{зам}}(s, \kappa) + \frac{\beta^{1/2}(s) I \Delta F}{4 \sin^2 \pi Q} \sin [\psi(s) - \zeta] \quad (66)$$

с амплитудой, зависящей от скорости изменения возмущения

$$\Delta F = \frac{dF}{d\kappa}.$$

При $\kappa \gg 1/2 |\sin \pi Q|$ вторым членом в (66) можно пренебречь по отношению к первому.

В этом приближении $y_{\text{зам}}(s, \kappa)$ определяет положение центра пучка на κ -ом обороте после включения возмущения.

Этот факт используется на практике для приближения ускоренного пучка к внутренним мишеням, расположенным обычно вблизи краев вакуумной камеры.

Однако, для обеспечения, скажем, равномерного вывода вторичных частиц, необходимо осуществлять несколько иной ход изменения локального возмущения от оборота к обороту.

В связи с этим ниже рассматриваются несколько специальных форм изменения локального возмущения от оборота к обороту.

6в. ЛИНЕЙНЫЙ ХОД С ПЕРЕХОДОМ НА ПЛАТО

Допустим теперь, что возмущение (48) изменяется от оборота к обороту по закону:

$$F_{\kappa} = \begin{cases} \Delta F \cdot \kappa, & \text{при } \kappa \leq \kappa_1; \\ F_{\kappa_1} = \text{const}, & \text{при } \kappa > \kappa_1; \end{cases} \quad (67)$$

где κ_1 - заранее выбранное число.

Тогда суммы, входящие в (49), (50), можно записать в виде:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{k-2} F_{k-n-1} \sin [\psi(s) + 2\pi Q(n+1) - \xi] = \\ & = \sum_{m=0}^{k_1-1} \Delta F(m+1) \sin [\psi(s) + (k-m-1)2\pi Q - \xi] + \\ & + F_{k_1} \sum_{n=0}^{k-k_1-2} \sin [\psi(s) + (k-k_1-n-1)2\pi Q - \xi], \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{k-1} F_{k-n} \sin [\psi(s) + 2\pi Q n - \xi] = \\ & = \Delta F \sum_{m=0}^{k_1-1} (m+1) \sin [\psi(s) + (k-m-1)2\pi Q - \xi] + \\ & + F_{k_1} \sum_{n=0}^{k-k_1-1} \sin [\psi(s) + (k-k_1-n-1)2\pi Q - \xi]. \end{aligned} \quad (69)$$

Используя для преобразования сумм (68) и (69) формулы (60) и (43) и подставляя полученные значения в (49) и (50), получим:

$$\begin{aligned} y(s, \kappa) |_{s < s_1} &= (\beta(s)/\beta_{\max})^{1/2} B \cos [\psi(s) + (k-1)2\pi Q - \xi] + \\ & + \beta^{1/2}(s) I F_{k_1} \cos [\psi(s) + \pi Q - \xi] / 2 \sin \pi Q, \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} y(s, \kappa) |_{s > s_2} &= (\beta(s)/\beta_{\max})^{1/2} B \cos [\psi(s) + (k-1)2\pi Q - \xi] + \\ & + \beta^{1/2}(s) I F_{k_1} \cos [\psi(s) - \pi Q - \xi] / 2 \sin \pi Q; \end{aligned} \quad (71)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} B^2 &= B_1^2 + B_2^2, \quad \xi = \arctg (B_1/B_2), \\ B_1 &= A \sin \psi - \beta_{\max}^{1/2} I \Delta F \sin(\pi Q \kappa_1) \sin[(k-2)\pi Q - \xi] / 2 \sin^2 \pi Q, \\ B_2 &= A \cos \psi - \beta_{\max}^{1/2} I \Delta F \sin(\pi Q \kappa_1) \cos[(k-2)\pi Q - \xi] / 2 \sin^2 \pi Q. \end{aligned} \quad (72)$$

Из (70) и (71) следует, что на "плато" возмущения (в течение $(k-k_1)$ оборотов) поперечное движение частиц представляет собой нормальные бетатронные колебания вокруг замкнутой орбиты $U_{зам}(s, \kappa)$, описываемой вторыми членами (70) и (71). При этом увеличение огибающей пучка оказывается пропорциональным (см. (72)) $\sin(\pi Q \kappa_1)$. Это позволяет выбором величины k_1 уменьшить влияние локального возмущения на размеры пучка.

6г. "СТУПЕНЧАТЫЙ" ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ

Для получения длительного (растянутого во времени) вывода вторичных частиц с внутренней мишени необходимо бывает через определенное число оборотов поднять уровень "плато". Другими словами, практически важным случаем является "ступенчатый" вид изменения возмущения со временем.

Рассмотрим в связи с этим следующий ход изменения возмущения от оборота к обороту

$$F_{\kappa} = \begin{cases} (\Delta F)_1 \cdot \kappa, & \text{при } \kappa \leq \kappa_1 \\ F_{\kappa_1} = F_{\kappa'_1} = \text{const}, & \text{при } \kappa_1 < \kappa \leq \kappa'_1 \\ F_{\kappa_1} + (\Delta F)_2 (\kappa - \kappa'_1), & \text{при } \kappa'_1 < \kappa \leq \kappa_2 \\ F_{\kappa_3} = F_{\kappa'_3} = \text{const}, & \text{при } \kappa_3 < \kappa \leq \kappa'_3 \\ F_{\kappa_{p-1}} + (\Delta F)_{p-1} (\kappa - \kappa'_{p-1}), & \text{при } \kappa'_{p-1} < \kappa \leq \kappa_p \\ F_{\kappa_p} = F_{\kappa} = \text{const} & \text{при } \kappa > \kappa_p. \end{cases} \quad (73)$$

Легко показать, что на p -ом "плато" возмущения (после p шагов) поперечное движение частиц описывается выражениями:

$$y(s, \kappa)|_{s < s_1} = (\beta(s)/\beta_{\max})^{1/2} B \cos[\psi(s) + (\kappa-1)2\pi Q - \xi] + \beta^{1/2}(s) I F_{\kappa p} \cos[\psi(s) + \pi Q - \zeta] / 2 \sin \pi Q, \quad (74)$$

$$y(s, \kappa)|_{s > s_2} = (\beta(s)/\beta_{\max})^{1/2} B \cos[\psi(s) + (\kappa-1)2\pi Q - \xi] + \beta^{1/2}(s) I F_{\kappa p} \cos[\psi(s) - \pi Q - \zeta] / 2 \sin \pi Q, \quad (75)$$

где $B^2 = B_1^2 + B_2^2$, $\xi = \alpha z c \operatorname{tg}(B_1/B_2)$,

$$B_1 = A \sin \varphi - \beta_{\max}^{1/2} I \sum_{i=1}^p (\Delta F)_i \sin[\pi Q(\Delta \kappa)_i] \sin[\pi Q(\Delta \kappa)_i + 2\pi Q - \zeta] / 2 \sin \pi Q, \quad (76)$$

$$B_2 = A \cos \varphi - \beta_{\max}^{1/2} I \sum_{i=1}^p (\Delta F)_i \sin[\pi Q(\Delta \kappa)_i] \cos[\pi Q(\Delta \kappa)_i + 2\pi Q - \zeta] / 2 \sin \pi Q$$

Очевидно, что (74), (75) являются обобщением (70) и (71).
Здесь $(\Delta \kappa)_i = \kappa_i - \kappa_{i-1}$ - время "подъема" i -ой ступеньки.

Из (76) следует, что и в этом случае можно достигнуть того, чтоб вокруг новой замкнутой орбиты частицы колебались с амплитудой A . Для этого достаточно лишь обеспечить условия

$$Q(\Delta \kappa)_i = \text{целое число.} \quad (77)$$

Если условия (77) не будут обеспечены, то всегда будет иметь место увеличение размеров пучка, обязанное возмущению. Так, например, при условиях $(\Delta F)_i = \Delta F = \text{const}$, $(\Delta \kappa)_i = \Delta \kappa = \text{const}$ из (76) имеем:

$$B_1 = A \sin \varphi - \beta_{\max}^{1/2} I \Delta F \cdot p \sin(\pi Q \Delta \kappa) \sin(\Delta \kappa \pi Q + 2\pi Q - \zeta) / 2 \sin^2 \pi Q,$$

$$B_2 = A \cos \varphi - \beta_{\max}^{1/2} I \Delta F \cdot p \sin(\pi Q \Delta \kappa) \cos(\Delta \kappa \pi Q + 2\pi Q - \zeta) / 2 \sin^2 \pi Q;$$

откуда следует, что частицы, начальные фазы которых удовлетворяют условию $\cos[\varphi - \Delta \kappa \cdot \pi Q - 2\pi Q + \zeta] = -1$, будут колебаться вокруг новой замкнутой орбиты (на p -ом плато) с амплитудой

$$B = A + \beta_{\max}^{1/2} I \Delta F p |\sin(\pi Q \Delta \kappa)| / 2 \sin^2 \pi Q. \quad (78)$$

Максимальное значение увеличения огибающей пучка будет (при $|\sin(\pi Q \Delta \kappa)| = 1$)

$$(\Delta A)_{\max} = \beta_{\max}^{1/2} I \cdot \Delta F p / 2 \sin^2 \pi Q, \quad (79)$$

что может быть достаточно большой величиной из-за наличия в (79) множителя p .

