индекс 3624

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЕФИ-688(3)-84

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ ИНФОРМАЦИИ И ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО АТОМНОЙ НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

В.М.ЖАМКОЧЯН, Н.Л.ТЕР-ИСААКЯН

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ НА ПРОГРАММИРУЕМЫХ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРАХ

ЕРЕВАН-1984

ЕФИ-688(3)-84

V.M.ZHAMKOCHYAN, N.L.TER-ISAHAKYAN

NUMERICAL INTEGRATION ON PROGRAMMED MICROCALCULATOR

Methods of numerical integration applied on programmed microcalculators are considered. Appropriate programs for the computation of one-fold and double integrals are presented.

Yerevan Physics Institute

Yerevan 1984

Программируемый микрокалькулятор индивидуального пользования - весьма эффективный прибор, позволяющий существенно рационализировать научно-исследовательскую работу.

Вычислительные операции, требующие лишь внимания и "автоматизма", в частности, нахождение значений громоздких выражений при разных значениях входящих в них параметров, с успехом могут быть выполнены на калькуляторе такого типа, что позволяет в значительной мере интенсифицировать часть работы, связанной с расчетами. Наряду с этим, технические характеристики программируемых микрокалькуляторов, выпускаемых отечественной промышленностью, позволяют использовать их и для решения более сложных задач, которые до недавнего времени были доступны лишь большим ЭВМ.

В настоящей статье описаны методы численного интегрирования и соответствующие программы, применимые при работе с калькуляторами типа "Электроника БЗ-34", "МК-54" , "МК-56" и функционально совместимыми с ними.

Интегрирование функций одной переменной

Метод прямоугольников осноран на аппроксимации

$$\int_{x_0}^{x_0+n\Delta} f(x)\,dx \simeq \Delta \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{\Delta}{2}\right). \qquad (I)$$

Соответствующая программа вычислений весьма проста и выглядит следующим образом (см.табл.I).

Таблица I

Адреса	Команды	Адреса	Команды
00	ИПД	(05)	ИП5
0I	ИПВ	(06)	"+"
02	"+"	(07)	П5
03	ПД	(08)	F L 0
04	Вычисление	(09)	"00"
⋮	f (X)	(I0)	ИПВ
	(X ⟷ ПД) .	(II)	"X"
	. . .	(I2)	С/П
	. . .		
	. . .		

Ввод исходных данных:

n	⟶	П0
Δ	⟶	ПВ
$X_0 - \frac{\Delta}{2}$	⟶	ПД

Здесь и ниже : n - выбранное число шагов, Δ - величина шага.

Метод Симпсона соответствует приближению:

$$\int_{x_0}^{x_0+n\Delta} f(x)dx \simeq \frac{\Delta}{3} \sum_{i=0}^{n/2-1} \left[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i}+\Delta) + f(x_{2i}+2\Delta)\right] \qquad (2)$$

Геометрически эта формула соответствует замене кривой f (x) отрезками парабол, проходящих через каждые три точки

$$\left(x_{2i}, f(x_{2i})\right); \left(x_{2i}+\Delta, f(x_{2i}+\Delta)\right); \left(x_{2i}+2\Delta, f(x_{2i}+2\Delta)\right)$$

Вычисление интеграла можно провести по следующей программе.

Таблица 2

Адреса	Команды	Адреса	Команды	Адреса	Команды
00	ИПД	I3	ИП5	27	" ÷ "
0I	ПП	I4	"+"	28	С/П
02	"33"	I5	П5	29	ИПД
03	П5	I6	F L 0	30	ИПВ
04	КПП7	I7	"04"	3I	"+"
05	"4"	I8	ИПД	32	ПД
06	"X"	I9	ПП	33	. . .
07	ИП5	20	"33"	⋮	Вычисление
08	"+"	2I	ИП5		f (X)
09	П5	22	X⟷Y		(X ⟷ ПД) . . .
I0	КПП7	23	" - "	(34)	В/0
II	" 2 "	24	ИПВ		
I2	" X "	25	"X"		
		26	"3"		

Ввод исходных данных:

$\frac{n}{2}$ → ПО	X_0 → ПД
Δ → ПВ	29 → П7

При необходимости можно освободить регистр памяти $Rg\,7$. В этом случае вместо команд 04 КПП7 и IO КПП7 следует применить две пары команд - 04 ПП и II ПП
05 3I I2 3I.

