

508628844

ВФИ-735(50)-84

**ЦЕНТРАЛЬНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
ИНФОРМАЦИИ И ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ПО АТОМНОЙ НАУКЕ И ТЕХНИКЕ**

Ц.А.АМАТУНИ

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЛИНИЙ
МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО**

ЕРЕВАН-1984

© Центральный научно-исследовательский институт информации
и технико-экономических исследований по атомной науке
и технике (ЦНИИИЭИИ) 1984

TS.A.AMATUNI

MONTE-CARLO SIMULATION OF ELECTROMAGNETIC SHOWERS

A general-purpose program ELSS-1 for Monte-Carlo simulation of high energy electromagnetic showers in inhomogeneous absorbers of arbitrary geometry has been written. The major processes and effects of e and γ interaction with matter, particularly the Landau-Pomeranchuk-Migdal effect, are taken into account in the simulation procedures. The simulation results are compared with experimental shower data. Some characteristics of shower detectors and electromagnetic showers for energies up to \dagger TeV are calculated.

Yerevan Physics Institute

Yerevan 1984

Ц.А. АМАТУНИ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЛИВНЕЙ
МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Создана универсальная программа ELSS -I, позволяющая моделировать методом Монте-Карло электромагнитные ливни высокой энергии в неоднородных поглотителях произвольной геометрии. В алгоритме моделирования детально учтены основные процессы и эффекты взаимодействия электронов и фотонов с веществом, в частности - эффект Ландау-Померанчука-Мигдала. Проведено сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными, а также рассчитаны некоторые характеристики ливневых детекторов и электромагнитных ливней в области энергий до 1 ТэВ.

Ереванский физический институт

Ереван 1984

I. Введение

Широкое применение ливневых детекторов для регистрации электронов и фотонов высокой энергии [1-6], обуславливает все большее развитие интереса к теоретическому изучению характеристик аннотационных ливней для проектирования и оптимизации электродетекторов e^- и γ .

Наиболее мощным численным методом изучения характеристик электромагнитных ливней является моделирование ливневого процесса методом Монте-Карло.

Метод позволяет:

- 1) сравнительно просто и с минимальными упрощениями учесть все основные процессы и эффекты взаимодействия ливневых частиц с средой,
- 2) изучить трехмерное развитие ливней в неоднородных поглотителях произвольной геометрии,
- 3) оценить флуктуации в ливнях.

Недостаток метода заключается в необходимости затраты сравнительно большого количества машинного времени.

Вопросу моделирования электромагнитных ливней посвящено работ (относительно полный список приведен в работе [8]), Программы моделирования, описанные в работах [7-9], выделяются детальным учетом основных элементарных процессов (см. табл. I).

В работе [7] наиболее полно и точно учтены все основные процессы, однако, к сожалению, программа [7] не является универсальной. С ее помощью были созданы обширные таблицы характеристик ливней (так называемая "книга ливней", [7]) в нескольких поглотителях при низких энергиях (в основном $\ll 10$ ГэВ). Хотя сама по себе информация в таблицах является почти исчерпывающей, она не всегда может быть использована на практике. Программа EGS-3 [8] является универсальной и очень удобной в обращении, однако диапазон энергий моделируемых ливней ограничен ($\lesssim 100$ ГэВ). В настоящее время на ускорителях и на станциях космических лучей функционируют и проектируются ливневые детекторы для регистрации e и γ с энергиями в несколько ТэВ и выше. Для моделирования ливней в этой области энергий необходимо учитывать эффект Ландау-Померанчука, который приводит к качественным изменениям в процессе развития ливня. В программе SIMEX1 [9] эффект Ландау-Померанчука учтен приближенно.

Нами создана универсальная программа моделирования электромагнитных ливней ELSS-1, в которой обобщен и развит опыт работ [7-9] (см. табл. I).

Статья построена следующим образом. В разделе 2 обсуждены физические процессы и алгоритмы моделирования, реализованные в программе, в разделе 3 приводится сравнение некоторых расчетных данных, полученных при помощи ELSS-1 с экспериментом,

а также результаты расчетов характеристик электромагнитных ливней и ливневых детекторов в области энергий до 1 ТэВ.

2. Основные физические процессы и алгоритмы моделирования

2.1. Общая схема моделирования

Как известно, прохождение электронов и фотонов через вещество является случайным ветвящимся процессом. Используя известные алгоритмы получения на ЭВМ случайных чисел с заданным распределением можно создать математическую модель ливня, эквивалентную, в пределах принятых приближений, реальному процессу. Приведем общую схему модели, не останавливаясь пока на некоторых деталях.

Частица в ЭВМ характеризуется набором чисел, задающих ее тип Q (0 - для γ , ± 1 - для e^\pm), энергию E , координаты (x, y, z) и направляющие косинусы (u, v, w) относительно координатных осей x, y, z . "Движение" частицы осуществляется путем приращения ее координат

$$(x, y, z)_{\text{new}} = (x, y, z)_{\text{old}} + t \cdot (u, v, w)_{\text{old}}, \quad (I)$$

где t - длина отрезка пути до очередного столкновения, которая моделируется по известному сечению взаимодействия (см. раздел 2.1.2). После этого, случайным образом, с вероятностью

$\sigma_{\text{tot}}^{(i)}(E) / \sigma_{\text{tot}}(E)$, где $\sigma_{\text{tot}}(E) = \sum_i \sigma_{\text{tot}}^{(i)}(E)$ - полное, а $\sigma_{\text{tot}}^{(i)}(E)$ - парциальное сечения, выбирается тип взаимодей-

ствия и согласно функции распределения, пропорциональной соответствующему дифференциальному сечению, разыгрываются энергии и углы рассеяния конечных частиц. По направляющим косинусам (u, v, w) начальной частицы и углу рассеяния θ, ϕ (θ - угол отлета вторичной частицы относительно направления движения начальной частицы, ϕ - равномерно распределено в интервале $(0, 2\pi)$) вычисляются направляющие косинусы (u', v', w') вторичной частицы [7]

$$(u', v', w') = (u, v, w) \cos \theta + (\vec{a} \cos \phi + \vec{b} \sin \phi) \sin \theta, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \left(\frac{u^2}{1+w} - 1, \frac{uv}{1+w}, u \right), \\ \vec{b} &= \left(\frac{uv}{1+w}, \frac{v^2}{1+w} - 1, v \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Для вычисления $\cos \phi$ и $\sin \phi$ выбираются два случайных числа r_1 и r_2 , равномерно распределенных в $(-1, +1)$ и $(0, 1)$, соответственно, так чтобы $r^2 = r_1^2 + r_2^2 < 1$; тогда

$$\cos \phi = (r_1^2 - r_2^2) / r^2, \quad \sin \phi = 2r_1 r_2 / r^2. \quad (4)$$

Так как ЭВМ в каждый данный момент времени моделирует перенос какой-нибудь одной частицы, то из вновь рожденных частиц отбирается одна - с наибольшей энергией (так называемая "текущая" частица, судьба которой будет прослеживаться дальше), а характеристики остальных частиц временно запоминаются в стеке,

организованном по принципу ЛРФ^{*}). Перенос "летающей" частицы моделируется до тех пор, пока она не поглотится или выйдет за пределы поглотителя. Потом по очереди и аналогичным образом моделируется судьба частиц из стека. Моделирование ливня заканчивается после того, как завершён перенос последней частицы из стека.

2.1.1. "Дискретные" и "непрерывные" столкновения

Выше приведенная идеология без существенных изменений применима для моделирования переноса фотонов. Для электронов определяющую роль в процессе переноса играют упругие и неупругие рассеяния на ядрах и электронах среды. Однако, сечения этих взаимодействий очень велики (и к тому же не совсем точно известны) и поэтому представляется нереальным моделирование всех актов взаимодействия. В связи с этим взаимодействия обычно подразделяются на два класса - "дискретные" и "непрерывные" введением энергий обрезания E_{min} ($T_{min} = E_{min} - mc^2$) - для электронов и K_{min} - для фотонов. Обычно $E_{min} \approx 1$ МэВ, $K_{min} \approx 0,1$ МэВ.

Столкновения электронов с передачей энергии $> T_{min}$ атомным электроном называются "дискретными" и моделируются явно по известным сечениям (см. разделы 2.2.2, 2.2.3).

Далекое столкновение с передачей энергии $< T_{min}$ на отрезке пути между двумя "дискретными" столкновениями группируются и

*) Так называемая лексикографическая обработка дерева ветвящегося процесса. В данном случае она гарантирует, что длина стека не превышает величины $N \approx \log_2(E_{max}/E_{min})$, где E_{max} и E_{min} максимальные и минимальные энергии в процессе моделирования.

$$t_1 = -\ln(r) / \bar{\sigma}_{\text{tot}}(E), \quad (6)$$

где r - случайное число, равномерно распределенное в интервале $(0,1)$.

Мы используем метод достаточно быстрого моделирования процессов взаимодействия, который позволяет избежать вычисления или использования таблиц $\bar{\sigma}_{\text{tot}}(E)$. Все дискретные взаимодействия, учтенные нами, являются процессами типа $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$, причем частица 2 покоится^{*}), так что достаточно промоделировать энергию одной из конечных частиц. Остальные кинематические переменные конечных частиц определяются из законов сохранения энергии и импульса. Допустим, если величина E_3 моделируется, то

$$E_4 = E_1 + (m_2) - E_3, \\ \cos \theta_{3,4} = \frac{m_{4,3}^2 + m_1^2 + m_2^2 - m_{3,4}^2 + 2(E_1 + m_2)E_{3,4} - 2E_1 m_2}{2|\vec{P}_1||\vec{P}_{3,4}|}, \quad (7)$$

ϕ_3 - равномерно распределено в $(0, 2\pi)$,

$$\phi_4 = 2\pi - \phi_3.$$

Здесь $\theta_{3,4}$ углы частиц 3,4 относительно направления движения начальной частицы, $\phi_{3,4}$ - соответствующие полярные углы, \vec{P}_{1-4} импульсы частиц 1-4.

Пусть $x = E_3 / E_0$, где E_3 - энергия одной из вторичных частиц, E_0 - начальная энергия, тогда взаимодействие будет характеризоваться дифференциальным сечением $d\bar{\sigma}(E_0, x) / dx$.

^{*}) Мы пренебрегаем отдачей ядра и углами рассеяния ($\sim mc^2/E$) при тормозном излучении и рождении пары.

Иногда всегда удается представить $d\sigma/dx$ в виде разложения Лагранжа [7,10]

$$\frac{d\sigma(E_0, x)}{dx} = \sum_{i=1}^K (\hat{\sigma}_i(E_0)) \cdot [S_i(E_0, x)] \cdot \{R_i(E_0, x)\} \quad (8)$$

причем,

- 1) $\hat{\sigma}_i(E_0) > 0$, либо не зависит от энергии, либо очень легко вычисляется,
- 2) $\hat{\sigma}_i(E_0, x) > 0$, $\int S_i(E_0, x) dx = 1$ является простой функцией плотности распределения (ф.п.р.),
- 3) $0 < R_i(E_0, x) < 1$, так называемая функция режекции легко вычисляется.

Заметим, что

$$\hat{\sigma}_{tot}(E_0) = \int \frac{d\sigma(E_0, x)}{dx} \cdot dx < \hat{\sigma}_{tot}(E_0) \equiv \sum_{i=1}^K \hat{\sigma}_i(E_0). \quad (9)$$

Суть метода заключается в использовании везде, где это необходимо, псевдосечения $\hat{\sigma}_{tot}(E_0)$ вместо истинного полного сечения $\sigma_{tot}(E_0)$ и следующего алгоритма моделирования:

- 1) вычисляется $\hat{\sigma}_{tot}(E_0)$;
- 2) моделируется псевдопробег $t_1 = -\ln(r)/\hat{\sigma}_{tot}(E_0)$, где r случайное число, равномерно распределенное в $(0,1)$, и частица, переносится на расстояние t_1 в направлении первоначального движения;
- 3) с вероятностью $\hat{\sigma}_i(E_0)/\hat{\sigma}_{tot}(E_0)$ выбирается номер i под-распределения в разложении (8) и величина X разыгрывается согласно ф.п.р. $S_i(E_0, x)$ (например, методом обратной функции);
- 4) полученное значение X принимается с вероятностью $R_i(E_0, x)$

(т.е. разыгрывается r равномерно распределенное в $(0,1)$), если $r < R_i(E_0, x)$, значение x принимается, в противном случае - отвергается) и согласно (7) определяются энергии и углы вторичных частиц;

5) в случае отвергания, процедура повторяется с пункта 2.

Можно показать, что окончательный пробег $t = t_1 + t_2 + \dots + t_p$ (p -ое испытание окончилось принятием) распределен по закону (5). Когда имеется несколько конкурирующих процессов (рождение пары, комптон-эффект, фотоэффект), то модифицированный пробег вычисляется по формуле

$$t_1 = -\ln(r) / \sum_{j=1}^N \hat{\sigma}_{tot}^{(j)}(E_0).$$

где N - число учтенных процессов, $\hat{\sigma}_{tot}^{(j)}$ - их псевдосечения.