Этот пример показывает насколько важно выполнение условий (77) в экспериментах на внутренней мишени, в частности, для случая, когда угловой разброс падающих на мишень частиц имеет определяющее значение (например, в экспериментах на кристалле).

7. ВОЗМУЩЕНИЕ ТИПА БИМ-БАМП (*beam-bump*)

Рассмотренное выше локальное возмущение создает замкнутую орбиту, максимальное отклонение которой от реперной кривой (плоскости орбиты) достигается, как правило, во многих точках магнитного кольца. Это приводит к ряду практических неудобств: из-за того, что пучок при этом движется в большем объеме, возможны нежелательные потери пучка, изменение его параметров из-за нелинейных эффектов и т.д.

Поэтому при использовании возмущения для вывода или наведения пучка на внутренние мишени желательно, чтобы замкнутая орбита существенно отдалялась от реперной кривой (плоскости орбиты) лишь на небольшом отрезке кольца, оставаясь близкой к ней

на большей её части.

Это достигается [6-8] применением двух (и более) участков локального возмущения.

Рассмотрим для примера случай, когда возмущение локализовано на двух участках $[s_1, s_2]$ и $[s'_1, s'_2]$, не зависит на этих участках от S , а от оборота к обороту меняется по какому-то закону, т.е.

$$F(x) = \begin{cases} F_k^{(1)}, \text{ при } (k-1)L + s_1 \leq x \leq s_2 + (k-1)L \\ F_k^{(2)}, \text{ при } (k-1)L + s'_1 \leq x \leq s'_2 + (k-1)L \\ 0 \text{ вне указанных интервалов.} \end{cases} \quad (80)$$

Очевидно, что в этом случае необходимо различать значения

$$y(s, k)|_{0 \leq s \leq s_1}, \quad y(s, k)|_{s_2 \leq s \leq s'_1} \quad \text{и} \quad y(s, k)|_{s'_2 \leq s \leq L}$$

отклонений на азимуте S , на k -ом обороте, соответственно, до и после k -го прохождения соответствующего участка.

По аналогии с разделом 6 получим:

$$y(s, k)|_{0 \leq s \leq s_1} = (\beta(s)/\beta_{\max})^{1/2} A \cos[\psi(s) + 2\pi Q(k-1) - \varphi] + \\ + \beta^{1/2}(s) I_1 \sum_{n=0}^{k-2} F_{k-n-1}^{(1)} \sin[\psi(s) + (n+1)2\pi Q - \xi_1] + \\ + \beta^{1/2}(s) I_2 \sum_{n=0}^{k-2} F_{k-n-1}^{(2)} \sin[\psi(s) + (n+1)2\pi Q - \xi_2], \quad (81)$$

$$y(s, k)|_{s_2 \leq s \leq s'_1} = (\beta(s)/\beta_{\max})^{1/2} A \cos[\psi(s) + 2\pi Q(k-1) - \varphi] + \\ + \beta^{1/2}(s) I_1 \sum_{n=0}^{k-1} F_{k-n}^{(1)} \sin[\psi(s) + 2\pi Q n - \xi_1] + \\ + \beta^{1/2}(s) I_2 \sum_{n=0}^{k-2} F_{k-n-1}^{(2)} \sin[\psi(s) + (n+1)2\pi Q - \xi_2], \quad (82)$$

$$y(s, k)|_{s'_2 \leq s \leq L} = (\beta(s)/\beta_{\max})^{1/2} A \cos[\psi(s) + 2\pi Q(k-1) - \varphi] + \\ + \beta^{1/2}(s) I_1 \sum_{n=0}^{k-1} F_{k-n}^{(1)} \sin[\psi(s) + 2\pi Q n - \xi_1] + \\ + \beta^{1/2}(s) I_2 \sum_{n=0}^{k-1} F_{k-n}^{(2)} \sin[\psi(s) + 2\pi Q n - \xi_2]. \quad (83)$$

Индексы $i = (1, 2)$ у интегралов I_i и фаз ξ_i означают, что интегрирование (см. П.2.5.) ведется, соответственно, по участкам $[s_1, s_2]$ и $[s'_1, s'_2]$.

Практически интересным случаем является случай, когда закон изменения F_k от оборота к обороту один и тот же для обоих участков, но отношение $\delta = F_k^{(2)} / F_k^{(1)}$ необязательно равно единице и может быть как положительным, так и отрицательным.

Учитывая, что во всех рассмотренных в разделе 6 законах изменения F_k отличия $y(s, k)$ в интервалах между возмущенными участками заключаются в различной форме записи

$y_{\text{зак}}(s, k)$, выражения (81), (82), (83) можно записать в виде:

$$y(s, k)|_{0 \leq s \leq s_1} = (\beta(s)/\beta_{\max})^{1/2} B^{(j)} \cos[\psi(s) + 2\pi Q(k-1) - \xi^{(j)}] + \\ + \beta^{1/2}(s) F_k^{(j)} [I_1 \cos(\psi(s) + \pi Q - \xi_1) + \delta I_2 \cos(\psi(s) + \pi Q - \xi_2)] / 2 \sin \pi Q, \quad (84)$$

$$y(s, k)|_{s_2 \leq s \leq s'_1} = (\beta(s)/\beta_{\max})^{1/2} B^{(j)} \cos[\psi(s) + 2\pi Q(k-1) - \xi^{(j)}] + \\ + \beta^{1/2}(s) F_k^{(j)} [I_1 \cos(\psi(s) - \pi Q - \xi_1) + \delta I_2 \cos(\psi(s) + \pi Q - \xi_2)] / 2 \sin \pi Q, \quad (85)$$

$$y(s, \kappa) \Big|_{s_2' \leq s < s_1} = (\beta(s)/\beta_{\max})^{1/2} B^{(j)} \cos[\psi(s) + 2\pi Q(\kappa - 1) - \xi^{(j)}] + \\ + \beta^{1/2}(s) F_{\kappa}^{(j)} [I_1 \cos(\psi(s) - \pi Q - \xi) + \delta I_2 \cos(\psi(s) - \pi Q - \xi_2)] / 2 \sin \pi Q. \quad (86)$$

Здесь индексом $j = 1, 2, 3, 4$ пронумерованы рассмотренные выше законы изменения F_{κ} от оборота к обороту, т.е.

$$j = 1, \quad F_{\kappa} = \text{const};$$

$$j = 2, \quad F_{\kappa} = \Delta F \cdot \kappa;$$

$$j = 3, \quad \text{линейный рост с выходом на плато,}$$

$$j = 4, \quad \text{"ступенчатый" закон изменения.}$$

Для нахождения $B^{(j)}$ и $\xi^{(j)}$ достаточно в соответствующих выражениях сделать замену:

$$I \left(\frac{\cos}{\sin} \right) (\alpha - \xi) \rightarrow I_1 \left(\frac{\cos}{\sin} \right) (\alpha - \xi_1) + \delta I_2 \left(\frac{\cos}{\sin} \right) (\alpha - \xi_2). \quad (87)$$

Из (84), (85), (86) следует, что для $y_{\text{зам}}(s, \kappa)$ имеем:

$$y_{\text{зам}}^{(s, \kappa)} \Big|_{s_2' \leq s < s_1} = \beta^{1/2}(s) F_{\kappa}^{(j)} D \cos[\psi(s) - \eta_D] / 2 \sin \pi Q, \quad (88)$$

$$y_{\text{зам}}^{(s, \kappa)} \Big|_{0 \leq s < s_1} = \beta^{1/2}(s) F_{\kappa}^{(j)} C \cos[\psi(s) + \pi Q - \eta_c] / 2 \sin \pi Q, \quad (89)$$

$$y_{\text{зам}}^{(s, \kappa)} \Big|_{s_2' \leq s < L} = \beta^{1/2}(s) F_{\kappa}^{(j)} C \cos[\psi(s) - \pi Q - \eta_c] / 2 \sin \pi Q, \quad (90)$$