Адреса остальных команд должны быть сдвинуты соответствующим образом: ($\frac{\text{ПП}}{33}$ → $\frac{\text{ПП}}{35}$).

Метод Гаусса

Производя замену переменных в интеграле $\int\limits_{x_0}^{x'} f(x)\,dx$,

$$x = \frac{x'-x_0}{2}\xi + \frac{x_0+x'}{2}; \qquad \eta(\xi) = \frac{x'-x_0}{2} f(x),$$

имеем

$$\int\limits_{-1}^{1}\eta(\xi)\,d\xi \simeq \sum_{K=1}^{\nu} a_K\,\eta(\xi_K), \qquad (3)$$

где

$$a_K = \frac{2}{(1-\xi_K^2)[P_\nu'(\xi_K)]^2}; \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

ν значений ξ_K являются корнями полинома Лежандра $P_\nu(\xi)$.

Проведя разбиение $\int\limits_{x_0}^{x_0+n\Delta} f(x)\,dx = \sum\limits_{i=0}^{n-1}\int\limits_{x_i}^{x_i+\Delta} f(x)\,dx$,

применим аппроксимацию (3) для каждого из n интегралов

$$\int\limits_{x_i}^{x_i+\Delta} f(x)\,dx.$$

Ограничиваясь случаями $\nu = 2$ и $\nu = 3$, можно получить следующие программы (см.табл.3 и 4)

$\nu = 2$

Таблица 3

Адреса	Команды	Адреса	Команды	Адреса	Команды
00	ИПО	IO	"X"	2I	ПД
OI	ИПВ	II	"+"	22	Вычисление
02	"X"	I2	ПП	.	f(X)
03	ИПА	I3	"2I"	.	(X↔ПД)
04	"+"	I4	FLO	.	. . .
05	ПП	I5	"00"	(23)	ИП5
06	"2I"	I6	ИПВ	(24)	+
07	ИПД	I7	"X"	(25)	П5
08	ИПВ	I8	"2"	(26)	В/О
09	ИПI	I9	"+"		
		20	С/П		

Ввод:

n → ПО	Δ → ПВ
$x_0 - \frac{\Delta}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ → ПА	
$\frac{1}{\sqrt{3}}$ → ПI	

Таблица 4

$\nu = 3$

Адреса	Команды	Адреса	Команды	Адреса	Команды
00	ИП0	I4	"+"	28	С/П
0I	ИПВ	I5	П5		
02	"X"	I6	КПП7$\left(\begin{smallmatrix}ПП\\3I\end{smallmatrix}\right)$	(3I)29	ИПД
03	ИПА	I7	"5"	30	ИПС
04	"+"	I8	"X"	3I	"+"
05	ПП	I9	"+"	(34)32	ПД
06	32(34)	20	П5	33	Вычисление
07	"5"	2I	F L 0	⋮	f (X)
08	"X"	22	"00"		(X ⟷ ПД)
09	"+"	23	ИПВ	(34)	ИП5
I0	П5	24	"X"	(35)	X ⟶ Y
II	КПП7$\left(\begin{smallmatrix}ПП\\3I\end{smallmatrix}\right)$	25	"I"	(36)	В/О
I2	"8"	26	"8"		
I3	"X"	27	"÷"		

Ввод:

$n \longrightarrow$ П0	$\Delta \longrightarrow$ ПВ	29 $\longrightarrow$ П7
$x_0 - \frac{\Delta}{2}(1+\sqrt{0,6}) \longrightarrow$ ПА	$\frac{\Delta}{2}\sqrt{0,6} \longrightarrow$ ПС	

Приводим табл.5 , характеризующую относительную точность вычисления интегралов от некоторых стандартных функций по рассмотренным выше программам.