Тип взаимодействия выбирается случайным образом с вероятностью $\hat{\sigma}_{tot}^{(i)} / \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_{tot}^{(i)}(E_0)$.

Для электронов ситуация несколько сложнее, как из-за непрерывных потерь энергии на пути до очередного дискретного столкновения ($\hat{\sigma}_{tot}^{(i)}(E_0)$ изменяется во время движения электрона), так и многократного рассеяния (истинный путь между двумя дискретными столкновениями является криволинейным). Однако анализ величины и энергетической зависимости сечения $\sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_{tot}^{(i)}(E_0)$ для электронов показал, что оно достаточно велико ($\sim 20 \times 10^{-16}$) и практически не зависит от энергии, так что без существенной потери точности нами использована следующая схема моделирования переноса электронов:

1. величина $\hat{\sigma}_{tot}^{(i)}(E_0)$ моделируется псевдопробег

$$\tau = -\ln(n) / \sum_{i=1}^N \dot{E}_{\text{tst}}^{(i)}(E_0),$$

2) моделируются ионизационные потери ($E_0 \rightarrow E_0 - \delta E$) и упругое рассеяние ($u, v, w \rightarrow u', v', w'$) на пути $t'_1 = \min R(E_0, E_{\min})$, где $R(E_0, E_{\min})$ — средний пробег для замедления до энергии E_{\min} ;

3) частица переносится на расстояние t'_1 вдоль первоначального направления движения

$$(x, y, z) \rightarrow (x, y, z) + t'_1 (u, v, w).$$

(в случае $t'_1 = R(E_0, E_{\min})$ перенос заканчивается);

4) выбирается тип взаимодействия и моделируется величина χ .

В случае принятия значения χ вычисляются энергии и углы вторичных частиц. В случае отвергания процедура повторяется с пункта 1.

2.2. Сечения физических процессов

Процессы, учтенные в программе ELSS-1, перечислены в табл. I. Все они общеизвестны, тем не менее мы приведем подробные формулы для определенности. Дифференциальные сечения мы будем приводить в виде разложения (8), разделяя множители круглыми, квадратными и фигурными скобками.

Введем некоторые обозначения, которые часто будут встречаться в дальнейшем: $E, T = E - mc^2, \beta = (1 - m^2c^4/E^2)^{1/2}, \gamma = E/mc^2$ — полная энергия, кинетическая энергия, скорость и лоренц-фактор электрона (позитрона), mc^2 — масса покоя электрона, K — энер-

гия фотона, $E_{min} (T_{min} = E_{min} - mc^2)$, K_{min} - энергии обрезания для электронов и фотонов. Величины, относимые к начальной частоте, будут отмечаться нулевым индексом. Для облегчения написания последующих формул будем предполагать, что вещество состоит из атомов одного сорта (в [12] используется обозначение, принятое для среды с обобщенным атомным номером), тогда ρ , Z , e - плотность, заряд ядра и атомов, все вычислено на $\rho = N_0 \rho_e Z/A$ - число электронов в единице объема, $N_0 = 6.02 \cdot 10^{23}$ - число Авогадро, A - атомный вес, ρ_e - плотность электронов, $\rho_e = \rho_e^0 \rho$ - относительная плотность электронов, ρ_e^0 - относительная плотность электронов в веществе.

Введем следующие обозначения: $\beta = v/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, $\beta_0 = v_0/c$, $\gamma_0 = 1/\sqrt{1-\beta_0^2}$, $\beta_{rel} = \beta - \beta_0$, $\gamma_{rel} = 1/\sqrt{1-\beta_{rel}^2}$, $\beta_{rel}^2 = \beta^2 - \beta_0^2$, $\gamma_{rel}^2 = \gamma^2 - \gamma_0^2$, $\beta_{rel} = \beta_0 \gamma_0 (\beta - \beta_0)$, $\gamma_{rel} = \gamma_0 (\gamma - \gamma_0)$, $\beta_{rel} = \beta_0 \gamma_0 (\beta - \beta_0)$, $\gamma_{rel} = \gamma_0 (\gamma - \gamma_0)$, $\beta_{rel} = \beta_0 \gamma_0 (\beta - \beta_0)$, $\gamma_{rel} = \gamma_0 (\gamma - \gamma_0)$.

Введем также обозначения: $\beta_{rel} = \beta - \beta_0$, $\gamma_{rel} = 1/\sqrt{1-\beta_{rel}^2}$, $\beta_{rel}^2 = \beta^2 - \beta_0^2$, $\gamma_{rel}^2 = \gamma^2 - \gamma_0^2$, $\beta_{rel} = \beta_0 \gamma_0 (\beta - \beta_0)$, $\gamma_{rel} = \gamma_0 (\gamma - \gamma_0)$, $\beta_{rel} = \beta_0 \gamma_0 (\beta - \beta_0)$, $\gamma_{rel} = \gamma_0 (\gamma - \gamma_0)$, $\beta_{rel} = \beta_0 \gamma_0 (\beta - \beta_0)$, $\gamma_{rel} = \gamma_0 (\gamma - \gamma_0)$.

$$dN_{\omega} = \frac{dN_{\omega}^0}{\gamma_{rel}^2} \left(\frac{d\omega}{\omega} \right)^2 \left(\frac{d\theta}{\theta} \right)^2 \left(\frac{d\theta_0}{\theta_0} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}}{\theta_{rel}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^2}{\theta_{rel}^2} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^4}{\theta_{rel}^4} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^6}{\theta_{rel}^6} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^8}{\theta_{rel}^8} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{10}}{\theta_{rel}^{10}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{12}}{\theta_{rel}^{12}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{14}}{\theta_{rel}^{14}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{16}}{\theta_{rel}^{16}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{18}}{\theta_{rel}^{18}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{20}}{\theta_{rel}^{20}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{22}}{\theta_{rel}^{22}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{24}}{\theta_{rel}^{24}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{26}}{\theta_{rel}^{26}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{28}}{\theta_{rel}^{28}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{30}}{\theta_{rel}^{30}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{32}}{\theta_{rel}^{32}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{34}}{\theta_{rel}^{34}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{36}}{\theta_{rel}^{36}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{38}}{\theta_{rel}^{38}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{40}}{\theta_{rel}^{40}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{42}}{\theta_{rel}^{42}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{44}}{\theta_{rel}^{44}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{46}}{\theta_{rel}^{46}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{48}}{\theta_{rel}^{48}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{50}}{\theta_{rel}^{50}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{52}}{\theta_{rel}^{52}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{54}}{\theta_{rel}^{54}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{56}}{\theta_{rel}^{56}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{58}}{\theta_{rel}^{58}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{60}}{\theta_{rel}^{60}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{62}}{\theta_{rel}^{62}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{64}}{\theta_{rel}^{64}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{66}}{\theta_{rel}^{66}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{68}}{\theta_{rel}^{68}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{70}}{\theta_{rel}^{70}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{72}}{\theta_{rel}^{72}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{74}}{\theta_{rel}^{74}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{76}}{\theta_{rel}^{76}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{78}}{\theta_{rel}^{78}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{80}}{\theta_{rel}^{80}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{82}}{\theta_{rel}^{82}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{84}}{\theta_{rel}^{84}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{86}}{\theta_{rel}^{86}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{88}}{\theta_{rel}^{88}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{90}}{\theta_{rel}^{90}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{92}}{\theta_{rel}^{92}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{94}}{\theta_{rel}^{94}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{96}}{\theta_{rel}^{96}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{98}}{\theta_{rel}^{98}} \right)^2 \left(\frac{d\theta_{rel}^{100}}{\theta_{rel}^{100}} \right)^2$$

Когда длина формирования намного меньше среднего расстояния d между атомами, то можно считать, что взаимодействие происходит с изолированным атомом. В этом случае справедливы формулы Бете-Гайтлера [12] для сечений тормозного излучения и рождения пар.

Когда же $\ell_f \gg d$, то в процесс взаимодействия вовлекаются все атомы среды на пути ℓ_f . Упругие рассеяния на атомах и тормозного излучения приводят к уменьшению сечений тормозного излучения и рождения пар (эффект Ландау-Померанчука) по сравнению с сечениями этих процессов на изолированном атоме. Для излучения очень мягких фотонов необходимо также учитывать поляризацию среды [13] (эффект плотности). Из (II) видно, что влияние среды на сечение рождения пары начинает сказываться только при достаточно больших K_0 , тогда как для тормозного излучения мягких фотонов $K \ll E_0$, $E_0 - K$ оно может проявляться и при достаточно низких энергиях начального электрона.

А. Сечение Бете-Гайтлера с учетом эффекта плотности

Введем переменные

$$x = E^{(+)} / K_0; \quad \delta = 100 mc^2 \frac{Z^{-1/3}}{x(1-x)K_0} \quad - \text{ для рождения пары,} \quad (12)$$

$$y = K / E_0; \quad \delta = 100 mc^2 \frac{Z^{-1/3} y}{(1-y)E_0} \quad - \text{ для тормозного излучения,}$$

тогда дифференциальные сечения рождения пары и тормозного излучения (сечение Б-Г) будут иметь вид [12]

$$\frac{d\sigma_p(K_0, x)}{dx} = (\sigma_1^{(p)}) [12(x-1/2)^2] \{A(\delta)\} + (\sigma_2^{(p)}) \cdot [1] \cdot \{C(\delta)\} \quad (13)$$

$$\frac{d\sigma_B(E_0, y)}{dy} = (\hat{\sigma}^{(B)}) \left[\frac{2}{Z n \frac{1+w^2}{w_0^2}} \cdot \frac{f_3(y)}{y} \right] \{B(1-y)A(\delta) + y^2 B(\delta)\}, \quad (14)$$

где

$$\sigma_1^{(p)} = (1/9 + 1/108 Lr) / x_0; \quad \sigma_2^{(p)} = (2/3 - 1/36 Lr) / x_0, \quad (15)$$

$$\delta = 4/3 + 1/9 L_r, \quad \delta^{(B)} = \ln\left(\frac{1+W_0^2}{W_0^2}\right) \cdot F(E_0, z) / 2\chi_0 \quad (16)$$

Радиационная длина χ_0 дается выражением

$$\chi_0 = [4N_A \rho \alpha r_0^2 z(z+\xi) L_r / A]^{-1}, \quad L_r = \ln(184.15 z^{-2/3}) - f_c(z), \quad (17)$$

где

$$\xi = \ln(1194 z^{-2/3}) / L_r. \quad (18)$$

поправка, приближенно учитывающая вклад неупругого взаимодействия с атомными электронами.

Кулоновская поправка $f_c(z)$ вычисляется по формуле [8]

$$f_c(z) = \alpha^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i^2 + \alpha^2)} \approx \alpha^2 [(1 + \alpha^2)^{-1} + 0,20206 - 0,0369\alpha^2 + 0,0083\alpha^4 - 0,002\alpha^6], \quad (19)$$

где $\alpha = \alpha z$.

Множитель

$$f_s(y) = \frac{y^2}{y^2 + W_0^2}, \quad W_0^2 = \left(\frac{\hbar \omega_p}{mc^2}\right)^2 = \frac{1}{9\pi} n r_0 \lambda_0^2, \quad (20)$$

где ω_p - плазменная частота, представляет собой эффект плотности среды [13] и возникает при учете поляризации среды, существенном для излучения мягких фотонов. Спектр мягких тормозных фотонов ведет себя $\sim y$ (в отличие от расходящегося спектра $1/y$ для излучения на изолированном ядре).

Функции A , B , C , учитывающие экранирование поля ядра атомными электронами, даются выражениями:

$$A(\delta) = \frac{3\varphi_1(\delta) - \varphi_2(\delta) + 8[L_r - \varphi_1(0)/4]}{3\varphi_1(0) - \varphi_2(0) + 8[L_r - \varphi_1(0)/4]}, \quad (21)$$

$$B(\delta) = \frac{\varphi_1(\delta) + 4[L_r - \varphi_1(0)/4]}{\varphi_1(0) + 4[L_r - \varphi_1(0)/4]}, \quad (22)$$

$$C(\delta) = \frac{3\varphi_1(\delta) + \varphi_2(\delta) + 16[L_r - \varphi_1(0)/4]}{3\varphi_1(0) + \varphi_2(0) + 16[L_r - \varphi_1(0)/4]}, \quad (23)$$

где [12]

$$\varphi_1(\delta) = 4 \ln 184,15 - 2 \ln(1 + (0,55846\delta)^2) - 4[1 - 0,6e^{-0,9\delta} - 0,4e^{-1,5\delta}], \quad (24)$$

$$\varphi_2(\delta) = \varphi_1(\delta) - \frac{2}{3}[1 + 6,5\delta + 6\delta^2]^{-1}. \quad (25)$$

Легко проверить, что при полном экранировании ($\delta \rightarrow 0$) функции A , B , C - максимальны - A , B , $C \equiv 1$ и монотонно уменьшаются с ростом δ .