где введены обозначения:

$$C = [I_1^2 + \delta^2 I_2^2 + 2I_1 I_2 \delta \cos(\xi_2 - \xi_1)]^{1/2},$$

$$D = [I_1^2 + \delta^2 I_2^2 + 2I_1 I_2 \delta \cos(2\pi Q - \xi_2 - \xi_1)]^{1/2},$$

$$\eta_c = \arctg [(I_1 \sin \xi_1 + \delta I_2 \sin \xi_2) / (I_1 \cos \xi_1 + \delta I_2 \cos \xi_2)],$$

$$\eta_D = \arctg [(I_1 \sin(\pi Q + \xi_1) - \delta I_2 \sin(\pi Q - \xi_2)) / (I_1 \cos(\pi Q + \xi_1) + \delta I_2 \cos(\pi Q - \xi_2))] \quad (91)$$

Из (91) следует, что для получения минимального отклонения замкнутой орбиты от реперной кривой (плоскости орбиты)

$C_{\min} = |I_1 - \delta I_2|$ вне интервала, ограниченного участками возмущения, обязательным является одно из условий:

$$\cos(\xi_2 - \xi_1) = \begin{cases} -1, & \text{при } \delta > 0, \\ 1, & \text{при } \delta < 0, \end{cases} \quad (92)$$

поскольку уравнение $\delta^2 I_2^2 + 2I_1 I_2 \delta \cos(\xi_2 - \xi_1) + I_1^2 = 0$ при других значениях $(\xi_2 - \xi_1)$ не имеет решений для δ .

Другими словами, только выбором мест расположения, удовлетворяющих условию (92), можно получить "идеальный" бамп при помощи двух локальных возмущений.

Заметим, что в большинстве случаев сильнофокусирующей структуры всегда можно выбрать такие участки $[s_1, s_2]$ и $[s_1', s_2']$, для которых интегралы I_1 и I_2 равны друг другу.

Однако, легко показать, что при этом $\xi_2 - \xi_1 = \pi \mu$, и поскольку в реальных ускорителях $\mu = 2\pi Q/M \neq \pi/2$, то условие (92) точно никогда не выполняется.

Кроме того, из требования

$$|y_{\text{зам}}(s_m, \kappa)| = |y_{\text{зам}}|_{\max} \quad (93)$$

следует, что $y_{\text{зам}}(s, \kappa)$ должен удовлетворять условию:

$$\frac{dy_{\text{зам}}}{ds} \Big|_{s=s_m} = 0. \quad (94)$$

Здесь s_m - азимут мишени или точки вывода (септум-магнита), которая, очевидно, находится в интервале, ограниченном участками возмущения, т.е. $s_2 < s_m < s_1'$.

Это значит, что производную по s нужно брать от выражения (88) и условие (94) приобретает вид:

$$\alpha(s_m) \cos[\psi(s_m) - \eta_D] - \sin[\psi(s_m) - \eta_D] = 0. \quad (95)$$

Заметим, что S_M , как правило, находится в свободном промежутке между блоками магнита. В системе FOFDOD S_M обычно выбирают в середине промежутка.

Поэтому $\alpha(S_M)_{FOFDOD} = 0$. В системе FODO этого нет, т.е. $\alpha(S_M)_{FODO} \neq 0$

Таким образом, для создания "идеального бампа", т.е. замкнутой орбиты, которая в интервале, ограниченном участками возмущения, имеет выброс с максимумом в точке S_M , а вне этого участка совпадает с координатной кривой, места локального возмущения (I_i, ζ_i) и отношение δ должны удовлетворять в общем случае условиям:

$$\begin{aligned} I_1 \sin \zeta_1 + \delta I_2 \sin \zeta_2 &= 0, \\ I_1 \cos \zeta_1 + \delta I_2 \cos \zeta_2 &= 0, \\ \alpha(S_M) \cos [\psi(S_M) - \eta_D] - \sin [\psi(S_M) - \eta_D] &= 0. \end{aligned} \quad (96)$$

При выполнении первых двух условий (96) η_D можно представить в виде:

$$\eta_D = \frac{\pi}{2} + \zeta_2 + m_2 \pi \quad (97)$$

или

$$\eta_D = \frac{\pi}{2} + \zeta_1 + m_1 \pi, \quad (98)$$

m_1, m_2 - произвольные целые числа, включая ноль.

Из (97) и (98) следует, что

$$\zeta_2 - \zeta_1 = (m_1 - m_2) \pi, \quad (99)$$

что совпадает с условием (92).

Третье условие (96) можно записать в виде:

$$\sin [\psi(S_M) - \eta_D - g] = 0, \quad (100)$$

где

$$g = \arctg [\alpha(S_M)].$$

Подставляя в (100) значения η_D из (97) и (98), получим

связь между $\psi(S_M)$ и ζ_1 и ζ_2 , соответственно,

$$\begin{aligned} \psi(S_M) &= \zeta_1 + g + (2m_3 + 1)\pi/2, \\ \psi(S_M) &= \zeta_2 + g + (2m_4 + 1)\pi/2. \end{aligned} \quad (101)$$

При выборе чисел m_1, m_2, m_3, m_4 необходимо учитывать, что

$$\zeta_1 < \psi(S_M) < \zeta_2$$

(что означает, что возмущенные участки расположены по разные стороны от точки S_M) и, кроме того, что расстояние между возмущенными участками должно быть минимальным.

Из (100) и (101) следует, что минимальная разность фаз

$$\zeta_2 - \zeta_1 = \pi, \quad (102)$$

т.е. $m_1 - m_2 = 1$, $m_3 - m_4 = 1$,

и, тем самым, определяется необходимый знак $\delta: \delta > 0$.

Для обеспечения совпадения $y_{зам}(s, k)$ с координатной кривой на большей части кольца (см. (89), (90), (91)) величина δ при этом должна быть равна $\delta = I_1/I_2$.

$$(103)$$

Из (102) следует, что

$$(\zeta_1)_{min} = \psi(S_M) - g + \pi/2,$$

$$(\zeta_2)_{min} = \psi(S_M) - g - \pi/2. \quad (104)$$

Поскольку выбор фаз ζ_1 и ζ_2 одновременно означает определение значений интегралов I_1, I_2 , то (103) и (104) есть решение системы (96) при указанных выше ограничениях, а именно:

1. Расстояние между возмущенными участками должно быть минимальным.

2. В точке S_M замкнутая орбита должна достигать своего максимального значения.

Заметим, что поскольку условие (94) является лишь необходимым, но не достаточным условием для выполнения (93), то фазы (104) должны быть проверены на максимум функции $y_{зам}(s, \kappa)$ в точке S_M . Подставляя (103) и (104) в (88) и (91) и учитывая, что

$$(\eta_D)_{min} = (\zeta_2)_{min} + \pi/2, \quad (105)$$

получим

$$y_{зам}(S_M, \kappa) = \beta^{1/2}(S_M) F^{(j)} D_{max} \cos g / 2 \sin \pi Q, \quad (106)$$

где

$$D_{max} = 2I_1 |\sin \pi Q|. \quad (107)$$

В магнитной структуре FOFDOD максимум функции $\beta(s)$ достигается в свободном промежутке между фокусирующими (по данной степени свободы) магнитами (++ - промежутки). Поэтому, в такой системе точку S_M можно выбрать так, чтобы

$$\beta(S_M) = \beta_{max}. \quad \text{При этом} \quad g = 0.$$

Таким образом,

$$|y_{зам}(S_M)|_{FOFDOD} = \beta_{max}^{1/2} |F^{(j)}| I_1, \quad (108)$$

что указывает на то, что $|y_{зам}(S_M)|$ есть максимальное отклонение замкнутой орбиты от координатной кривой (плоскости орбиты).

В структуре FODO $\beta(s)$ достигает своего максимального значения в середине F - магнита, где невозможно выбрать точку S_M . Поэтому точку S_M обычно выбирают вблизи края F - магнита. Поэтому

$$|y_{зам}(S_M, \kappa)|_{FODO} = \beta^{1/2}(S_M) |F_i^{(j)}| I_1 \cos g. \quad (109)$$

И, несмотря на это, (109) представляет собой значение максимального отклонения замкнутой орбиты.