$\int_0^1 f(x)dx$

Таблица 5

f (x)	$\sqrt{x}$	x^8	e^{10x}	sin 10x	Число абсцисс *)
Метод прямоугольников	$2 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \cdot 10^{-2}$	$2,7 \cdot 10^{-2}$	$2,9 \cdot 10^{-2}$	I2
	$7,2 \cdot 10^{-4}$	$5,2 \cdot 10^{-3}$	$7,2 \cdot 10^{-3}$	$7,2 \cdot 10^{-3}$	24
	$4 \cdot 10^{-4}$	$2,3 \cdot 10^{-3}$	$3,2 \cdot 10^{-3}$	$3,2 \cdot 10^{-3}$	36
Симпсон	$2,9 \cdot 10^{-3}$	$8,0 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$2,9 \cdot 10^{-3}$	I2
	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$5,1 \cdot 10^{-5}$	$1,6 \cdot 10^{-4}$	$1,7 \cdot 10^{-4}$	24
	$5,6 \cdot 10^{-4}$	$1,1 \cdot 10^{-5}$	$3,3 \cdot 10^{-5}$	$3,3 \cdot 10^{-5}$	36
Гаусс 2	$7,4 \cdot 10^{-4}$	$5,3 \cdot 10^{-4}$	$1,6 \cdot 10^{-3}$	$2,0 \cdot 10^{-3}$	I2
	$2,6 \cdot 10^{-4}$	$3,4 \cdot 10^{-5}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$	24
	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$6,8 \cdot 10^{-6}$	$2,2 \cdot 10^{-5}$	$2,2 \cdot 10^{-5}$	36
Гаусс 3	$4,7 \cdot 10^{-4}$	$7,3 \cdot 10^{-6}$	$9,9 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$	I2
	$1,7 \cdot 10^{-4}$	$1,8 \cdot 10^{-7}$	$1,9 \cdot 10^{-6}$	$2,0 \cdot 10^{-6}$	24
	$9,1 \cdot 10^{-5}$	$9,0 \cdot 10^{-8}$	$4,1 \cdot 10^{-7}$	$2,7 \cdot 10^{-7}$	36

*) Имеется в виду число точек, в которых вычисляется подынтегральная функция.

Время вычисления указанных интегралов в зависимости от числа шагов и вида программы составляет 0,5 - 3,5 мин (калькулятор "БЗ-34").

Из приведенной таблицы следует, что программа вычислений по методу Гаусса ($\nu = 3$) обладает явным преимуществом по сравнению со всеми остальными программами. Её применение, по-видимому, и является наиболее целесообразным при численном интегрировании функций одной переменной.

Примечание. Во всех рассмотренных выше программах для суммирования использовался выделенный регистр памяти, что,однако, не является обязательным. Суммирование можно производить, используя лишь стековую память микрокалькулятора. При этом нужно соблюдать определенную осторожность при операциях, связанных с набором функции f (x). Так, после набора функции f (x) её значение и значение предыдущей суммы должны находиться в операционных регистрах X и Y . Преимуществом такого способа суммирования является некоторое сокращение числа шагов программы, а также высвобождение дополнительного регистра памяти,который использовался для накопления сумм.

Вычисление двукратных интегралов

Интегралы с фиксированными пределами, $\int_{x_0}^{x'}\int_{y_0}^{y'} F(x,y)\,dx\,dy$,

Проводя интегрирование по обеим переменным по методу Гаусса (ν = 2), получим следующую подпрограмму к программе, приведенной в табл.3 (см.табл.6).