В заключение этого пункта отметим те приближения, которые положены в основу (13) и (14) и допущены нами.

1. Формулы (13) и (14) верны в случае, когда все частицы, участвующие в реакции, релятивистские - $E^{(\pm)}$, E_0 , $E_0 - k \gg mc^2$. Для тормозного излучения нерелятивистская поправка имеет вид [7,14]

$$F(E_0, z) = (1 + 3(\alpha z)^{1/2} mc^2/E_0).$$

Для сечения (13) мы не используем поправок, так как оно существенно отличается от точного только вблизи порога, где вклад процесса рождения пары в полное сечение χ - квантов мал.

2. В (13) и (14) приближенно учтен вклад от взаимодействий с атомными электронами (простой заменой $z^2 \rightarrow z(z + \xi)$). Точный учет этого вклада (зависящего от $\delta z^{-1/3}$) не представляет принципиальной трудности [12], однако усложняет алгоритм выборки из этих распределений.

3. Для функции $\varphi_1(\delta)$ используется следующая приближенная формула

$$\varphi_1(\delta) = \begin{cases} 4 \ln 184 \cdot 5 - 4,246\delta + 1,036\delta^2 & \text{при } \delta < 1 \\ 20,514 - 4,278 \ln(\delta + 0,952) & \text{при } \delta > 1 \end{cases} \quad (26)$$

и $\varphi_{1,2}(\delta) \equiv 0$ при $\varphi_{1,2}(\delta) < 0$.

Б. Сечения Ландау-Померанчука-Мигдала

Сечения рождения пары и тормозного излучения с учетом эффекта Ландау-Померанчука (сечения Л-П-М) даются выражениями [15] *)

$$\frac{d\sigma_p(\kappa_0, x)}{dx} = (G_1^{(P)}) [12(x - 1/2)^2] \{A'(s)\xi(s)\} + (G_2^{(P)}) [1] \{C'(s)\xi(s)\}, \quad (27)$$

*) Мы используем несколько иную запись, отличающуюся от принятой в работе [15]; $A'(s) \equiv \Phi(s)$, $B'(s) \equiv [2\Phi(s) + G(s)]/3$, $C'(s) \equiv [\Phi(s) + G(s)]/2$, где $\Phi(s)$ и $G(s)$ - функции, определенные в работе [15].

$$\frac{d\sigma_B(E_0, y)}{dy} = (\sigma^{(B)}) \left[\frac{2}{\ln \frac{1+W_0^2}{W_0^2}} \frac{f_s(y)}{y} \right] \left\{ B(1-y) B'(s) \xi(s) + y^2 C'(s) \xi(s) \right\}, \quad (28)$$

где

$$S = \left[\frac{E_{LPM}}{4K_0} \cdot \frac{1}{x(1-x)} \cdot \frac{1}{\xi(s)} \right]^{1/2} \quad \text{для рождения пары,} \quad (29)$$

$$S = \left[\frac{E_{LPM}}{4E_0} \cdot \frac{y}{1-y} \cdot \frac{1}{\xi(s)} \right]^{1/2} \quad \text{для тормозного излучения,}$$

$$E_{LPM} = \frac{\alpha^2}{8\pi r_0} mc^2 X_0 \approx 3,84 \cdot X_0 (\text{см}), \text{ ТэВ} \quad (30)$$

$$\xi(s) = \begin{cases} 2 & 0 \leq s \leq S_1 = (Z^{1/3}/184,15)^2 \\ 1 + \ln s / \ln s_1 & S_1 \leq s \leq 1 \\ 1 & 1 \leq s \end{cases} \quad (31)$$

для функций $A'(s)$, $B'(s)$, $C'(s)$ (см. табл.2) мы используем следующие приближенные выражения (точность $\approx 1\%$):

$$\begin{aligned} A'(s) &= 1 - [1 + 6s + 17,15s^2 + 29,28s^3 + 52,95s^4]^{-1}, \\ B'(s) &= 1 - [1 + 4s + 17,75s^2 + 3,85s^3 + 54,75s^4]^{-1}, \\ C'(s) &= 1 - [1 + 3s + 17,07s^2 + 5,08s^3 + 44,84s^4]^{-1}, \end{aligned} \quad (32)$$

при $0 \leq s < 1$ и $A' = B' = C' = 1$ при $s \gg 1$. Остальные обозначения в формулах (27) и (28) прежние.

Переменная S по порядку величины равна отношению угла рассеяния при тормозном излучении или рождении пары ($\sim mc^2/E_0$ или $\sim mc^2/K_0$) к углу многократного рассеяния, набираемого на пути, равном длине формирования. Как это видно из табл.2 и формул (13,14) и (27,28), при $S \approx 1$ сечение Л-П-М переходит

в полностью экранированные сечения Б-Г. Условие $S=1$ фактически определяет энергию, при которой начинает проявляться эффект Ландау-Померанчука. Для процесса рождения пары эффект начинает проявляться для $x=1/2$ при $K_0 > E_{LPM}$. Для тормозного излучения эффект Л-П-М существенен при всех энергиях, а для $y=1/2$ наступает при $E_0 > 4 E_{LPM}$.

Уравнения (29) задают S в неявном виде. Мы используем следующий приближенный метод нахождения S , обеспечивающий точность $\approx 0,05\%$ [16]. Сначала вычисляется

$$\bar{S} = \frac{E_{LPM}}{4K_0} \cdot \frac{1}{x(1-x)} \quad - \text{рождение пары} \quad (33)$$

$$\bar{S} = \frac{E_{LPM}}{4E_0} \cdot \frac{y}{1-y} \quad - \text{тормозное излучение}$$

далее

$$h = h(\bar{S}) = \ln \bar{S} / \ln 2s_1^2, \quad (34)$$

$$\xi(\bar{S}) = \begin{cases} 2, & 0 < \bar{S} < 2s_1^2 \\ 1 + h - 0,16(1-h)h(2-h) / \ln 2s_1^2, & 2s_1^2 < \bar{S} < 1 \\ 1, & 1 < \bar{S} \end{cases} \quad (35)$$

тогда

$$S = \bar{S} [\xi(\bar{S})]^{-1/2}. \quad (36)$$

В нашей записи (см. формулы (13,14) и (27,28) сечения Б-Г и Л-П-М отличаются только функциями режекции и переходят друг в друга при $S \approx 1$, поэтому моделирование процессов тормозного излучения или рождения пары осуществляется следующим образом:

разыгрываются величины x или y , затем вычисляется \bar{S} - при $\bar{S} \gg 1$ дальнейшее моделирование (принятие или режекция) проводится согласно сечениям Б-Г, а при $\bar{S} < 1$ по сечениям Л-П-М.

В ряде работ в качестве функций режекции используются $\xi(s)$, $B'(s)\xi(s)$, $C'(s)\xi(s)$ (см. напр., [7,9]). Такой выбор функций режекции без должной нормировки неверен, так как для некоторой области значений S эти функции становятся больше единицы.

2.2.2. Электрон-электронное рассеяние

Порог дискретного e^-e^- рассеяния - $E_t = 2E_{min} - mc^2$. Дифференциальное сечение рассеяния дается формулой Мёллера

$$\frac{d\hat{\sigma}_M(E_0, x)}{dx} = (\hat{\sigma}_M) \left[\frac{x_{min}}{1-2x_{min}} \cdot \frac{1}{x^2} \right] \left\{ \frac{4}{9} \left[1 + \left(\frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0} x \right)^2 + \frac{x}{1-x} \left(\frac{x}{1-x} - \frac{2\gamma_0 - 1}{\gamma_0^2} \right) \right] \right\}, \quad (37)$$

где

$$\hat{\sigma}_M = 2\pi r_0^2 n \frac{mc^2}{T_{min}} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{1-2x_{min}}{\beta_0^2} \quad (38)$$

$$x = T/T_0, \quad x_{min} = T_{min}/T_0 \ll x \ll 1/2, \quad (39)$$

а T - кинетическая энергия электрона отдачи (электрона с меньшей энергией). В работах [7,8] используется функция режекции отличающаяся от принятой нами (см. выражение в фигурных скобках формулы (37)) фактором $\frac{9}{4} \frac{1-2x_{min}}{\beta_0^2}$. Легко проверить, что такая функция принимает значение больше 1 и не может быть использована в качестве функции режекции.

2.2.3. Позитрон-электронное рассеяние

Дифференциальное сечение e^+e^- рассеяния дается формулой Баба

$$\frac{d\hat{\sigma}_{\text{Bh}}(E_0, x)}{dx} = (\hat{\sigma}_{\text{Bh}}) \left[\frac{x_{\text{min}}}{1-x_{\text{min}}} \cdot \frac{1}{x^2} \right] \left\{ 1 - \beta_0^2 \times (B_1 - x(B_2 - x(B_3 - xB_4))) \right\} \quad (40)$$

где

$$\hat{\sigma}_{\text{Bh}} = 2\pi r_0^2 n \frac{mc^2}{T_{\text{min}}} \frac{1-x_{\text{min}}}{\beta_0^2}, \quad (41)$$

$$x = T^{(-)}/T_0, \quad x_{\text{min}} = T_{\text{min}}/T_0 \leq x \leq 1, \quad (42)$$

а $T^{(-)}$ - кинетическая энергия электрона отдачи. Константы B_{1-4} имеют вид

$$\begin{aligned} y &= (1 + \delta_0)^{-1}, \\ B_4 &= (1 - 2y)^3, \\ B_3 &= B_4 + (1 - 2y)^2, \\ B_2 &= (1 - 2y)(3 + y^2), \\ B_1 &= 2 - y^2. \end{aligned} \quad (43)$$

В работах [7, б] фактор $(1-x_{\text{min}})/\beta_0^2$ внесен в функцию режекции, что приводит к тому, что она принимает значения, большие чем 1 при малых T_{min} и T_0 и, следовательно, является не приемлемой.

2.2.4. Двухфотонная аннигиляция позитронов

При аннигиляции позитрона с энергией $E_0 > E_{\text{min}}$ энергия фотона с меньшей энергией разыгрывается согласно дифференциаль-

где

$$\frac{d\hat{\sigma}_c}{dx} = (\hat{\sigma}_c) \left[\frac{1}{\gamma_0} \frac{1}{1 + 2\gamma_0} + \frac{1}{\gamma_0} \left(\frac{1}{\gamma_0} - \frac{1}{1 + 2\gamma_0} \right) \gamma_0 x \right] \quad (46)$$

где

$$\hat{\sigma}_c = 2\pi r_0^2 \frac{1}{\gamma_0} \left(\frac{1}{\gamma_0} - \frac{1}{1 + 2\gamma_0} \right) \quad (47)$$

$$X_{\text{max}} = \left[\gamma_0 - 1 + \sqrt{\gamma_0^2 + 2} \right]^{-1} \ll x = \frac{\kappa}{2\gamma_0^2 + 1} \ll \left[\gamma_0 - 1 + \sqrt{\gamma_0^2 + 2} \right]^{-1} \quad (48)$$

Принимается, что не проанализированные возмущения, часть которых заключена в кванте энергии образуют $\vec{E}_{\text{вн}}$, которая выделяется, выделяя в точке энергию $E_0 = mc^2$ и распадается в два фотона с энергиями mc^2 каждый и движущиеся изотропно в противоположные стороны.

2.2.5. Комptonовское рассеяние

Энергия фотона κ после комptonовского рассеяния разлагается согласно дифференциальному сечению Клейна-Нисины

$$\frac{d\hat{\sigma}_c(\kappa_0, x)}{dx} = (\hat{\sigma}_c) \left[\frac{1}{\ln(1 + 2\gamma_0)} \cdot \frac{1}{x} \right] \left\{ \frac{1}{2\gamma_0^2 x} \left[1 + (\gamma_0^2 - 2\gamma_0 - 2)x + (1 + 2\gamma_0)x^2 + \gamma_0^2 x^3 \right] \right\} \quad (47)$$

где

$$\hat{\sigma}_c = 2\pi r_0^2 \frac{\ln(1 + 2\gamma_0)}{\gamma_0}, \quad \gamma_0 = \kappa_0 / mc^2, \quad (48)$$

$$(1 + 2\gamma_0)^{-1} \ll x = \frac{\kappa}{\kappa_0} \ll 1. \quad (49)$$

2.2.6. Фотоэффект

Для вычисления полного сечения фотоэффекта на К - оболочке мы используем приближенные формулы [7], основанные на результатах работ [17], согласно которым

$$\sigma_{ph} \equiv \hat{\sigma}_{ph} = \frac{\sigma_0}{\gamma_0} [\sigma_1 + \sigma_2/\gamma_0 + \sigma_3/\gamma_0^2] \cdot f_{cor}, \quad (50)$$

где $\gamma_0 = K_0/mc^2$, K_0 - энергия фотона, $\sigma_0 = 4\pi r_0^2 n(\alpha z)^4$, σ_{1-3} и f_{cor} , зависящие от $\alpha = \alpha z$ функции, представленные в табл. 6. Множитель f_{cor} приближенно учитывает вклад от поглощения на L - оболочке. Точность приведенной формулы $\approx 1\%$ при $K_0 > 1$ МэВ и $\sim 10\%$ при $K_0 < 1$ МэВ.