Рассмотренный пример указывает лишь на принципиальную воз-

можность получения необходимой замкнутой орбиты при помощи двух локальных возмущений магнитного поля.

Однако инженерное решение вопроса наталкивается на ряд принципиальных трудностей. В частности, места возможных расположений возмущений в реальной структуре носят дискретный характер и, тем самым, условие (92) нарушается.

Исследование для инженерного решения задачи получения выводного бампа шло двумя путями. Первый путь [6] - отказ от точного выполнения условия (92), второй [7, 8] - использование большего чем два числа возмущенных участков.

7а. БИМ-БАМПЫ КОРРЕКЦИИ Z - ОРБИТЫ (КОЛЛИНЗ-БАМПЫ)

Наиболее простым инженерным решением вопроса создания локального возмущения является использование дополнительных обмоток, намотанных на блоки (части блоков) электромагнита, со своей системой питания.

В этом случае выбор места возмущений носит дискретный характер и фазы ζ_i (и, следовательно, и I_i) оказываются связанными друг с другом определенными соотношениями. Поэтому единственным способом решения задачи является увеличение числа возмущенных участков (увеличение числа степеней свободы F_i).

Возможность создания возмущений типа "идеальный бим-бамп" при помощи 3 возмущений была впервые показана Коллинзом [2], который предложил использовать такие системы для коррекции равновесной орбиты при инжекции.

Коллинз показал, что если возмущения F_i ($i = 1, 2, 3$) расположить на участках, расположенных друг от друга на рассто-

янии ϵ , то для создания "идеального бим-бампа" возмущения F_i должны удовлетворять условиям:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_3 = F, \\ F_2 &= -2F \cos \mu. \end{aligned} \quad (\text{IIO})$$

Условия (IIO) получены Коллинзом без требования (94). Поэтому для целей вывода необходимо увеличить число возмущенных участков, по крайней мере, на один, т.е. $i = 1, 2, 3, 4$, чтобы идеальный бим-бамп удовлетворял требованиям вывода.

Кроме того, коллинз-бампы применимы только для z -движения и не применимы в виде (IIO) для Γ -движения, поскольку в дополнительных обмотках для последних возникает проблема компенсации наводимых в них ЭДС, возникающих из-за роста ведущего поля синхротрона.

76. РАДИАЛЬНЫЙ БИМ-БАМП ВЫВОДА

Дискретный характер расположения возмущений и проблема компенсации наводимых ЭДС в синхротроне потребовали поисков других решений создания радиального бим-бампа.

Широкое применение получил метод компенсации ЭДС при помощи обмоток, намотанных на одинаковые блоки в виде цифры восемь. Такие блоки составляют пару. В блоках пары одновременно возникают равные по величине и противоположные по знаку возмущения.

Тогда, если отказаться от строгости первых двух условий (99), т.е. от "идеальности" бампа, [6] и ограничиться лишь условиями, что $y_{зам}(s, k)$ достигает своего максимального значения в точке вывода S_M , а на остальной части кольца

$|y_{зам}(s, k)| < |y_{зам}(S_M, k)|$, то выводной Γ -бамп можно осуществить при помощи двух пар блоков. Другими словами, при выборе

оптимального варианта расположения возмущений для получения необходимого Γ -бампа орбиты в этом случае, необходимо выполнить следующие требования:

1. Возмущения создаются при помощи пар для обеспечения компенсации наведенных ЭДС.
2. Расстояние между возмущенными блоками должно быть минимальным.
3. Величины возмущений должны обеспечить необходимое значение $y_{зам}(S_M, k) \equiv r_{зам}(S_M, k)$ в местах расположения S_M септума или мишени.

В периоде магнитной структуры синхротрона, как правило, существуют два типа блоков: F и $-D$ - блоки - в системе FODO, FD и DF - блоки - в системе FOFDOD

Использование дополнительных обмоток на этих блоках означает, что интервалы $[s_1^{(i)}, s_2^{(i)}]$ возмущения соответствуют в этом случае длинам соответствующих блоков, и возможные значения интегралов ограничены, т.е.

$$I_i = J_F, J_D, \quad (\text{см. раздел 4}); \quad (\text{III})$$

где J_F, J_D - значения интегралов (28) первого периода магнитной фокусировки.

Если ввести обозначения

$$\zeta_{F,D} = \arctg(J_{F,D}^s / J_{F,D}^c), \quad (\text{II2})$$

то возможные значения фаз ζ_i определяются соотношениями:

$$\zeta_i = \zeta_{F,D} + m\mu, \quad (\text{II3})$$

где $m = 1, 2, \dots, M$

M - число периодов градиента магнитного поля.

Как было показано в разделе 7, два одинаковых по знаку возмущения необходимо располагать по разные стороны от точки S_M , чтобы обеспечить требование (94). Это значит, что и "компенсационные" блоки должны быть расположены по разные стороны от S_M .

Таким образом, в этом случае задача сводится к нахождению месторасположения возмущений так, чтобы замкнутая орбита $r_{зам}^{осн}(s, \kappa)$, создаваемая основными (одинаковыми по знаку) возмущениями, и замкнутая орбита $r_{зам}^{кмп}(s, \kappa)$, создаваемая их "компенсационными напарниками", были одного знака на участке между основными возмущениями.

Введем обозначения: $\xi_1^{кмп}, \xi_1^{осн}, \xi_2^{осн}, \xi_2^{кмп}$ для участков возмущения $[s_1^{(i)}, s_2^{(i)}]$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

Тогда по аналогии с разделом 7 получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{зам}^{осн}(s, \kappa) \Big|_{0 \leq s \leq s_1^{(2)}} = \beta^{1/2}(s) F^{(j)} C^{осн} \cos[\psi(s) + \pi Q - \eta_c^{осн}] / 2 \sin \pi Q \\ r_{зам}^{осн}(s, \kappa) \Big|_{s_2^{(2)} \leq s \leq s_1^{(3)}} = \beta^{1/2}(s) F^{(j)} D^{осн} \cos[\psi(s) - \eta_D^{осн}] / 2 \sin \pi Q \quad (II4) \\ r_{зам}^{осн}(s, \kappa) \Big|_{s_2^{(3)} \leq s \leq L} = \beta^{1/2}(s) F^{(j)} C^{осн} \cos[\psi(s) - \pi Q - \eta_c^{осн}] / 2 \sin \pi Q; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{зам}^{кмп}(s, \kappa) \Big|_{0 \leq s \leq s_1^{(1)}} = \beta^{1/2}(s) F^{(j)} C^{кмп} \cos[\psi(s) + \pi Q - \eta_c^{кмп}] / 2 \sin \pi Q \\ r_{зам}^{кмп}(s, \kappa) \Big|_{s_2^{(1)} \leq s \leq s_1^{(4)}} = \beta^{1/2}(s) F^{(j)} D^{кмп} \cos[\psi(s) - \eta_D^{кмп}] / 2 \sin \pi Q \quad (II5) \\ r_{зам}^{кмп}(s, \kappa) \Big|_{s_2^{(4)} \leq s \leq L} = \beta^{1/2}(s) F^{(j)} C^{кмп} \cos[\psi(s) - \pi Q - \eta_c^{кмп}] / 2 \sin \pi Q; \end{array} \right.$$

где C, D, η_c, η_D определяются из соотношений (91) заменой ξ_2 и ξ_1 соответствующими значениями $\xi_2^{осн}, \xi_1^{осн}$ или $\xi_2^{кмп}, \xi_1^{кмп}$.

Для того, чтобы замкнутая орбита

$$r_{зам}(s, \kappa) = r_{зам}^{осн}(s, \kappa) + r_{зам}^{кмп}(s, \kappa) \quad (II6)$$

была симметричной относительно S_M блоки должны быть также симметричны относительно S_M .

Поэтому интегралы I_1 и I_2 - разные, так как симметричные блоки в магнитной структуре синхротрона всегда разные.

