индекс 3624

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЕФИ-680(70)-83

Е.Б.ПРОХОРЕНКО, Д.Б.СААКЯН

ВЫЧИСЛЕНИЕ КУЛОНОВСКОЙ ПОПРАВКИ К ЭНЕРГИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СТАТИЧЕСКИХ КВАРКОВ НА СЛУЧАЙНОЙ РЕШЕТКЕ В ПРЕДЕЛЕ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ

ԵՐԵՎԱՆ 1983 ЕРЕВАН

В работах [I-3] были введены случайные решетки. В наинизшем порядке по $1/g^2$ были вычислены натяжение струны и толщина. В данной работе в том же приближении вычисляется кулоновская поправка к линейному потенциалу. Мы будем пользоваться обозначениями [I-4].

Потенциал струны

$$V(R) = -\lim_{T\to\infty} \frac{\ln Z}{T} \tag{I}$$

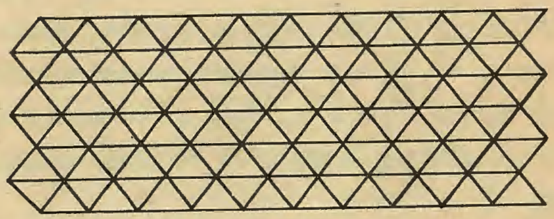
$$Z = \sum_n \int \prod_i d\vec{r}_i \frac{1}{g^{2n}} e^{-\rho V_{min}}$$

ρ - плотность узлов решетки, $\vec{r}_i$ - координаты точек на минимальной (с минимальным числом n треугольников на поверхности P, охватывающей вильсоновский контур $\tilde{C}$ из линков (ребер) случайной решетки) поверхности, V_{min} - объем фигуры, построенной следующим образом.

Строим вокруг каждого треугольника из линков на поверхности P окружность. Проводим Д-I - мерные сферы через эти окружности с тем же радиусом. Объем фигуры, ограниченной этими сферами, и есть V.

Если поверхность P взять на плоскости контура, и на нем узлы решетки выбрать в вершинах равносторонних треугольников, тогда V_{min} будет локальной точкой минимума V. Появление множителя $e^{-\rho V}$ в (I) можно понять из следующих соображений. Можно учитывать взаимодействие лишь между ближайшими соседями. Это будут 3 узла, через которые можно провести сферу, не содержащую внутри себя других узлов. Вероятность того, что при средней плотности узлов ρ объем V не содержит узлов, равно $-exp(-\rho V)$.

Локальный $min\ V$ даст следующие расположения узлов:



Это будет верно, когда $n \gg 1$. Тогда объем, связанный с граничными сегментами контура $\tilde{C}$, будет мал. Получаем условие

$$R \gg \frac{4}{D\gamma_{min}} f(\pi/3)(4/\sqrt{3})^{(D-1)/2}\left[\frac{2\ln g^2}{(D-2)\rho\gamma_{min}}\right]^{1/D} \qquad (2)$$

(см.приложение).

Вообще, границы контура $\tilde{C}$ не очень четко определены. Но мы надеемся, что неопределенность границ контура $\tilde{C} \sim \rho^{-1/D}$, а длина равностороннего треугольника $\sim (\ln g^2)^{1/D}\rho^{-1/D}$, так что имеет смысл границу контура $\tilde{C}$ считать неподвижной. Именно для этого случая и проводим расчеты. Учтем поперечные колебания внутренних узлов, изображенных на рисунке. Поскольку мы работаем в минимуме объемов, то при его разложении будем иметь квадратичную форму по отклонениям $\vec{\xi}_{i,j}$ узлов решетки от стационарного положения. Нужно внимательно учесть нулевые моды и взять гауссов интеграл по оставшимся переменным. Известно, что $\int d^N V e^{-x^T A x} = (\pi^N/\det A)^{1/2}$, $N = \dim A$. Для вычисления кулоновской поправки заметим, что вклад в нее будет набираться из колебаний струны с большой длиной волны. За эти колебания ответственны поперечные отклонения, у которых $D-2$ степени свободы. Учитывая поперечные колебания, получим предэкспоненту типа $(\pi^N/\det A)^{D/2-1}$, где N – число ненулевых мод, A – матрица для этих мод.

В приложении приведены основные использованные формулы.

Если произвести подстановку $\varphi_{ij} = 2/(LT)^{1/2}\sum_{p=1}^{T-1}\sum_{q=1}^{L-1} C_{pq}\sin\frac{\pi p i}{T}\sin\frac{\pi q j}{L}$, го квадратичная форма с учетом только призматических объемов диагонализируется с точностью до членов порядка $\frac{1}{T}$.

Для спектра получаем:

$$E_{p,q} = 6 - 2\cos\frac{\pi p}{T} - 2\cos\pi q/L - 2\cos\pi p/T\cos\pi q/L \qquad (3)$$

Энергия выражается следующим образом через E_{pq}:

$$V(L) = (D/2-1)\left[-(L-1)\ln\pi + T^{-1}\sum_{p=1}^{T-1}\sum_{q=1}^{L-1}E_{p,q}\right] \qquad (4)$$

Суммирование по p можно заменить интегрированием, так как нам нужен только член, пропорциональный T. Тогда двойная сумма сведется к одинарной: $\sum_{q=1}^{L-1}\ln\left[2\left(1+\sin\frac{\pi q}{2L}\right)^2\right]$

По формуле суммирования Эйлера (см.приложение) получим кулоновский член:

$$-\frac{\pi}{L}\frac{B_2}{2}\left[\varphi'(0) - \varphi'(\pi)\right] = -\frac{\pi}{12}\cdot\frac{1}{L} \qquad (5)$$

где $\varphi(x) = \ln\left[2\left(1+\sin x/2\right)^2\right]$, $B_2 = 1/6$ - второе число Бернулли.