Таблица 6

Адреса	Команды	Адреса	Команды	Адреса	Команды
2I	ПД	34	"+"	48	" ÷ "
22	Сх	35	ИПС	49	ИП5
23	$\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} n_y$ *)	36	ИП9	50	+
24		37	ИПI	5I	П5
25	П3	38	"X"	52	В/0
26	Сх	39	"+"	53	ПС
27	ИП3	40	ПП	54	Вычисление
28	ИП9	4I	"53"	⋮	F (x, y)
29	"X"	42	"+"		(x ↔ ПД)
30	ИП8	43	F L 3		(y ↔ ПС)
3I	"+"	44	"27"	(55)	В/0
32	ПП	45	ИП9		
33	"53"	46	"X"		
		47	"2"		

Ввод:

$\Delta_y \to$ П9	$y_0 - \frac{\Delta y}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \to$ П8

*) n_y - число шагов при интегрировании по переменной y . Если n_y - однозначное число,по адресу 28 заносится команда "К НОП".

Для параметров функции F (x, y) остается четыре регистра памяти, Rg 2, Rg 4, Rg 6, Rg 7. За счет некоторого удлинения программы можно высвободить и Rg I. При этом вместо каждой команды "ИП I" следует вставить последовательность трех команд: "3" ; "$F\sqrt{\ }$" ; "$F\frac{1}{x}$". Заметим также, что суммирование в подпрограмме проводится за счет стековой памяти.

Интегралы вида $\int\limits_{x_0}^{x'}\int\limits_{y_0}^{\varphi(x)} F(x,y)\,dx\,dy$.

Подпрограмма, аналогичная предыдущей (метод Гаусса, $\nu = 2$), представлена в следующей таблице.

Таблица 7.

Адреса	Команды	Адреса	Команды	Адреса	Команды
2I	ПД	(37)	"+"	(57)	ИП6
22	Вычисление	(38)	П6	(58)	ИПI
⋮	φ (x)	(39)	Cx	(59)	"X"
	(x ⟷ ПД)	(40)	ИП3	(60)	"+"
(23)	ИП8	(4I)	ИП6	(6I)	ПП
(24)	" − "	(42)	"X"	(62)	(74)
(25)	П6	(43)	ИПI	(63)	"+"
(26)	ИП9	(44)	"I"	(64)	F L 3
(27)	"+"	(45)	"+"	(65)	(40)
(28)	"2"	(46)	"2"	(66)	ИП6
(29)	"+"	(47)	"+"	(67)	"X"
(30)	П3	(48)	ИП6	(68)	"2"
(3I)	Cx	(49)	"X"	(69)	"÷"
(32)	X ⟷ Y	(50)	"−"	(70)	ИП5
(33)	К ИП3	(5I)	ИП8	(7I)	"+"
(34)	"+"	(52)	"+"	(72)	П5
(35)	ИП6	(53)	ПП	(73)	В/0
(36)	ИП3	(54)	(74)	(74)	ПС
		(55)	"+"	(75)	Вычисление
		(56)	ИПС	⋮	F (x,y)
					$(x \leftrightarrow$ ПД)
					$(y \leftrightarrow$ ПС)
				(76)	В/0

Ввод:	$y_0 \to$ П8	$\Delta_y^0 \to$ П9

Заметим, что при интегрировании по переменной y число шагов n_y не фиксируется заранее. Вводится лишь "затравочный" шаг Δ_y^0, который затем доопределяется таким образом, чтобы текущий интервал интегрирования по y, $(y_0, \varphi(x))$ содержал целое число шагов. Такая процедура позволяет существенно сократить время счета, хотя и приводит к некоторому увеличению объема программы. Для параметров функций $\varphi(x)$ и $F(x,y)$ выделяются регистры памяти Rg 2, Rg 4, Rg 7.