Из (II4) и (II5) следует, что фазы $\xi_1^{кмп}, \xi_1^{осн}, \xi_2^{осн}, \xi_2^{кмп}$ должны быть выбраны, исходя из требования

$$\left| r_{зам}(S_M, \kappa) \right| = \beta^{1/2}(S_M) |F^{(j)}| |D^{осн} \cos[\psi(S_M) - \eta_D^{осн}] - D^{кмп} \cos[\psi(S_M) - \eta_D^{кмп}]| / 2 |\sin \pi Q| = |r_{зам}|_{max} \quad (II7)$$

с одной стороны, а с другой - чтобы вне интервала $[s_1^{(1)}, s_2^{(4)}]$ отклонения $r_{зам}(s, \kappa)$ были много меньше $|r_{зам}|_{max}$, т.е.

$$\left| C^{осн} \cos[\psi(s) \pm \pi Q - \eta_c^{осн}] - C^{кмп} \cos[\psi(s) \pm \pi Q - \eta_c^{кмп}] \right| \ll \left| D^{осн} \cos[\psi(s) - \eta_D^{осн}] - D^{кмп} \cos[\psi(s) - \eta_D^{кмп}] \right|. \quad (II8)$$

Из вида $C^{осн}, C^{кмп}$ (см. (91)) следует, что при $\delta > 0$ фазы ξ_i должны удовлетворять условиям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_2^{осн} - \xi_1^{осн} \approx (2m_1 + 1)\pi, \\ \xi_2^{кмп} - \xi_1^{кмп} \approx (2m_2 + 1)\pi, \end{array} \right. \quad (II9)$$

(m_1, m_2 - произвольные целые числа).

Для того, чтобы значения $C^{осн}$ и $C^{кмп}$ были близки

к минимальному значению $C_{min} = |I_1 - \delta I_2|$.

Тогда выбором величины $\delta = I_1/I_2$ можно приблизить значения C к нулю.

Допустим, что основные возмущения расположены соответственно, в "п" - ом и "m" - ом ($m, n = 1, 2, \dots, M$) периодах магнитной структуры.

Тогда если выбрать

$$\zeta_1^{осн} = \zeta_{D,F} + n\mu, \quad (I20)$$

то
$$\zeta_2^{осн} = \zeta_{F,D} + m\mu \quad (I21)$$

и наоборот, поскольку симметричны относительно S_M блоки всегда разные.

Аналогично для $\zeta_1^{кмп}$ и $\zeta_2^{кмп}$ имеем:

$$\zeta_1^{кмп} = \zeta_{D,F} + j\mu, \quad (I22)$$

$$\zeta_2^{кмп} = \zeta_{F,D} + p\mu;$$

причем, из-за симметрии

$$|p-m| = |n-j|. \quad (I23)$$

Тогда (I19) и (I20) примут вид

$$\zeta_2^{осн} - \zeta_1^{осн} = (m-n)\mu + \zeta_{F,D} - \zeta_{D,F} \approx (2m_1+1)\pi, \quad (I24)$$

$$\zeta_2^{кмп} - \zeta_1^{кмп} = (p-j)\mu + \zeta_{F,D} - \zeta_{D,F} \approx (2m_2+1)\pi \quad (I25)$$

(m_1, m_2 - произвольные целые числа).

Вычитая из (I24) (I23) и учитывая (I22), получим

$$|p-m|\mu \approx (m_2 - m_1)\pi.$$

Поскольку обычно в ускорителях значение μ близко к значению $\pi/2$ (но никогда не равно ему), то отсюда следует, что наименьшее расстояние между основным и его "компенсирующим"

блоками должно составлять два периода магнитной структуры.

При условии $|p-m| = |n-j| = 2$ имеем:

$$r_{зам}(s, \kappa) \Big|_{0 < s < s_1^{(n)}} = \beta^{1/2}(s) F^{(j)} |\sin \mu| G \cos[\psi(s) + \pi Q - \eta_e] / \sin \pi Q,$$

$$r_{зам}(s_m, \kappa) \Big| = \beta^{1/2}(s_m) F^{(j)} |\sin \mu| U \cos[\psi(s_m) - \eta_u] / \sin \pi Q, \quad (I26)$$

$$r_{зам}(s, \kappa) \Big|_{s_2^{(m)} < s < s_1^{(l)}} = \beta^{1/2}(s) F^{(j)} |\sin \mu| G \cos[\psi(s) - \pi Q - \eta_e] / \sin \pi Q,$$

где введены обозначения:

$$G^2 = I_1^2 + \delta^2 I_2^2 - 2I_1 I_2 \delta \cos[(m-n+2)\mu - (\zeta_{D,F} - \zeta_{F,D})],$$

$$U^2 = I_1^2 + \delta^2 I_2^2 - 2I_1 I_2 \delta \cos\{2\pi Q - [(m-n+2)\mu - (\zeta_{D,F} - \zeta_{F,D})]\}, \quad (I27)$$

$$\eta_e = \arctg \frac{I_1 \cos[\zeta_{D,F} + (n-1)\mu] - \delta I_2 \cos[\zeta_{F,D} + (m+1)\mu]}{-I_1 \sin[\zeta_{D,F} + (n-1)\mu] + \delta I_2 \sin[\zeta_{F,D} + (m+1)\mu]}$$

$$\eta_u = \arctg \frac{-I_1 \cos[\pi Q + \zeta_{D,F} + (n-1)\mu] + \delta I_2 \cos[\pi Q - \zeta_{F,D} - (m+1)\mu]}{I_1 \sin[\pi Q + \zeta_{D,F} + (n-1)\mu] + \delta I_2 \sin[\pi Q - \zeta_{F,D} - (m+1)\mu]}$$

При выполнении условия $\delta = I_1/I_2$ из (I27) получим:

$$\eta_e = \eta_u = \frac{1}{2} [\zeta_{D,F} + \zeta_{F,D} + (m+n)\mu]. \quad (I28)$$

Подставляя (I28) в (I26), легко убедиться, что для выполнения условия

$$|r_{зам}(s_m, \kappa)| = |r_{зам}(\kappa)|_{max}$$

необходимо, чтобы

$$\psi(s_m) = \frac{1}{2} [\zeta_{D,F} + \zeta_{F,D} + (m+n)\mu] = \frac{1}{2} [\zeta_1^{осн} + \zeta_2^{осн}], \quad (I29)$$

что означает симметрию расположения относительно S_M возмущений одинакового знака.

Таким образом, при обеспечении симметрии выбор чисел m

и n из условия

$$(m - n + 2)\mu - (\xi_{D,F} - \xi_{F,D}) \approx (2m + 1)\pi \quad (I30)$$

должен исходить только из требования, чтобы расстояние между основными возмущениями было минимальным.

В структуре FOFDOD, когда S_M находится в (++) промежутке, первый основной блок возмущения всегда DF - блок, а второй - FD - блок.

Поэтому в этой структуре условие (I40) имеет вид

$$(m - n + 2)\mu - (\xi_D - \xi_F) \approx (2m + 1)\pi. \quad (I30a)$$

Для Ереванского синхротрона, например, $\xi_D - \xi_F \approx 1.0$.

Поэтому минимальное значение $m - n$ есть 3: $m - n = 3$.

Кроме того, в структуре FOFDOD интегралы I_1 и I_2 очень близки по величине. Их отличие по порядку величины сравнимо с величинами неконтролируемых ошибок, таких, как неполная компенсация наводимых ЭДС в одинаковых блоках и т.д.

Поэтому на первом этапе создания Γ - бампа на Ереванском синхротроне было принято $\delta = 1$, что позволяет питать дополнительные обмотки одним источником питания и, тем самым, обеспечить одинаковый закон изменения возмущений во всех блоках.

Однако, для "тонких" экспериментов, когда угол бампа в точке S_M играет существенную роль, необходимо предусмотреть устройство управления величиной δ для коррекции угла $\Gamma'_{зам}(S_M)$.

В структуре FODO интегралы I_1 и I_2 сильно отличаются друг от друга и система управления величиной δ просто необходима.

7в. РАДИАЛЬНЫЙ "ИДЕАЛЬНЫЙ" БИМ-БАМП ВЫВОДА

Рассмотренный выше радиальный бим-бамп вывода применим только в случае одной точки вывода S_M .

Для эффективного использования синхротрона желательно иметь возможность работать одновременно с двумя (и более) мишенями, поскольку интенсивности ускоренных пучков обычно на порядок выше интенсивностей, используемых для экспериментов.

В связи с этим возникает задача создания такой замкнутой орбиты, которая имеет "выбросы" в местах расположения мишеней, причем желательно, чтобы величины каждого "выброса" управлялись независимо друг от друга.

На первый взгляд кажется, что использование двух, рассмотренных в разделе 7б, схем решает задачу. На самом же деле, при одновременной работе двух таких бампов есть взаимное влияние друг на друга ввиду простой суперпозиции.

Если же каждый из бампов будет идеальным, то на участках вне первого бампа можно осуществить второй (и более) независимо от первого.

Однако, на практике мишени (точки вывода) располагаются в соседних промежутках (в структуре FOFDOD (++) промежутках) и, тем самым, ограничивают еще больше возможность выбора места расположения необходимого числа возмущений. Кроме того, остается еще проблема компенсации наведенных ЭДС.