Энергия фотоэлектрона находится из (считается, что он движется в том же направлении, что и фотон)

$$E = K_0 + mc^2(1 - \alpha^2)^{1/2}. \quad (51)$$

2.2.7. Ионизационные потери энергии

Средние потери энергии на единице пути в столкновениях с передачей энергии $T < T_{min}$ (напомним, что столкновения с передачами $T > T_{min}$ моделируются явно, см. разделы 2.2.2 и 2.2.3) даются выражением [7, 8, 18]

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)^{\pm} = \frac{2\pi n r_0^2 mc^2}{\beta_0^2} \left[\rho n \frac{2\Delta(\gamma_0^2 - 1)}{(I/mc^2)^2} - \beta_0^2 + f^{\pm}(\gamma_0, \Delta) - \delta(\gamma_0) \right], \quad (52)$$

где знаки \pm соответствуют позитронам и электронам (это различие обусловлено вкладом близких столкновений, разным для

e^+ и e^-), $\Delta = T_{\min}/mc^2$ для e^+ и $\Delta = \min(T_{\min}/mc^2, (\gamma_0 - 1)/2)$ для e^- .

$$f^-(\gamma, \Delta) = \frac{x}{1-x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta}{\gamma} \right)^2 + \left[1 + \frac{2\gamma-1}{\gamma^2} \right] \ln(1-x), \quad (53)$$

$$f^+(\gamma, \Delta) = -\frac{1}{12} \beta^2 x (12B_1 - 6B_2x + 4B_3x^2 - 3B_4x^3)^*, \quad (54)$$

где $x = \Delta/(\gamma-1)$, а B_{1-4} даются формулами (43).

Средний ионизационный потенциал I вычисляется по формуле [19]

$$I = Z(9,76 + 58,8Z^{-1,19}) \text{ эВ} \quad (55)$$

для $Z \geq 13$, а для $Z \leq 12$ используются значения, представленные в табл.4.

Поправка на эффект плотности δ - равна

$$\delta = \begin{cases} 0 & , x \ll x_0 \\ 4,606(x-x_0) + 4,606(x_0-x_0) \left(\frac{x_1-x}{x_1-x_0} \right)^m & , x_0 \ll x \ll x_1 \\ , & , x_1 \ll x \end{cases} \quad (56)$$

где $x = \frac{1}{2} \log_{10}(\gamma^2 - 1)$, $x_0 = c/4,606$, $c = 2 \ln(I/\hbar\omega_p) + 1$.

Мы используем общий метод определения констант m , x_1 , x_0 , предложенный в работе [19] (см. табл.5), обеспечивающий точность определения dE/dt не хуже 1-2%.

Соотношение (50) определяет средние ограниченные потери энергии на единице пути. Потери энергии \mathcal{E} при прохождении пути t флуктуируют как из-за флуктуаций числа столкновений, так и величины энергии, теряемой при каждом столкновении.

* выражение для f^+ , приведенное в [8], содержит неточность.

Функция распределения ϵ дается выражением [20]

$$F(t, \epsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \exp[J(q, \epsilon, t)] dq, \quad (57)$$

где

$$J(q, \epsilon, t) = q \left(\epsilon - t \left(\frac{dE}{dt} \right) \right) - t \int_0^{T_{\min}} \frac{d\delta}{dt} (1 - \tau_q - e^{-\tau_q}) d\tau, \quad (58)$$

а $d\delta/d\tau$ - дифференциальный спектр передач энергии. При выводе (57) существенно использовано лишь условие малости ϵ , $\epsilon \ll T_0$, поэтому при моделировании потерь мы учитываем флуктуацию, когда $t \left(\frac{dE}{dt} \right) \ll 0,1 T_0$, в противном случае потери полагаются равными средним.

Для получения из (57) более простого выражения, при этом для быстрого вычисления, необходимо сделать еще несколько упрощающих предположений:

1. $d\delta/d\tau \approx 2\pi n r_0^2 m c^2 / \beta_0^2 T^2$;
2. $\mu = \frac{2\pi n r_0^2 m c^2 t}{\beta_0^2 T_{\min}} \ll 1$ (слой вещества t "тонкий");
3. $\nu = \frac{2\pi n r_0^2 m c^2 t}{\beta_0^2 I} \gg 1$ (тем не менее, число далеких столкновений велико);

тогда ϵ подчиняется распределению Ландау [21]

$$F(t, \epsilon) d\epsilon = \varphi_L(\lambda) d\lambda, \quad (59)$$

где

$$\varphi_L(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2} q} \cos(q\lambda + q \ln q) dq. \quad (60)$$

$$\lambda = \frac{\epsilon - t \left(\frac{dE}{dt} \right)}{T_{\min} \mu} - \ln \mu - 0,423 \quad (61)$$

Для $\varphi_1(\lambda)$ мы используем простую приближенную формулу, предложенную в работе [22]

$$\varphi_1(\lambda) \cong \sum_{i=1}^4 \alpha_i G(\lambda, \mu_i, \sigma_i), \quad (62)$$

$G(\lambda, \mu, \sigma)$ – плотность распределения вероятности гауссовской величины с средним μ и дисперсией σ^2 . Значения $\alpha_i, \mu_i, \sigma_i$ приведены в табл.6.

В случае, когда $\mu \gg 1$ (по-прежнему $\nu \gg 1$), E имеет гауссово распределение $E \approx E_0 + t \frac{dE}{dt} \sqrt{t_{\min} \mu^{1/2}}$. Сравнение μ , разделив эти две последние члены, показывает равным 0,05 [23]. Сравнение между собой показывает уже при $\nu \approx 100$ [24]. Если предположить, что t (численно равняется μ , следуя по тормозного излучения $\langle t \rangle \sim x_0/20$), то это отношение μ будет, в среднем, увеличиваться втрое. Возможность моделировать или энергетически потерь в очень тонких слоях вещества [24], для которых $\nu \sim 1-10$, в настоящей версии программы не реализована.

Тормозное излучение моделируется явно и поэтому радиационные потери автоматически учитываются (дополняемые энергиями $K < K_{\min}$, "поглощаются в точке рождения").

3.2.8. Многократное рассеяние

Пусть t – длина пути, пройденного электроном между двумя актами дискретных столкновений, E – энергия, β – скорость электрона. Азимутальный угол θ многократного рассеяния разбивается согласно распределению Мольера [25], с учетом трех членов разложения

$$f(\theta)d\theta = \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^{1/2} \left[f^{(0)}(\phi) + \frac{1}{B} f^{(1)}(\phi) + \frac{1}{B^2} f^{(2)}(\phi) \right] \phi d\phi, \quad (63)$$

$$f^{(0)}(\phi) = 2 \exp[-\phi^2],$$

$$f^{(1)}(\phi) \sim 2/\phi^4, \quad \text{при } \phi \gg 1, \quad (64)$$

$$f^{(2)}(\phi) \sim 1/\phi^6, \quad \text{при } \phi \gg 1.$$

где ϕ - приведенный угол

$$\phi = \theta / (\chi_c B^{1/2}) \quad (65)$$

$$\chi_c = \frac{1}{E\beta^2} \left[4\pi N_a r_0^2 \rho \frac{z(z+1)}{A} \cdot t \right]^{1/2} \quad (66)$$

а B - является решением трансцендентного уравнения

$$B - \ln B = \ln \Omega_0 \quad (67)$$

с точностью $\approx 2\%$

$$B \approx 1,3455 + 2,5636 \log_{10} \Omega_0, \quad (68)$$

$$\text{где } \Omega_0 = 6702,3\rho \frac{z(z+1)}{A} \cdot \frac{z^{-2/3}}{1 + 3,34(\alpha \cdot z)^2} \cdot \frac{t}{\beta^2} \quad (69)$$

среднее число упругих столкновений на пути t . Для приближенного учета потерь энергии вместо E и β^2 мы используем $(E_1 \cdot E_2)^{1/2}$ и $\beta_1 \cdot \beta_2$, где 1 и 2 относятся к началу и концу пути t .

Для выборки значений θ из распределения Мольер выражение (63) можно представить в виде следующего разложения $[S]$ с последующим применением метода Батлера:

$$f(\theta)d\theta = \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^{1/2} \sum_{i=1}^3 Q_i S_i(\phi) r_i(\phi) d\phi, \quad (70)$$

где

$$Q_1 = 1 - 2/B, S_1(\phi) = 2\phi e^{-\phi^2}, r_1(\phi) = 1, \phi > 0,$$

$$Q_2 = 1.80/B, S_2(\phi) \equiv 1, r_2(\phi) = r_{21}(\phi) + r_{22}(\phi)/B, \phi \in (0,1), \quad (71)$$

$$Q_3 = 2.025/B, S_3(\phi) = 2/\phi^3, r_3(\phi) = r_{31}(\phi) + r_{32}(\phi)/B, \phi > 1,$$

значения $r_{21}, r_{22}, r_{31}, r_{32}$ приведены в табл.7.

Множитель $(\sin \theta / \theta)^{1/2}$ используется в качестве дополнительной функции режекции. Полярный угол ϑ выбирается из равномерного распределения.

При $\Omega_0 \ll 20$ теория Мольер становится неприменимой, и мы пренебрегаем многократным рассеянием.

3. Сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными

Критерием правильности результатов моделирования является согласие с экспериментальными результатами. Степень согласия определяется следующими факторами:

- 1) неточностью программы, обусловленной тем, что математическая модель ливня описывает реальный процесс приближенно;
- 2) аппаратными искажениями, ввиду чего сравнение результатов расчета с экспериментальными данными осмыслено тогда, когда достаточно хорошо известны величина и характер этих искажений (либо из специальных экспериментальных исследований, либо независимых численных оценок).

Согласие с учетом вышесказанного, в пределах $\approx 10 \div 20\%$ можно считать вполне достаточным для обоснования "правильности" программы моделирования. Такая точность моделирования, с

2) в максимуме ливня $A \sim E^{0,93}$;

3) энергетическое разрешение "в максимуме ливня"

$$\delta/E = K E^{-0,45}, \quad (E \text{ в ГэВ, } K = 80\% \text{ для Fe и } 70\% \text{ для Pb конверторов}). \quad (72)$$

Были проведены соответствующие расчеты при помощи программы ELSS-1, с одной стороны, для проверки работы программы, с другой стороны, для изучения характеристик "тонкого" спектрометра в области сверхвысоких энергий, где по точности измерения энергии e и γ эта методика, если справедлива экстраполяция (72), не уступает заметно традиционному, основанному на полном поглощении.

На рис.4 представлены измеренные и расчетные значения относительных флуктуаций δ_e/E энерговыделения в пластическом сцинтилляторе толщиной 8 мм в зависимости от толщины свинцового конвертора для энергий электронов 6,65; 13,3; 26,6 и 40 ГэВ.

Зависимость энергетического разрешения от энергии представлена на рис.5, откуда видно, что зависимость (72) сохраняется по крайней мере вплоть до энергий 1 ТэВ.

На рис.5 представлено энергетическое разрешение детектора полного поглощения спектрометра ARGUS [31-34]. Детектор представляет собой "сэндвич" (1 мм Pb + 5 мм пластический сцинтиллятор) размерами 10 x 10 x 40 см (толщина 12,5 рад.ед.). Светосбор осуществляется с бокового торца при помощи световода с сместителем спектра.

Программой ELSS-1 был рассчитан вклад в энергетическое разрешение, обусловленный "сэмплинг" флуктуациями и флуктуаци-

ями утечки. Вклад от статистики фотоэлектронов (с учетом флуктуаций световых выходов, светосбора и т.д.) был экспериментально и теоретически изучен в работе [34]. На рис.6 для сравнения с экспериментальными значениями $6E^{1/2}$ приведена квадратичная сумма "ливневых" флуктуаций (сэмплинг + утечки), рассчитанных при помощи программы ELSS-1, и вклада от статистики фотоэлектронов $\sim 3,5\% E^{1/2}$, взятого из работы [34].

Нами были проведены также расчеты некоторых характеристик жидко-аргонного спектрометра MARC [35-36] для двух конфигураций системы электродов: с узким зазором (толщина анодных и катодных электродов 0,9 мм, толщина аргона 2,9 мм) и с широким зазором (толщина анодных электродов 6 мм, катодных 3 мм, толщина аргона 26 мм). При моделировании учитывалось влияние электроотрицательных примесей в аргоне на величину собираемого заряда.