Вычисление интегралов вида $\int\limits_{x_0}^{x'}\int\limits_{y_0}^{\varphi(x)} F(x,y)\,dx\,dy$ методом Гаусса ($\nu = 2$), по-видимому, находится на пределе возможностей данного типа микрокалькуляторов. Это ясно уже из того, что для набора функций φ(x) и $F(x,y)$ остается в сумме лишь около двадцати шагов программы и всего три регистра памяти. В связи с этим представляет также интерес программа вычисления $\int\limits_{x_0}^{x'}\int\limits_{y_0}^{\varphi(x)} F(x,y)\,dx\,dy$ методом прямоугольников (табл.8). Обеспечивая меньшую точность вычислений (при данном времени счета), она в то же время имеет существенно меньший объем и, следовательно, накладывает меньше ограничений на вид функций φ(x) и $F(x,y)$.

Для параметров функций φ (x) и F (x, y) остаются свободными регистры памяти Rg I, Rg 2, Rg 4, Rg 6, Rg 7.

<u>Замечание</u>. При вычислении на микрокалькуляторах "Электроника Б3-34" выпуска I98I г., согласно инструкции, не допускается заканчивать подпрограмму операциями, соответствующими вычислению каких-либо функций содержимого регистра X. Если по программе это необходимо, следует перед командой "В/0" применить команду "К НОП". Микрокалькуляторы более поздних выпусков свободны от этих ограничений.

Таблица 8

Адреса	Команды	Адреса	Команды	Адреса	Команды
00	ИПД	(I6)	"+"	(33)	"+"
0I	ИПВ	(I7)	ИПС	(34)	F L 3
02	"+"	(I8)	ИП3	(35)	("28")
03	ПД	(I9)	" ÷ "	(36)	ИПС
04	Вычисление $\varphi(x)$ $(x \to \Pi D)$	(20)	ПС	(37)	"X"
⋮	…	(2I)	"2"	(38)	ИП5
		(22)	" ÷ "	(39)	"+"
(05)	ИП8	(23)	ИП 8	(40)	П5
(06)	"-"	(24)	X→Y	(4I)	F L 0
(07)	ПС	(25)	"-"	(42)	"00"
(08)	ИП9	(26)	ПА	(43)	ИПВ
(09)	" ÷ "	(27)	Cx	(44)	"X"
(I0)	" 2 "	(28)	ИПА	(45)	С/П
(II)	" +"	(29)	ИПС		
(I2)	П3	(30)	" + "		
(I3)	Cx	(3I)	ПА		
(I4)	" + "	(32)	Вычисление $F(x,y)$ $(y \to \Pi A,$ $x \to \Pi D)$ …		
(I5)	К ИП3	⋮			

Ввод:

$n_x \to$ П0	$\Delta x \to$ ПВ
$x_0 - \frac{\Delta x}{2} \to$ ПД	$\Delta_y^0 \to$ П9
$y_0 \to$ П8	

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные программы и оценка эффективности некоторых из них (табл.5) позволяют сделать четкий вывод: обращение к большой ЭВМ (класса ЕС или "БЭСМ - 6") в целом ряде случаев, когда речь идет о численном интегрировании, излишняя роскошь. Достаточно иметь на столе компактный и недорогой программируемый микрокалькулятор, чтобы во многих случаях (особенно это касается задач с одномерными интегралами) быстро и эффективно провести соответствующие вычисления.

Авторы признательны С.Г.Матиняну за интерес к работе и поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

I. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1970.

Рукопись поступила 15 августа 1983 г.

Редактор Л.П.Мукаян

Тех.редактор А.С.Абрамян

Заказ 347 Т-17984 Тираж 200

Препринт ЕФИ Формат издания 60x84/16

Подписано к печати 20/I-84г. 1.0 уч.-изд.л. Ц. 15 к.

Издано Отделом научно-технической информации

Ереванского физического института, Ереван 36, Маркаряна 2