Для Ереванского синхротрона были предложены две схемы инженерного решения вопроса. В первой [7] проблема компенсации наведенных ЭДС решается выбором "компенсирующих" блоков на про-

тивоположном от основных блоков участке кольца, что создает одновременно два бампа на разных участках кольца с "выбросами" в разные стороны от равновесной орбиты. Во второй [8] эта проблема решается при помощи измерительных блоков, включенных последовательно с основными и установленных вне орбиты пучка синхротрона.

В работе [7] "идеальный" бамп создается при помощи четырех блоков (минимальное число необходимых возмущений для обеспечения условий (99)), следующих друг за другом. Точка S_M находится в середине этого промежутка. Поэтому два таких бампа, не влияющих друг на друга, можно осуществить, если вторую точку вывода S_{M_2} взять через 2 периода магнитной структуры, т.е. $S_{M_2} = S_{M_1} + 2\ell$.

Предложенная авторами работы [7] схема для случая

$S_{M_2} = S_{M_1} + \ell$ ошибочна в общем случае, когда величины возмущений изменяются со временем. Эта схема верна только в стационарном случае $F_i = \text{const}$ и неприменима, например, для осуществления одновременного вывода двух γ -пучков из соседних (через период ℓ) промежутков.

В нашей работе [8] проблема создания необходимого "идеального" одно-, двух- (и более) пикового бампа для Ереванского синхротрона решена по другой схеме, соответственно, четырьмя и шестью блоками (для трехпикового - восемью). Основным недостатком этой схемы является то, что при одинаковом законе наведения пучка на мишени, "высоты" этих пиков всегда равны друг другу.

Это приводит к ряду практических неудобств. В настоящее время ведутся поиски других схем. Заметим, что и в нашей

схеме проблема компенсации может быть решена методом, предложенным в [7].

8. ВЛИЯНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ ТИПА БИМ-БАМП НА РАЗМЕРЫ ПУЧКА

Для расчета влияния возмущений, создающих бим-бамп, достаточно в выражениях (55), (65), (72), (76), (77) произвести замену

$$I \sin(\alpha - \zeta) \rightarrow \sum_{i=1}^n \delta_i I_i \sin(\alpha - \zeta_i), \quad (I31)$$

$$I \cos(\alpha - \zeta) \rightarrow \sum_{i=1}^n \delta_i I_i \cos(\alpha - \zeta_i);$$

где n - число возмущенных участков, $\delta_i = 1$, $\alpha \neq \delta_i$ ($i \neq 1$) описывают отношение возмущения в i -ом участке к возмущению в первом. При этом, законы изменения возмущений со временем на всех участках одни и те же.

В общем случае, для B_1 и B_2 имеем:

$$B_1 = A \sin \varphi + \beta_{\max}^{1/2} F^{(j)} \sum_{i=1}^n \delta_i I_i \sin[\alpha^{(j)} - \zeta_i] / 2 \sin \pi Q, \quad (I32)$$

$$B_2 = A \cos \varphi - \beta_{\max}^{1/2} F^{(j)} \sum_{i=1}^n \delta_i I_i \cos[\alpha^{(j)} - \zeta_i] / 2 \sin \pi Q.$$

Значения величин $F^{(j)}$ и $\alpha^{(j)}$ определены выбором закона изменения возмущений со временем (см. раздел 6).

Величины δ_i, I_i, ζ_i определяются выбором схемы возмущения (см. раздел 7).

Таким образом, задача сводится к вычислению сумм (I31) для данной схемы возмущений, создающих бим-бамп.

Из (I32) следует, что для всех случаев "идеального" бампа в силу выполнения условий (см., например, [8])

$$\sum_{i=1}^n \delta_i I_i \sin \zeta_i = \sum_{i=1}^n \delta_i I_i \cos \zeta_i = 0 \quad (I33)$$

поперечные размеры пучка не изменяются при любом законе изменения возмущений со временем.

Увеличение размеров пучка возникает только в случае, когда

бим-бамп "неидеален".

Найдем величины B_1, B_2 для случая бампа, описанного в разделе 76, на примере Ереванского синхротрона. Суммы (I31) в этом случае имеют вид:

$$S_s = \sum_{i=1}^4 \delta_i I_i \sin(\alpha^{(i)} - \zeta_i) = -I_1 \sin(\alpha^{(1)} - \zeta_1) + \quad (I34)$$

$$+ I_1 \sin(\alpha^{(1)} - \zeta_2) + \delta I_2 \sin(\alpha^{(2)} - \zeta_3) - \delta I_2 \sin(\alpha^{(2)} - \zeta_4),$$

$$S_c = \sum_{i=1}^4 \delta_i I_i \cos(\alpha^{(i)} - \zeta_i) = -I_1 \cos(\alpha^{(1)} - \zeta_1) + \quad (I35)$$

$$+ I_1 \cos(\alpha^{(1)} - \zeta_2) + \delta I_2 \cos(\alpha^{(2)} - \zeta_3) - \delta I_2 \cos(\alpha^{(2)} - \zeta_4).$$

Между фазами ζ_i существуют следующие соотношения (см. раздел (76)):

$$\zeta_1 = \zeta_2 - 2\mu$$

$$\zeta_4 = \zeta_5 + 2\mu \quad (I36)$$

$$\zeta_3 - \zeta_2 \approx (2m_1 + 1)\pi.$$

Используя обозначения

$$\zeta_2 = \zeta_1^{\text{очн}} = \zeta_{D,F} + \pi\mu, \quad (I37)$$

$$\zeta_3 = \zeta_2^{\text{очн}} = \zeta_{F,D} + \pi\mu,$$

и (I36), получим:

$$S_s = 2 \sin \mu G \sin[\alpha^{(1)} - \eta_G], \quad (I38)$$

$$S_c = 2 \sin \mu G \cos[\alpha^{(1)} - \eta_G],$$

где G и η_G определены соотношениями (I27).

Подставляя (I58) в (I32) получим, что максимально возможное увеличение огибающей в этом случае при любом законе изменения возмущений пропорционально величине G , т.е. (см. (26))

$$\Delta A = \beta_{\text{max}}^{1/2} |\sin \mu| |F^{(i)}| G / 2 |\sin \pi Q|. \quad (I39)$$

Величина G характеризует замкнутую орбиту на большей части кольца вне участка, ограниченного крайними блоками возмущения.

Результат (I39) еще раз подтверждает, что "идеальный" бамп ($G = 0$) не изменяет размеров, что очень важно, например, для обеспечения одновременного вывода двух (и более) γ -пучков с внутренних мишеней электронного синхротрона (см., например, [9]).

В заключение считаю приятным долгом поблагодарить Меликяна Р.А. и Туманяна Р.В. за обсуждение результатов работы.

Рассмотрим интегралы

$$J_{(x)}^{c,s} = \int_0^x F(t) \beta^{1/2}(t) \left(\frac{\cos}{\sin} \right) \psi(t) dt \equiv \int_0^x f(t) dt \quad (\text{П. I. 1.})$$

для случая $F(x) = F(s + (\kappa - 1)L) = F(s)$.

Представим $J(x)$ в виде суммы интегралов:

$$J(x) = \int_0^s f dt + \int_s^{s+L} f(t) dt + \int_{s+L}^{s+2L} f(t) dt + \dots + \int_{s+(\kappa-2)L}^{s+(\kappa-1)L} f(t) dt. \quad (\text{П. I. 2.})$$

Во всех интегралах, начиная с третьего, сделаем замену переменных, соответственно

$$\begin{aligned} t &\rightarrow t' + L \\ t &\rightarrow t' + 2L \\ &\dots \\ t &\rightarrow t' + (\kappa - 2)L \end{aligned} \quad (\text{П. I. 3.})$$

и воспользуемся периодичностью функций

$$\begin{aligned} F(t + \kappa L) &= F(t), \\ \beta(t + \kappa L) &= \beta(t) \end{aligned}$$