Можно учесть также поправки, возникающие из-за флуктуаций объемов граничных сегментов. Поправка к спектру имеет следующий вид:

$$\delta E_{p,q} = 4\tilde{\alpha}/L \sin^2 \pi q/L \,, \tag{6}$$

где $$\tilde{\alpha} = \frac{f(\pi/3) - \sqrt{3}/D\, f'(\pi/3)}{f(\pi) - 3f(\pi/3)}$$

Поправка к энергии:

$$\delta V(L) = (D/2-1)\frac{\tilde{\alpha}}{2L}\sum_{q=1}^{L-1}\left(\sin\frac{3\pi q}{2L} + \sin\frac{\pi q}{2L}\right) \tag{7}$$

После суммирования получим $\delta V(L) = \frac{\tilde{\alpha}}{4L}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4L} + \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4L}\right)$ и после разложения в ряд по $1/L$ убеждаемся, что кулоновский член отсутствует

$$\delta V(L) = \frac{4\tilde{\alpha}}{3\pi}\left(1 + \sum_{K=1}^{\infty} C_K L^{-2K}\right) \tag{8}$$

В заключение авторы благодарят С.Г.Матиняна за полезные обсуждения в ходе работы.

Приложение

Объем сегмента D - мерного шара равен

$$V_{сег} = f(\alpha)\, r^D, \quad f(\alpha) = \int_0^{\alpha} \pi^{(D-1)/2} \sin^D\alpha\, d\alpha / \Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right).$$

Выпишем явную формулу для $f(\alpha)$:

$$f(\alpha) = \frac{\pi^{(D-1)/2}}{2\Gamma(D/2+1)}\left\{\frac{\Gamma\left(D/2-\left[\frac{D-1}{2}\right]\right)}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}-\left[\frac{D-1}{2}\right]\right)}\alpha^{2[D/2]+1-D} - \sum_{K=0}^{[D/2]}\frac{\Gamma(D/2-K)}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}-K\right)}\sin^{D-1-2K}\alpha\cos\alpha\right\}$$

$[x]$ - целая часть x

$V^0_{min} = \gamma_{min}\, n\left(\frac{A}{n}\right)^{D/2} + 2\left(2L/\sqrt{3}+T\right)V_{сег\,равн}/r$, где $\gamma_{min} = \left[f(\pi) - 3f(\pi/3)\right](16/3)^{D/4}$,

A - площадь внутри $\tilde{C}$, $V_{сег\,равн} = f(\pi/3)\, r^D$.

δV_{min} считается с использованием соотношений:

$$\delta r = (\delta\ell_1 + \delta\ell_2 + \delta\ell_3)/3\sqrt{3}, \quad \delta\alpha_i = (2\delta\ell_i - \delta\ell_j - \delta\ell_K)/3r, \quad \delta\ell_{ij} = (\xi_i - \xi_j)^2/2\ell_{ij}$$

Получим такую квадратичную форму:

$$\delta V_{min} \sim \sum_{i=0}^{T-1}\sum_{j=0}^{L}\left(\xi_{i+1,j} - \xi_{i,j}\right)^2 + \sum_{i=0}^{T}\sum_{j=0}^{L-1}\left(\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j}\right)^2 +$$

$$+ \sum_{i=0}^{T-1}\sum_{K=0}^{L/2-1}\left[\left(\xi_{i,2K+1} - \xi_{i+1,2K}\right)^2 + \left(\xi_{i,2K+1} - \xi_{i+1,2K+2}\right)^2\right] +$$

$$+ \tilde{\alpha}\left[\sum_{i=1}^{T-1}\left(\xi^2_{i,1} + \xi^2_{i,L-1}\right) + 2\sum_{K=1}^{L/2}\left(\xi^2_{1,2K} + \xi^2_{T-1,2K-1}\right)\right].$$

Формула суммирования Эйлера в удобном для нас виде выглядит так:

$$\sum_{V=1}^{L-1} h\left(V\frac{\pi}{L}\right) = \frac{L}{\pi}\int_0^{\pi} h(p)\,dp - \left[h(0) + h(\pi)\right]/2 - \sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{L}\right)^{2\mu-1}\frac{B_{2\mu}}{(2\mu)!}\left[h^{2\mu-1}(0) - h^{2\mu-1}(\pi)\right],$$

где $B_{2\mu}$ - числа Бернулли.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Christ N.H., Friedberg R., Lee T.D. Random Lattice Field Theory Nucl.Phys. 1982, volB202, p.89-125.
2. Christ N.H., Friedberg R., Lee T.D. Gauge Theory on a Random Lattice Nucl.Phys. 1982, vol.B210, p.310-336.
3. Christ N.H., Friedberg R., Lee T.D. Weights of Links and Plaquetts in a Random Lattice Nucl.Phys. 1982, vol.B210, p.337-346.
4. Luscher M., Symmetry-breaking Aspects of the roughening Transition in Gauge Theories Nucl.Phys.B, 1981, 180(FS2) p.317-329.

Рукопись поступила 27 июля 1983 г,

Редактор Л.П.Мукаян

Тех.редактор А.С.Абрамян

Заказ 356 ВФ- 04568 Тираж 299

Препринт ЕФИ - Формат издания 60x84/16

Подписано к печати 18/XI-83 0,5 уч.-изд л Ц. 8 к.

Издано Отделом научно-технической информации

Ереванского физического института, Ереван 36, Маркаряна 2