Пусть λ — средний пробег электронов дрейфа до прилипания, L — ширина ионизационного промежутка, а d_1 и d_2 — расстояния до анодной плоскости от начала и конца трека ливневого электрона в аргоне, вдоль которого образован ионизационный заряд N_0e , тогда по известной форме импульса тока [37] нетрудно получить

$$N_c = N_0 \frac{\lambda}{L} \left\{ 1 - \frac{\lambda}{d_2 - d_1} \left[e^{-d_1/\lambda} - e^{-d_2/\lambda} \right] \right\}, \quad (73)$$

где $N_c e$ — собранный заряд. Понятно, что такое же соотношение должно иметь место между энергией ΔE_0 , потерянной ливневым электроном вдоль пути от d_1 до d_2 , и величиной ΔE_c , которую можно назвать "собранной энергией". Величина ΔE_0 разыгрывается при моделировании ливня, а ΔE_c вычислялась по

аналогичными программами [7-9], учтены основные физические процессы и эффекты взаимодействия электронов и фотонов с веществом.

Точно учтен эффект Ландау-Померанчука, что позволит моделировать электромагнитные ливни сверхвысоких энергий.

Для проверки правильности работы программы ELSS-1 проведено сравнение результатов моделирования с некоторыми экспериментальными данными. В большинстве случаев согласие не хуже $\sim 10\%$.

При помощи ELSS-1 изучены некоторые характеристики электромагнитных ливней и ливневых детекторов в сверхускорительной области энергий. В частности, детально изучено энергетическое разрешение "тонкого" спектрометра [28-30] в области энергий вплоть до 1 ТэВ .

При создании программы ELSS-1 большое внимание было уделено вопросам быстродействия, простоты в обращении, транспортабельности и другим требованиям, обычно предъявляемым к программному обеспечению.

Работа была выполнена в Институте физики высоких энергий (Серпухов) на ЭВМ ISL-1906.

Автор благодарен С.И.Денисову, Р.С.Шувалову, Е.А.Разуваеву за полезные обсуждения и внимание к работе. Мне приятно также выразить благодарность дирекции ИФВЭ и ЕРФИ, а также руководству Отдела космических лучей (ЕРФИ) и Отдела нейтринной физики (ИФВЭ) за поддержку и организационную помощь.

Таблица I *)

		[7]	[8]	[9]	Настоящая работа
1.	Тормозное излучение	+	+	+	+
2.	Рождение пары:	+	+	+	+
	а) эффект Ландау-Померанчука	+ !	-	\pm !	+
	б) эффект плотности среды	+	-	-	+
	в) экранирование поля ядра атомными электронами	+	+	+	+
3.	Множественное рассеяние	+	+	+	+
4.	Ионизационные потери энергии:	+	+	+	+
	а) эффект плотности Ферми	\pm	+	\pm	+
	б) флуктуации потерь	-	-	+	+
5.	Радиационные потери энергии, флуктуации потерь	+	-	-	+
6.	Электрон-электронное рассеяние	+ !	+ !	+	+
7.	Позитрон-электронное рассеяние	+ !	+ !	+	+
8.	Комптон-эффект	+	+	+	+
9.	Фотоэффект (на К - оболочке)	+	+	+	+
10.	Аннигиляция e^+ в два фотона	\pm	+	\pm	+

*) Знаки обозначают: + процесс учтен; \pm учтен приближенно; ! имеется ошибка в алгоритме моделирования; - процесс не учтен.

Таблица 2

s	$A'(s)$	$B'(s)$	$C'(s)$
0,0	0,0	0,0	0,0
0,1	0,4457	0,3656	0,3259
0,2	0,6853	0,6172	0,5632
0,3	0,8163	0,7696	0,7462
0,4	0,8895	0,8591	0,8439
0,5	0,9316	0,9119	0,9020
0,6	0,9564	0,9436	0,9370
0,7	0,9714	0,9606	0,9565
0,8	0,9807	0,9719	0,9720
0,9	0,9867	0,9800	0,9800
1,0	0,9906	0,9877	0,9893
∞	1,0	1,0	1,0

Таблица 3

α	β_1	β_2	β_3	f_{cor}
0,00	1,008	1,926	2,107	1,065
0,05	0,856	1,786	1,849	1,072
0,10	0,704	1,647	1,592	1,079
0,15	0,604	1,547	1,411	1,086
0,20	0,522	1,460	1,258	1,092
0,25	0,455	1,392	1,114	1,097
0,30	0,402	1,339	0,985	1,102
0,35	0,358	1,297	0,866	1,108
0,40	0,323	1,265	0,753	1,115
0,45	0,293	1,247	0,636	1,124
0,50	0,268	1,234	0,528	1,134
0,55	0,248	1,234	0,407	1,148
0,60	0,232	1,243	0,278	1,162
0,65	0,218	1,263	0,134	1,181
0,70	0,207	1,299	0,041	1,201

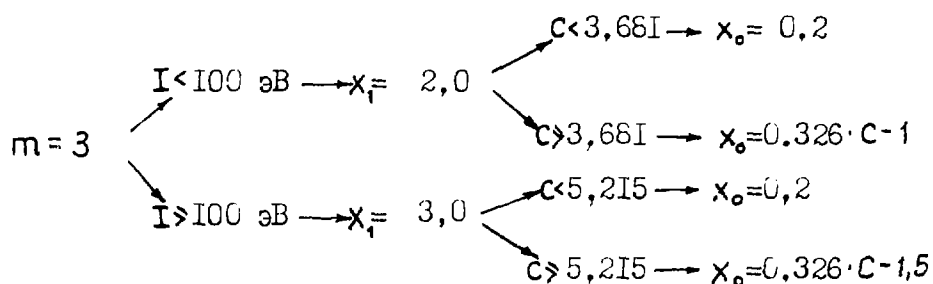
Таблица 4

z	I (эВ)	z	I (эВ)
1	18,7	7	85
2	42	8	89
3	38	9	117
4	60	10	131
5	73	11	143
6	78	12	156

Таблица 5

Схема вычисления параметров m
 X_1 , X_0 , для твердых, жидких и
 газообразных веществ [20]

Твердые и жидкие вещества



Г а з ы

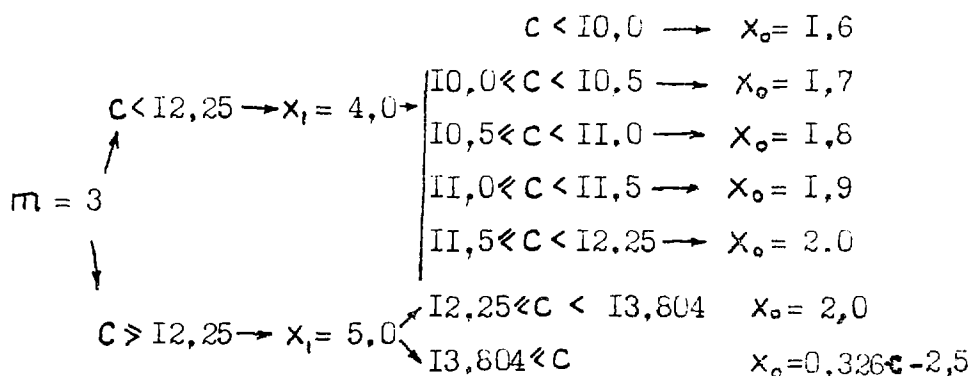


Таблица 6

α	μ	β
0,555	0,0	1,3
0,206	3,0	1,4
0,101	6,5	2,1
0,062	11,0	3,5

Таблица 7

ϕ	$r_{21}(\phi)$	$r_{22}(\phi)$	$1/\phi$	$r_{31}(\phi)$	$r_{32}(\phi)$
0,01	0,0000	0,0000	0,000	0,434	0,301
0,05	0,1341	0,0677	0,020	0,435	0,018
0,10	0,2050	0,1324	0,050	0,500	0,025
0,15	0,2696	0,1855	0,070	0,505	0,040
			0,100	0,515	0,058
0,20	0,3052	0,2299	0,125	0,527	0,075
0,25	0,3093	0,2549	0,150	0,550	0,095
0,30	0,2997	0,2669	0,175	0,565	0,115
0,35	0,2749	0,2576	0,200	0,591	0,130
0,40	0,2338	0,2331	0,225	0,630	0,125
0,45	0,18760	0,1923	0,250	0,672	0,088
			0,275	0,745	-0,110
0,50	0,14013	0,1380	0,300	0,805	-0,1350
0,55	0,1104	0,0741	0,325	0,885	-0,1650
0,60	0,9044	-0,0017	0,350	0,960	-0,1825
			0,375	0,995	-0,1800
0,65	0,8844	-0,0693	0,400	0,965	-0,1630
0,70	0,8524	-0,1475	0,425	0,895	-0,1300
			0,450	0,810	0,050
0,75	0,8105	-0,2054	0,475	0,710	0,300
0,80	0,7605	-0,2697	0,600	0,598	0,520
			0,525	0,500	0,615
0,85	0,7048	-0,3050	0,550	0,415	0,620
0,90	0,6455	-0,3426	0,575	0,355	0,580
0,95	0,5845	-0,3486	0,600	0,310	0,500
1,00	0,5240	-0,3533	0,625	0,280	0,365
			0,650	0,260	0,270
			0,675	0,245	0,180
			0,700	0,240	0,095
			0,725	0,235	0,020
			0,750	0,230	-0,045
			0,775	0,235	-0,065
			0,800	0,235	-0,120
			0,825	0,240	-0,145
			0,850	0,240	-0,160
			0,875	0,245	-0,170
			0,900	0,245	-0,175
			0,925	0,240	-0,180
			0,950	0,240	-0,175
			0,975	0,235	-0,170
			1,000	0,233	-0,160

Таблица 8

Приведенное энергетическое разрешение, $5E^{1/2}\%$
рассчитанное для двух конфигураций системы
электродов спектрометра MARC в зависимости от
чистоты аргона

λ	Узкий зазор	Широкий зазор
$\lambda = \infty$	$2,37 \pm 0,14$	$3,20 \pm 0,10$
$\lambda = 1,45 \text{ мм}$	$2,06 \pm 0,16$	$2,58 \pm 0,13$