и свойством функции

$$\psi(t + \kappa L) = \psi(t) + 2\pi Q \cdot \kappa.$$

Получим

$$\begin{aligned} J^s(x) &= \int_0^s F(t) \beta^{1/2}(t) \sin \psi(t) dt + \\ &+ \int_s^{s+L} F \beta^{1/2} \sin \psi(t) dt \cdot \sum_{n=0}^{\kappa-2} \cos(2\pi Q n) + \\ &+ \int_s^{s+L} F \beta^{1/2} \cos \psi(t) dt \cdot \sum_{n=0}^{\kappa-2} \sin(2\pi Q n), \end{aligned} \quad (\text{П. I. 4.})$$

$$\begin{aligned} J^c(x) &= \int_0^s F(t) \beta^{1/2}(t) \cos \psi(t) dt + \\ &+ \int_s^{s+L} F(t) \beta^{1/2}(t) \cos \psi(t) dt \cdot \sum_{n=0}^{\kappa-2} \cos(2\pi Q n) - \\ &- \int_s^{s+L} F(t) \beta^{1/2}(t) \sin \psi(t) dt \cdot \sum_{n=0}^{\kappa-2} \sin(2\pi Q n). \end{aligned} \quad (\text{П. I. 5.})$$

Подставляя значения сумм [5], получим

$$\begin{aligned} J^{c,s}(x) &= \int_0^s F(t) \beta^{1/2}(t) \left(\frac{\cos}{\sin} \right) \psi(t) dt + \\ &+ \frac{\sin(\kappa-1)\pi Q}{\sin \pi Q} \int_s^{s+L} F(t) \beta^{1/2}(t) \left(\frac{\cos}{\sin} \right) [\psi(t) + (\kappa-2)\pi Q] dt. \end{aligned} \quad (\text{П. I. 6.})$$

Из (10) для $y_{\text{БМН}}(x) = y_{\text{БМН}}(s, \kappa)$ имеем:

$$\begin{aligned} y_{\text{БМН}}(s, \kappa) &= \beta^{1/2}(s) [\sin \psi(s) J^c(x) - \cos \psi(s) J^s(x)] = \\ &= \beta^{1/2}(s) \{ \sin [\psi(s) + (\kappa-1)2\pi Q] J^c(x) - \cos [\psi(s) + (\kappa-1)2\pi Q] J^s(x) \}. \end{aligned} \quad (\text{П. I. 7.})$$

Подставляя в (П. I. 7.) значение интегралов $J^{c,s}(x)$ из (П. I. 6.), после простых преобразований получим:

$$\begin{aligned} y_{\text{БМН}}(s, \kappa) &= \beta^{1/2}(s) \left\{ \int_0^s F(t) \beta^{1/2}(t) \sin [\psi(s) + 2\pi Q(\kappa-1) - \psi(t)] dt + \right. \\ &+ \frac{1}{2 \sin \pi Q} \int_s^{s+L} F(t) \beta^{1/2}(t) \cos [\psi(s) + \pi Q - \psi(t)] dt - \\ &\left. - \frac{1}{2 \sin \pi Q} \int_s^{s+L} F(t) \beta^{1/2}(t) \cos [\psi(s) + 2\pi Q(\kappa-1) + \pi Q - \psi(t)] dt \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П. I. 8.})$$

Преобразуем сумму интегралов

$$\begin{aligned}
& \int_0^s F(t) \beta^{1/2}(t) \sin[\psi(s) + 2\pi Q(\kappa-1) - \psi(t)] dt - \\
& - \frac{1}{2\sin \pi Q} \int_s^{s+L} F(t) \beta^{1/2}(t) \cos[\psi(s) + 2\pi Q(\kappa-1) + \pi Q - \psi(t)] dt = \\
& = \frac{1}{2\sin \pi Q} \left\{ \int_0^s F(t) \beta^{1/2}(t) \cos[\psi(s) + 2\pi Q(\kappa-1) - \pi Q - \psi(t)] dt - \right. \\
& \quad - \int_s^{s+L} F(t) \beta^{1/2}(t) \cos[\psi(s) + 2\pi Q(\kappa-1) + \pi Q - \psi(t)] dt - \\
& \quad - \int_0^{s+L} F(t) \beta^{1/2}(t) \cos[\psi(s) + 2\pi Q(\kappa-1) + \pi Q - \psi(t)] dt \\
& = \frac{1}{2\sin \pi Q} \left\{ \int_0^s F(t) \beta^{1/2}(t) \cos[\psi(s) + 2\pi Q(\kappa-1) - \pi Q - \psi(t)] dt \right. \\
& \quad - \left. \int_s^{s+L} F(t) \beta^{1/2}(t) \cos[\psi(s) + 2\pi Q(\kappa-1) + \pi Q - \psi(t)] dt \right\} = \\
& = \frac{1}{2\sin \pi Q} \left\{ \int_0^s F(t) \beta^{1/2}(t) \cos[\psi(s) + 2\pi Q(\kappa-1) - \pi Q - \psi(t)] dt - \right. \\
& \quad - \int_s^{s+L} F(t) \beta^{1/2}(t) \cos[\psi(s) + 2\pi Q(\kappa-1) + \pi Q - \psi(t)] dt - \\
& \quad - \left. \int_0^{s+L} F(t) \beta^{1/2}(t) \cos[\psi(s) + 2\pi Q(\kappa-1) + \pi Q - \psi(t)] dt \right\} = \\
& = -\frac{1}{2\sin \pi Q} \int_0^L F(t) \beta^{1/2}(t) \cos[\psi(s) + 2\pi Q(\kappa-1) + \pi Q - \psi(t)] dt.
\end{aligned}$$

(П.1.9.)

(Нетрудно убедиться, что при замене переменной интегрирования $t \rightarrow t' + L$ третий интеграл в (П.1.9.) сводится к первому).

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned}
y_{\text{вн}}(s, \kappa) &= \frac{1}{2\sin \pi Q} \int_s^{s+L} F(t) \beta^{1/2}(t) \cos[\psi(s) + \pi Q - \psi(t)] dt - \\
& - \frac{1}{2\sin \pi Q} \int_0^L F(t) \beta^{1/2}(t) \cos[\psi(s) + 2\pi Q(\kappa-1) + \pi Q - \psi(t)] dt.
\end{aligned}$$

(П.1.10)

Представим опять интеграл $J(x)$, входящий в (10), в виде суммы интегралов (см. П.1.2.)

$$J(x) = \int_0^s f dt + \int_s^{s+L} f dt + \int_{s+L}^{s+2L} f dt + \dots + \int_{s+(k-1)L}^{s+kL} f dt$$

(П.2.1.)

Все интегралы в (П.2.1.), начиная со второго, отличны от нуля, т.к. они содержат в себе интервал $[S_1, S_2]$, где $F \neq 0$. Что же касается первого интеграла, то при $S < S_1$ он равен нулю, в то время как при $S > S_2$ — отличен от нуля. Рис.1,2 поясняет сказанное. При взаимном расположении значений S, S_1, S_2 , соответствующем рис.2а, при $\kappa = 1$, частица еще не прошла возмущенный участок, и действие возмущения на частицу скажется только начиная со второго оборота.

Таким образом, при $S < S_1$ имеем

$$\begin{aligned}
\text{при } \kappa=1 & \quad J(x) = \int_0^s f dt = 0 \\
\kappa=2 & \quad J(x) = \int_{S_1}^{S_2} f dt \\
\kappa=3 & \quad J(x) = \int_{S_1}^{S_2} f dt + \int_{S_2+L}^{S_2+2L} f dt \\
\kappa=4 & \quad J(x) = \int_{S_1}^{S_2} f dt + \int_{S_2+L}^{S_2+2L} f dt + \int_{S_2+2L}^{S_2+3L} f dt \\
\kappa=\kappa & \quad J(x) = \int_{S_1}^{S_2} f dt + \int_{S_2+L}^{S_2+2L} f dt + \dots + \int_{S_2+(k-2)L}^{S_2+(k-1)L} f dt
\end{aligned}$$

(П.2.2.)

При $s > S_2$ (см. рис.2б) имеем:

$$\begin{aligned}
\text{при } \kappa=1 & \quad J(x) = \int_{S_2}^{S_2} f dt \\
\kappa=2 & \quad J(x) = \int_{S_2}^{S_2} f dt + \int_{S_2+L}^{S_2+2L} f dt \\
\kappa=3 & \quad J(x) = \int_{S_2}^{S_2} f dt + \int_{S_2+L}^{S_2+2L} f dt + \int_{S_2+2L}^{S_2+3L} f dt \\
\kappa=\kappa & \quad J(x) = \int_{S_2}^{S_2} f dt + \int_{S_2+L}^{S_2+2L} f dt + \dots + \int_{S_2+(k-1)L}^{S_2+kL} f dt
\end{aligned}$$

(П.2.3.)