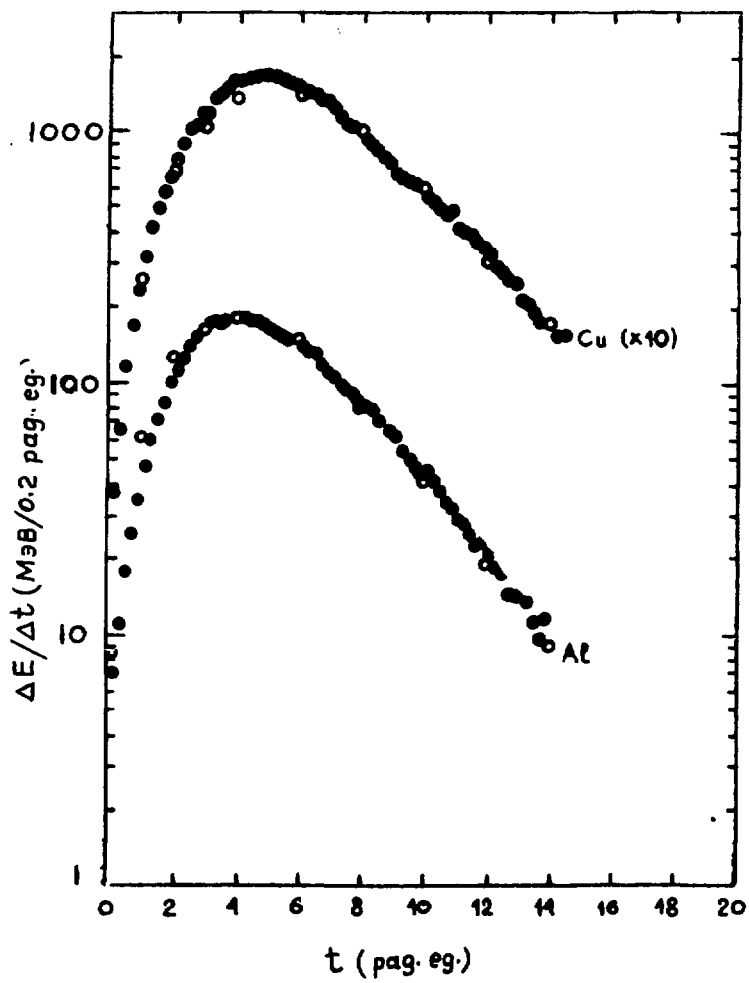


Рис. I

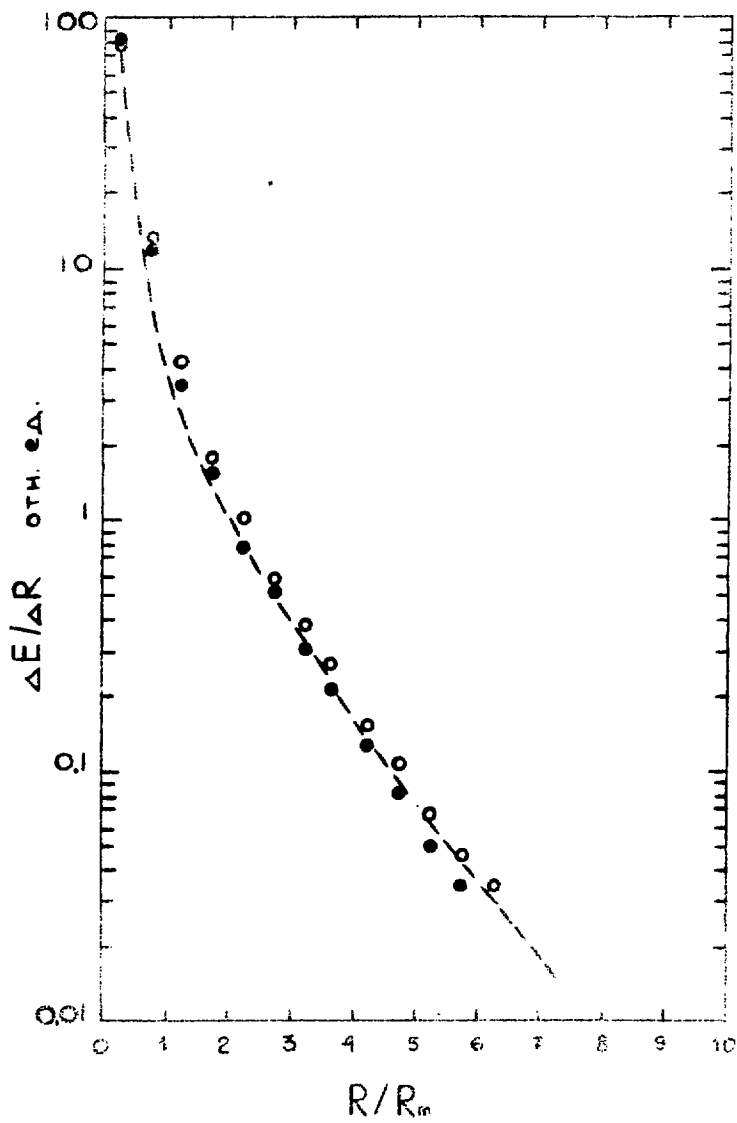


Рис. 2

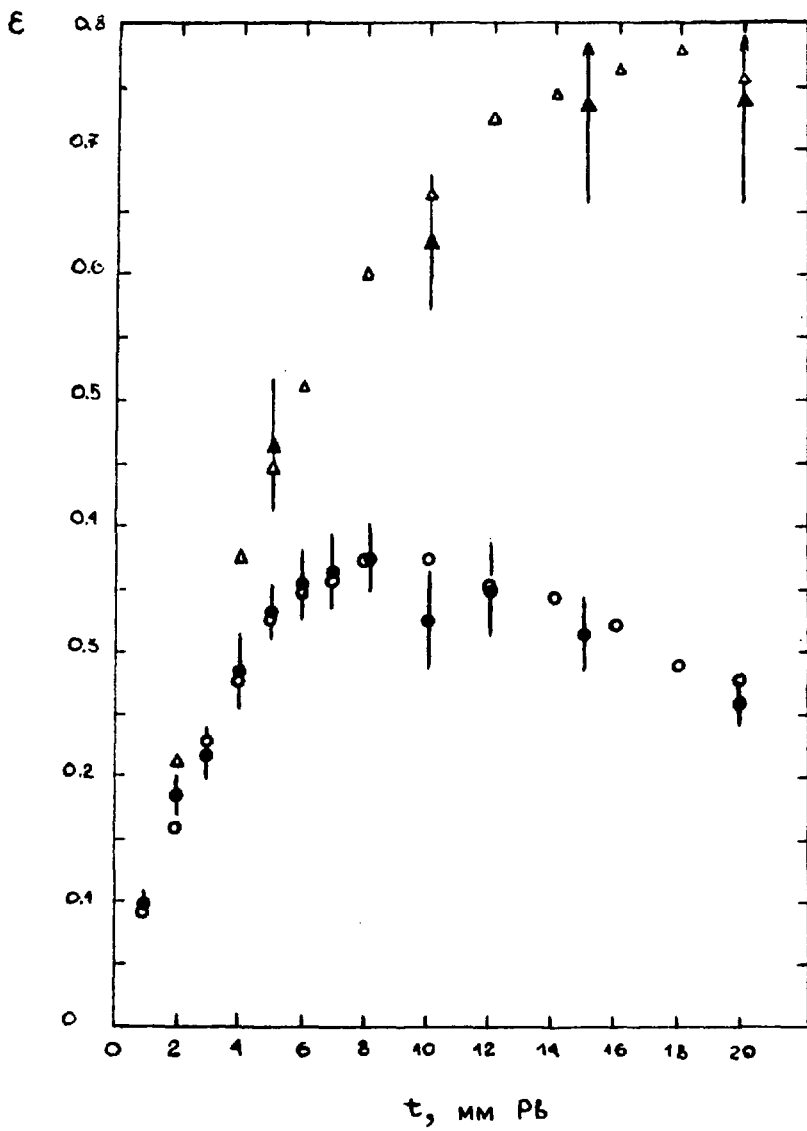


Рис.3

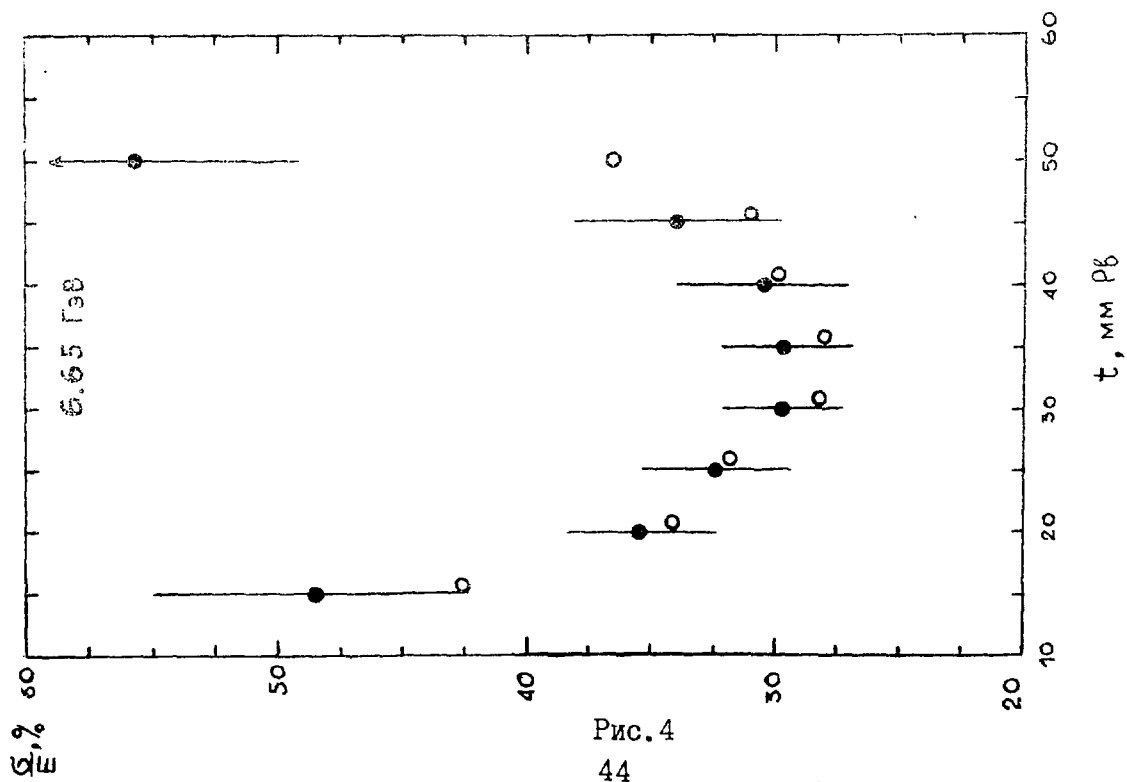
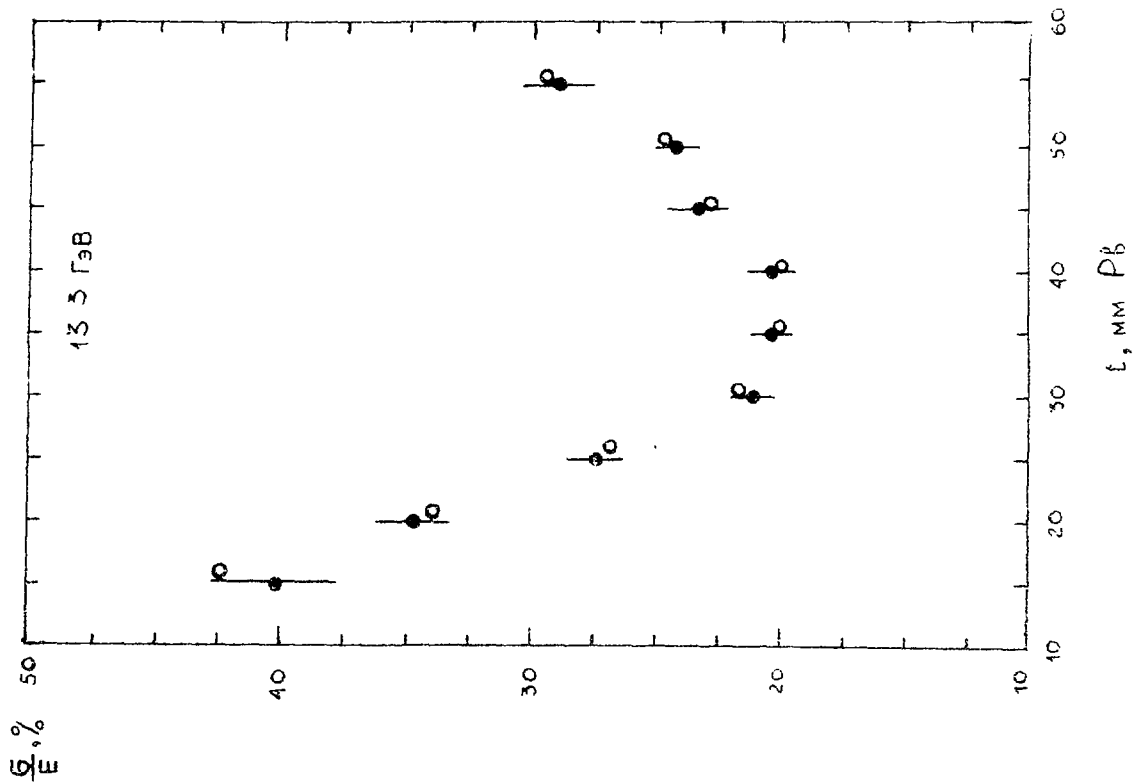