Запишем $J(x)$ в виде:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}(x) &= \sin[\psi(s) + (\kappa-1)2\pi Q] \int_0^x F(t) \beta^{1/2}(t) \cos \psi(t) dt - \\
 &\quad - \cos[\psi(s) + (\kappa-1)2\pi Q] \int_0^x F(t) \beta^{1/2}(t) \sin \psi(t) dt
 \end{aligned}
 \tag{П.2.4.}$$

Введем опять обозначения:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}^{s,c} &= \int_{s_1}^{s_2} \beta^{1/2}(t) \left(\frac{\sin}{\cos} \right) \psi(t) dt, \\
 I &= \sqrt{(\mathcal{J}^s)^2 + (\mathcal{J}^c)^2}, \\
 \zeta &= \operatorname{arctg} (\mathcal{J}^s / \mathcal{J}^c).
 \end{aligned}
 \tag{П.2.5.}$$

Тогда

$$\int_{s_1}^{s_2} F(t) \beta^{1/2}(t) \left(\frac{\sin}{\cos} \right) \psi(t) dt = F_1 \begin{pmatrix} \mathcal{J}^s \cos 0 + \mathcal{J}^c \sin 0 \\ \mathcal{J}^c \cos 0 + \mathcal{J}^s \sin 0 \end{pmatrix}.
 \tag{П.2.6.}$$

В интеграле $\int_{s_1+L}^{s_2+L} f dt$ сделаем замену переменной интегрирования $t \rightarrow t'+L$.

Тогда

$$\begin{aligned}
 \int_{s_1+L}^{s_2+L} F(t) \beta^{1/2}(t) \left(\frac{\sin}{\cos} \right) \psi(t) dt &= \int_{s_1}^{s_2} F(t'+L) \beta^{1/2}(t'+L) \left(\frac{\sin}{\cos} \right) \psi(t'+L) dt = \\
 &= F_2 \begin{pmatrix} \mathcal{J}^s \cos 2\pi Q + \mathcal{J}^c \sin 2\pi Q \\ \mathcal{J}^c \cos 2\pi Q - \mathcal{J}^s \sin 2\pi Q \end{pmatrix} = F_2 I \begin{pmatrix} \sin(2\pi Q + \zeta) \\ \cos(2\pi Q + \zeta) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}
 \tag{П.2.7.}$$

Аналогично, заменой переменной $t \rightarrow t' + (\kappa-2)L$ получим для интеграла

$$\int_{s_1+(\kappa-2)L}^{s_2+(\kappa-2)L} F(t) \beta^{1/2}(t) \left(\frac{\sin}{\cos} \right) \psi(t) dt = F_{\kappa-1} I \begin{pmatrix} \sin[2\pi Q(\kappa-2) + \zeta] \\ \cos[2\pi Q(\kappa-2) + \zeta] \end{pmatrix}.
 \tag{П.2.8.}$$

Таким образом, при $s < s_1$ имеем

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}(x) |_{s < s_1} &= I \left\{ \sin[\psi(s) + (\kappa-1)2\pi Q] \sum_{m=0}^{\kappa-2} F_{m+1} \cos[2\pi Q m + \zeta] - \right. \\
 &\quad \left. - \cos[\psi(s) + (\kappa-1)2\pi Q] \sum_{m=0}^{\kappa-2} F_{m+1} \sin[2\pi Q m + \zeta] \right\} = \\
 &= I \sum_{m=0}^{\kappa-2} F_{m+1} \sin[\psi(s) + (\kappa-1-m)2\pi Q - \zeta].
 \end{aligned}
 \tag{П.2.9.}$$

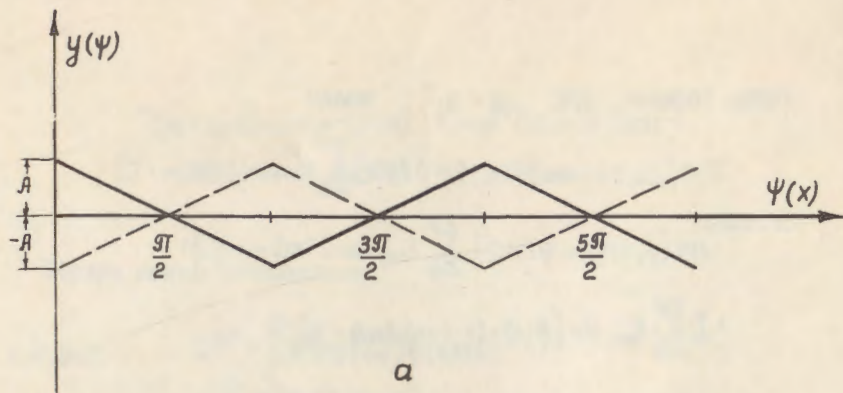
Переобозначая немые индексы:

$$n = \kappa - 2 - m \quad \text{в (П.2.9.) получим:}$$

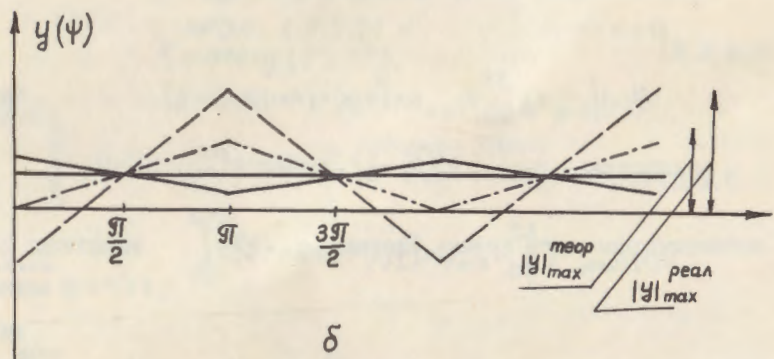
$$\mathcal{J}(x) |_{s < s_1} = I \sum_{n=0}^{\kappa-2} F_{\kappa-n-1} \sin[\psi(s) + (n+1)2\pi Q - \zeta].
 \tag{П.2.10.}$$

Аналогично, при $s > s_2$ имеем

$$\mathcal{J}(x) |_{s > s_2} = I \sum_{n=0}^{\kappa-1} F_{\kappa-n} \sin[\psi(s) + 2\pi Q n - \zeta].
 \tag{П.2.11.}$$

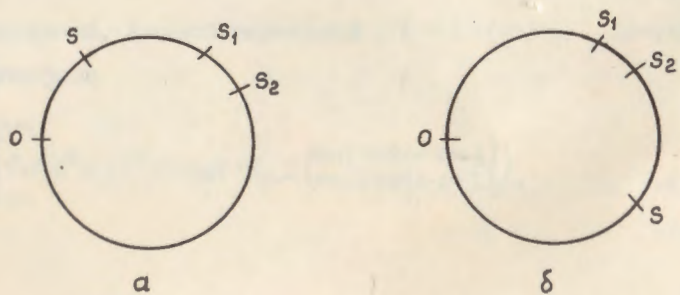


а



б

Рис. 1. Схематическое изображение поперечного движения частиц в циклических ускорителях
а) идеальный ускоритель; б) реальный ускоритель



а

б

Рис. 2

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коломенский А.А., Лебедев А.Н. Теория циклических ускорителей, М.:Физматгиз, 1962
2. Брук Г.. Циклические ускорители заряженных частиц, М.: Атомиздат, 1970
3. Sands M. The Physics of Electron Storage Rings An Introduction, SLAC Report No 121, 1970.
4. Кулипанов Г.Н. и др. Труды ш всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, Москва, 1973 т.1 с.393
5. Градштейн А.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, рядов, сумм и произведений, м.-л., Физматгиз, 1951
6. Averill R.J., Nucl.Sci. vol. NS-12
7. Карабеков И.И., Карапетян К.М. Метод многопучкового независимого вывода излучений из электронного синхротрона ЕРФМ Препринт ЕФМ - 166 (15)-76, Ереван 1976
8. Айрапетян Б.Б. и др. О возможности одновременного вывода частиц по нескольким каналам в Ереванском синхротроне Препринт ЕФМ-176(22)-76, Ереван 1976
9. Симонян Х.А., Туманян А.Р. Труды X международной конференции по ускорителям заряженных частиц. Серпухов, 1977, т.2с.170

Рукопись поступила 25 июля 1983 г.

Редактор Л.П. Мукаян
Тех. редактор А.С. Абрамян

Заказ 345 ВФ- 05336 Тираж 299

Препринт БФИ

Формат издания 60x84/16

Подписано к печати II/IX-83 3.5 уч.-изд.л. Ц. 50 к.

Издано Отделом научно-технической информации
Ереванского физического института, Ереван 36, Маргарина 2