Рис. 4
44

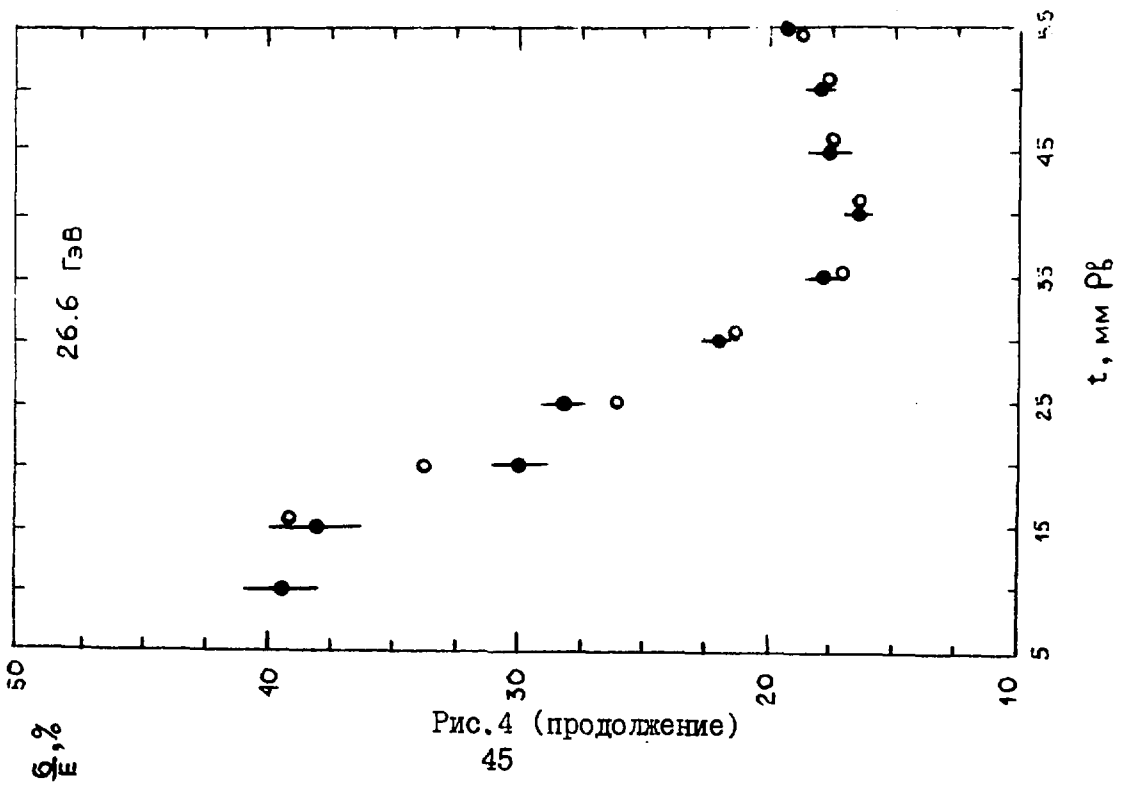
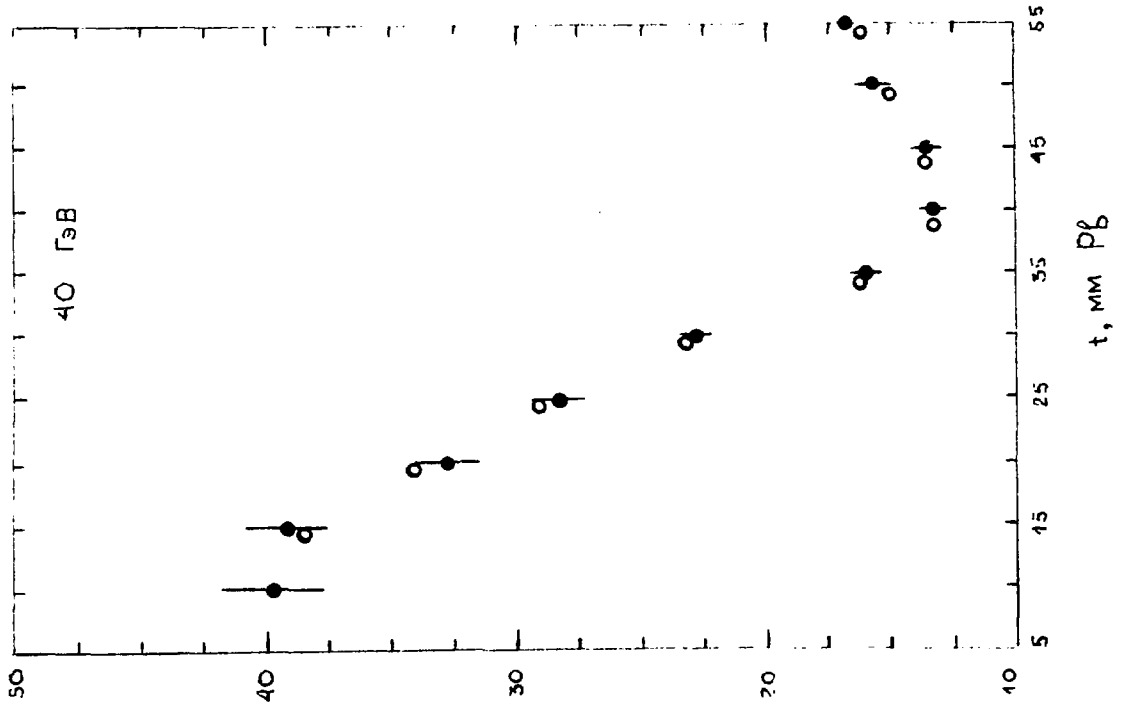


Рис. 4 (продолжение)

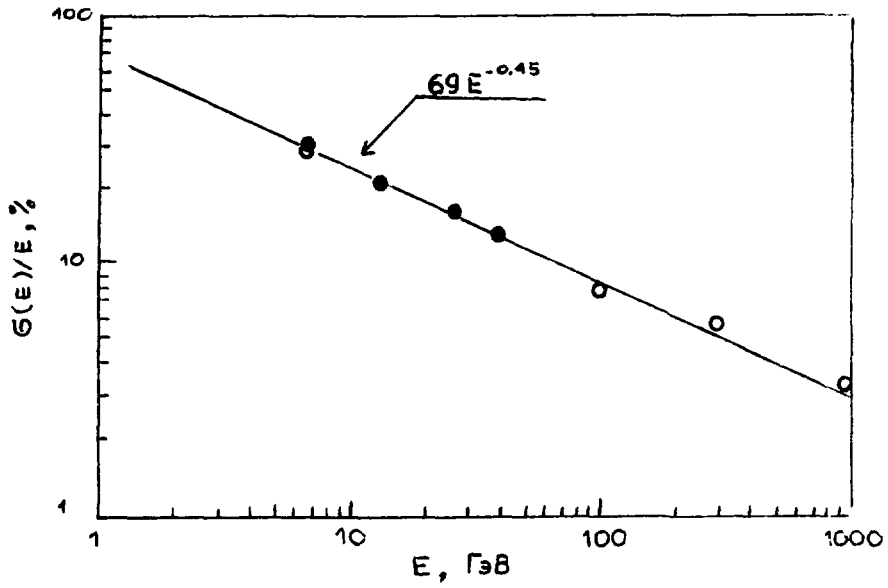


Рис.5

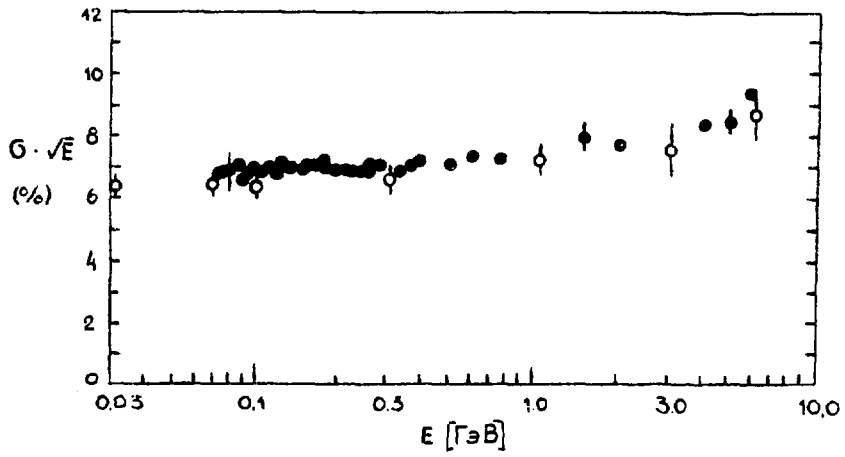


Рис.6

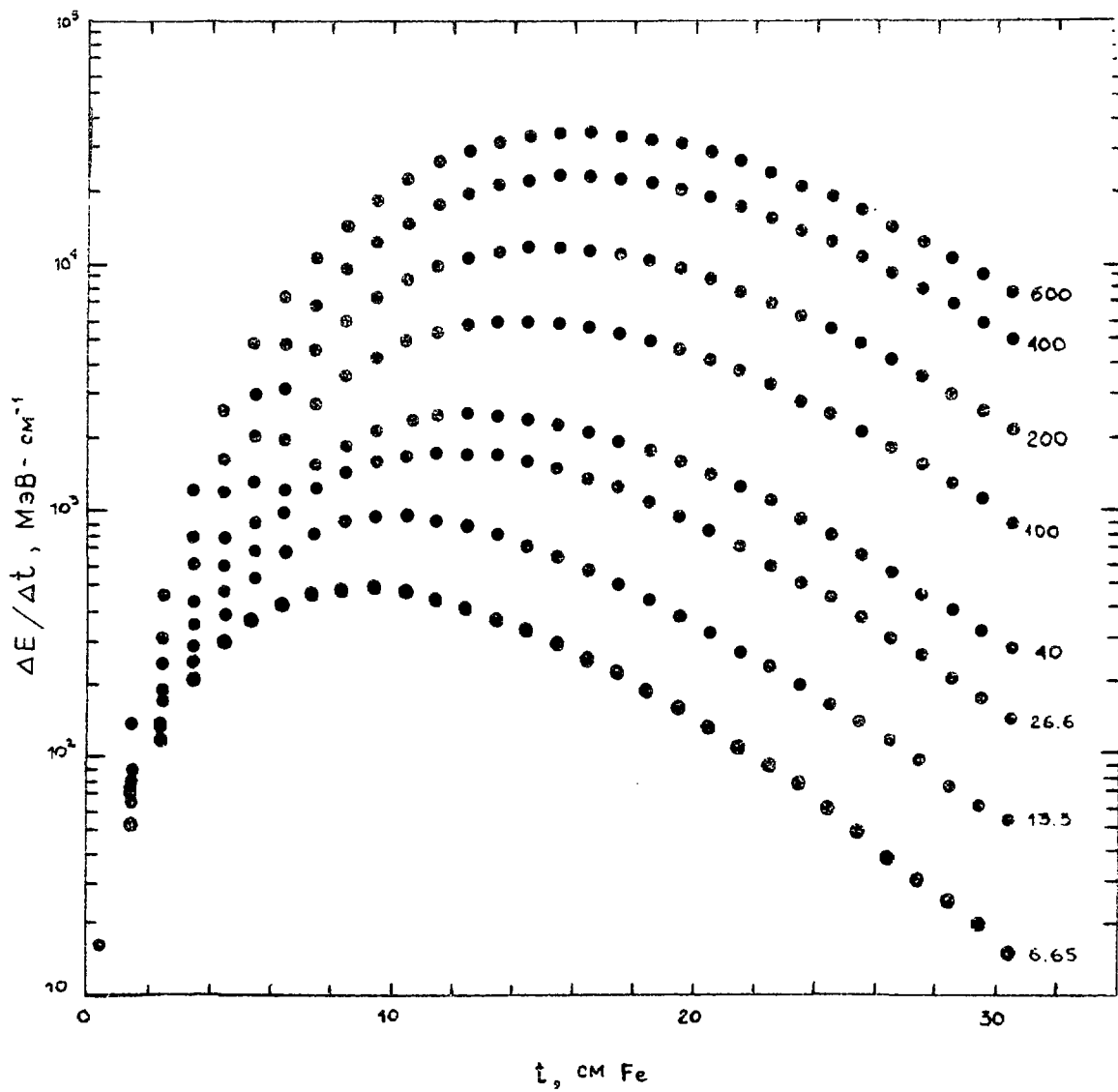


Рис.7

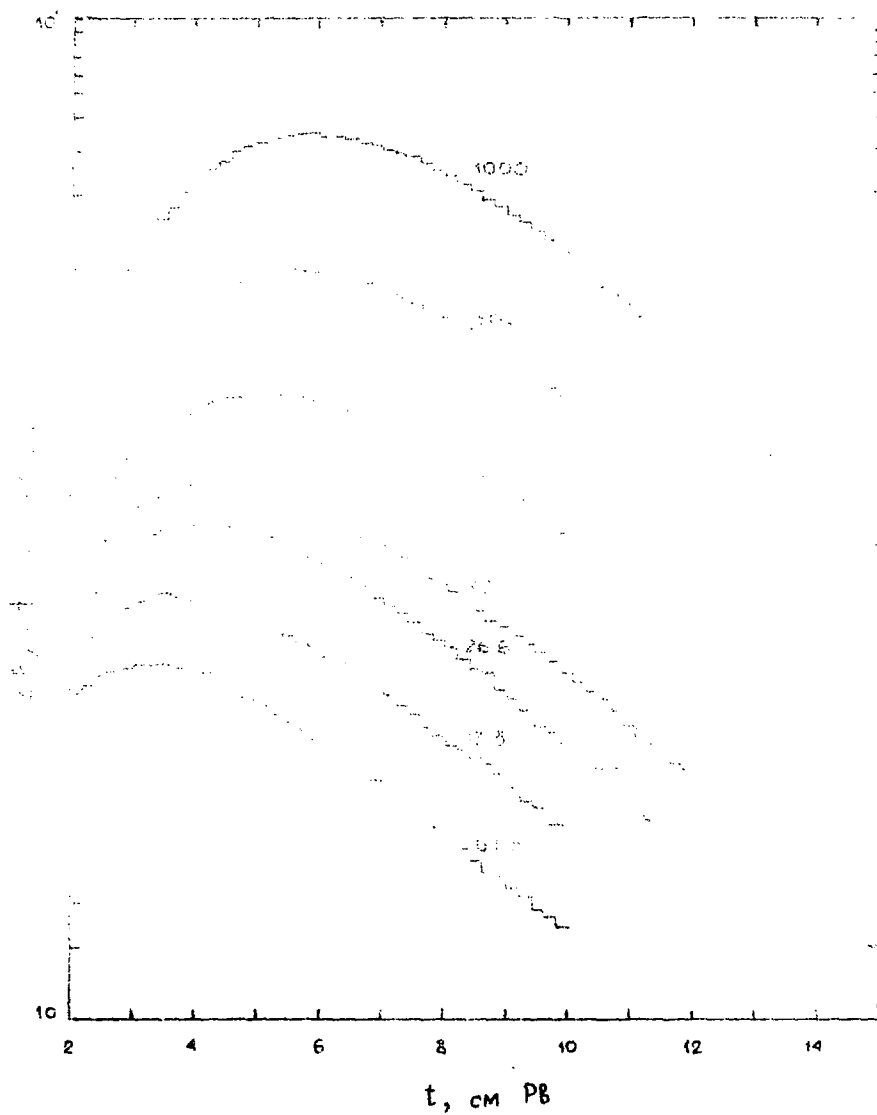


Рис.8

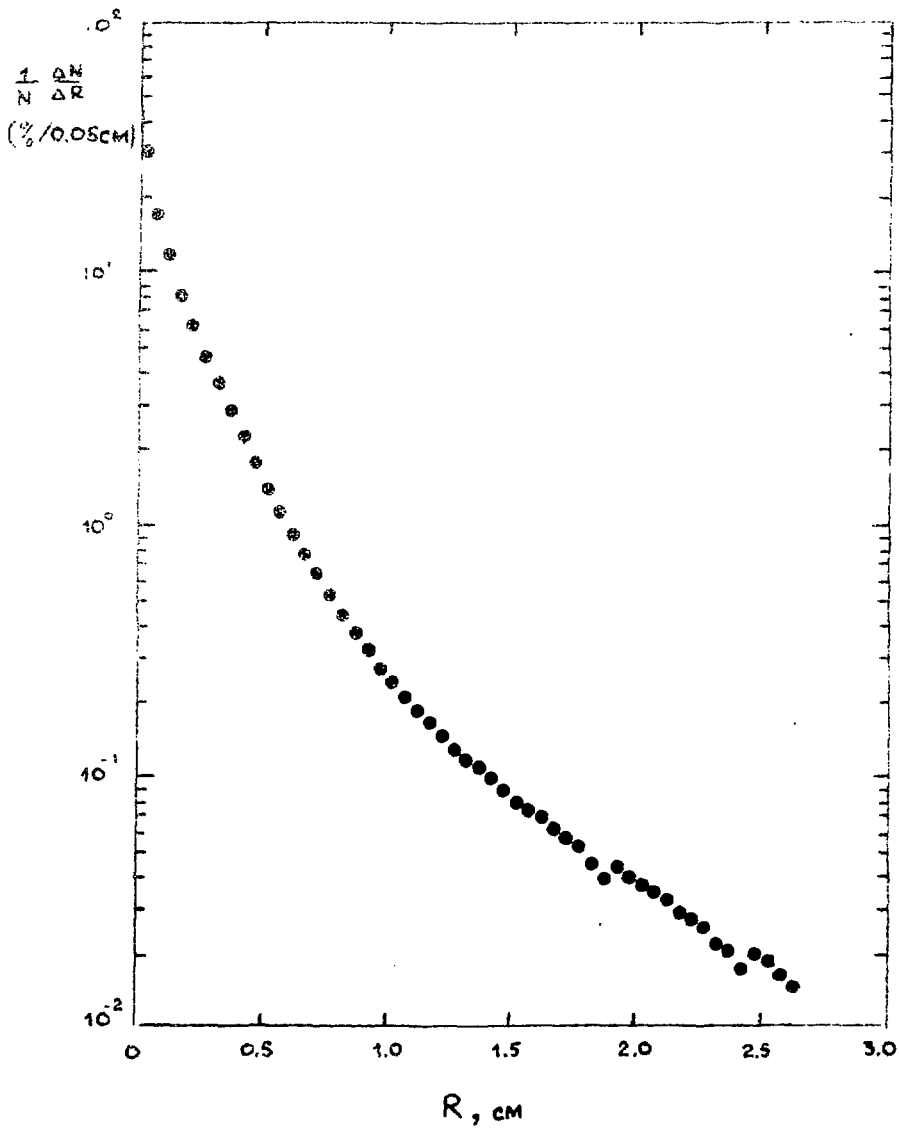


Рис. 9

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ

Рис.1 Продольное энерговыделение в ливнях, образованных электронами с энергией 6 ГэВ в алюминии и меди, \circ - экспериментальные данные [26], \bullet - результаты моделирования с $K_{min} = 0,1$ МэВ, $E_{min} = 1,5$ МэВ.

Рис.2 Поперечное энерговыделение (проинтегрированное по глубине) в ливнях, образованных электронами с энергией 6 ГэВ в алюминии (\circ) и меди (\bullet), рассчитанное при $K_{min} = 0,1$ МэВ и $E_{min} = 1,5$ МэВ, пунктирная кривая - результат измерения [26] для алюминия. Радиальное расстояние приведено в единицах Мольера $R_m = E_s X_0 / \mathcal{E}$, $E_s \approx 21$ МэВ, \mathcal{E} - критическая энергия (МэВ), X_0 - радиационная единица длины.

Рис.3 Зависимость эффективности конверсии \mathcal{E} от толщины свинцового конвертора для энергий фотонов 41 МэВ (\circ, ϕ) и 177 МэВ (Δ, \blacktriangle). Темные точки - данные [27], светлые - результаты моделирования для энергий образования $K_{min} = 0,1$ МэВ, $E_{min} = 1,5$ МэВ.

Рис.4 Зависимость относительных флуктуаций \mathcal{E}/E энерговыделения в пластическом синтальзиоре толщиной t от его толщины свинцового конвертора, расположенного перед ним, и толщины свинцового конвертора, расположенного перед синтальзиором. Энергия электронов $E_0 = 6$ ГэВ. Темные точки - данные [10], светлые - результаты моделирования с $K_{min} = 0,1$ МэВ, $E_{min} = 1,5$ МэВ.

Рис.5 Зависимость минимальных значений σ/E (см.рис.4) от энергии электронов: ● - экспериментальные точки [28], прямая - аппроксимация экспериментальных данных зависимостью $\sigma/E = 69 E^{-0,45}(\%)$, (E в ГэВ), светлые точки - результаты моделирования с $K_{min} = 0,5$ МэВ, $E_{min} = 2$ МэВ.

Рис.6 Зависимость приведенного энергетического разрешения от энергии фотонов (для $E < 380$ МэВ) и электронов (для $E > 380$ МэВ) электромагнитного калориметра спектрометра ARGUS, темные точки - результаты работ [31-33], светлые точки - результаты моделирования с $K_{min} = 0,1$ МэВ, $E_{min} = 1,5$ МэВ.

Рис.7 Результаты моделирования продольного энерговыделения ливней, образованных электронами с энергиями $6,65 + 600$ ГэВ в железном поглотителе. Для $E \leq 40$ ГэВ $K_{min} = 0,5$ МэВ, $E_{min} = 2$ МэВ, а для $E > 40$ ГэВ $E_{min}/E = 10^{-4}$, $K_{min} = 1$ МэВ.

Рис.8 Результаты моделирования продольного энерговыделения в свинцовом поглотителе. Цифрами указаны энергии электронов в ГэВ. Энергии обрезания $K_{min} = 0,5$ МэВ, $E_{min} = 2$ МэВ.

Рис.9 Поперечный профиль ливня (проинтегрированный на глубине), образованного электроном с энергией 1 ТэВ в свинцовом поглотителе: $K_{min} = 0,5$ МэВ, $E_{min} = 2$ МэВ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Iwata S. Calorimeters for high-energy experiments at accelerators, preprint DPNU-3-79, Nagoya, 1979.
2. Fabjan C.W., Ludlam T. Calorimeters in high-energy physics, preprint CERN-EP/82-37, Geneva, 1982.
3. Amaldi U. Fluctuations in calorimetry measurements, preprint CERN-EP/80-212, Geneva, 1980.
4. Gordon H.A., Smith S.D. Sampling calorimeters in high-energy physics, preprint BNL-28380, Brookhaven, 1980.
5. Prokoshkin Yu.D. Hodoscope calorimeters as basic coordinate-energy detectors of particles in the experiments in the 10 TeV range, Proc. Second ICFA Workshop on Possibilities and Limitations of Accelerators and Detectors, Les Diablerets, 1979, p.405.
6. Fabjan C.W., Fischer H.G. Particle Detectors, preprint CERN-EP/80-27, Geneva, 1980.
7. Messel H., Crawford D.F. Electron-photon shower distribution function tables for lead, copper and air absorbers, Pergamon Press, Oxford, 1970.
8. Ford R.L., Nelson W.R. The EGS code system: Computer programs for the Monte Carlo simulation of electromagnetic cascade showers (version 3), preprint SLAC-210, Stanford, 1978.
9. Штерн Б.Е. SIMEX1. Программа генерации электромагнитных ливней в веществе. Препринт ИЯИ-П-0082, Москва, 1978.
10. Butler J.W. Machine sampling from given probability distributions, Symposium on Monte Carlo Methods, ed. H.A. Meyer, Wiley, N.Y., 1956, p.249.

19. Бундз Г.А., Кисинев А.А. Ультратонкие пленки. М.: Наука, 1980, т.1, стр.10.
20. Вавилов И.В. Ионизационные потери тяжелых частиц больших энергий. ЖЭТФ, 1957, т.32, с.920.
21. Ландау Л.Д. О потерях энергии быстрыми частицами на ионизацию. J.Phys, USSR, 1944, vol.8, p.201.
22. Blunck D., Leisgang S. Zum Energieverlust Schneller Elektronen in dünnen Schichten, Z.Phys., 1950, vol.128, p.500

23. Rossi B., High Energy Particles, Prentice-Hall, N.Y. 1952
24. Асосков В.С., Гришин В.М., Ермилова В.К. и др. Ионизационные эффекты в реальных детекторах релятивистских заряженных частиц. Труды ФИАН, 1982, т.140, с.1.
25. Scott J.T. The theory of small angle multiple scattering of fast charged particles, Rev.Mod.Phys., 1963, vol.35, p.231
26. Nathow G., Freitag E., K bberling M. et al. Measurement of the longitudinal and lateral development of electromagnetic cascades in lead, copper and aluminium, Nucl.Phys.B 1970, vol.20, p.592
27. Darriculat P., Gygi E., Holder M. et al. Conversion Efficiency of lead for 30-200 MeV photons. NIM, 1975, vol.129, p.105.
28. Amatuni Ts.A., Antipov Yu.M., Denisov S.P., Petrukhin A.I. Energy determination and identification of High energy electrons by energy deposition measurement near the shower maximum. NIM 1982, vol.203, p.183
29. Амагуни Ц.А., Антипов Ю.М., Денисов С.П., Петрухин А.И. Простой фодоскопический спектрометр электронов и фотонов высокой энергии. ИТЭ, 1983, т.3, с.33.
30. Amatuni Ts.A., Antipov Yu.M., Denisov S.P., Petrukhin A.I. A simple hodoscope spectrometer for High energy electrons and photons, preprint IHEP-82-28, 1982.
31. Hofmann W., Spengler J., Wegener D. Electron energy and positron measurement using lead-scintillator calorimeters with a new light collection system. Preprint DESY-73/73, Hamburg, 1978.
32. Hofmann W., Markees A., Matthiesen U. et al. Characteristics of lead-scintillator sampling shower counters for the

- detection of electrons and photons in the energy range 70 MeV to 6 GeV. Preprint DESY-81/045, Hamburg, 1981
33. Drescher A., Gräwe B., Hofmann W., et al. The ARGUS electron-photon calorimeter. I. Detection of low-energy electromagnetic showers. Preprint DESY - 82/030, Hamburg, 1982.
34. Drescher A., Graf H.J., Gräwe B. et al. The ARGUS electron-photon calorimeter. II Properties of the light collection system of the lead/scintillator shower-counters. Preprint DESY-83/023, Hamburg, 1983.
35. Cerri C., Denisov S.P., Krasnokyt'sky R.N. et al. A fine grain aluminium liquid argon calorimeter, NIM 1983, vol.214 p.217.
36. Cerri C., Denisov S.P., Gennaro G. et al. MARS-2: A current sensitive liquid-argon calorimeter. Preprint CERN-EP/84-21, Geneva, 1984.
37. Краснокутский Р.Н., Федякин Н.Н., Щувалов Р.С. Временное разрешение детектора на жидком аргоне. Часть I. Оптимальный фильтр. Препринт ИФВЭ-83-И13, 1983.

Рукопись поступила 17 июля 1984г.

АТУНИ

ИЗУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЛИВНЕЙ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

автор В.П. Лукаян

научный редактор А.С. Абрамян

Введено в печать 26/IX-84г. ВФ-06093 Формат 60x84/16
Однотипная печать. Уч. изд. л. 3,5 Тираж 299 экз. Ц. 53 к.
Индекс № 782 Индекс 3624

Введено в Ереванском физическом институте
26 сентября 1984 г.