ЕФИ-736(51)-84

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
ИНФОРМАЦИИ И ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ПО АТОМНОЙ НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

А.А.ОГАНДЖАНЯН

О ДВИЖЕНИИ ЭЛЕКТРОНОВ В СПИРАЛЬНОМ ОНДУЛЯТОРЕ

ЕРЕВАН-1984

ЕФИ-736(5I)-84

A.A.OHANJANIAN

ON THE MOTION OF ELECTRONS IN A SPIRAL UNDULATOR

We study the off-axial motion of electrons in the undulator field generated by two spiral tapes located antipodally on the cylinder surface and forming direct and inverse wires of the chain with current. In the linear (by the ratio of the field parameter to the particle dimensionless energy) approximation of perturbation theory we have found trajectroies of motion at arbitrary initial conditions. At the injection at a small angle to the undulator axis, electrons are shown to move by a periodical trajectory with a period that is independent of the initial transverse deviation. This fact may be used to increase the power of free electron lasers as well as in other applications of beams in a spiral undulator.

Yerevan Physics Institute

Yerevan 1984

ЕФИ-736(51)-84

УДК 538.3

А.А.ОГАНДЖАНЯН

О ДВИЖЕНИИ ЭЛЕКТРОНОВ В СПИРАЛЬНОМ ОНДУЛЯТОРЕ

В работе исследуется неосевое движение электронов в ондуляторном поле, создаваемом двумя спиральными лентами, расположенными диаметрально противоположно на поверхности цилиндра и образующими прямой и обратный провода цепи с током. В линейном (по отношению параметра поля к безразмерной энергии частицы) приближении теории возмущений найдены траектории движения при произвольных начальных условиях. Показано, что при инжекции под небольшим углом к оси ондулятора, электроны движутся по периодической траектории с периодом, не зависящим от начального поперечного отклонения. Это обстоятельство может быть использовано для увеличения мощности лазера на свободных электронах и в других применениях пучков в спиральном ондуляторе.

Ереванский физический институт

Ереван 1984

В расчетах по излучению и ускорению электронных пучков в спиральном ондуляторе в качестве поля ондулятора обычно применяется (см.,например, [I,2])поперечное пространственно-периодичное магнитное поле вида:

$$\vec{H} = H_0\left(\vec{e}_x \sin\frac{2\pi z}{\lambda} - \vec{e}_y \cos\frac{2\pi z}{\lambda}\right), \qquad (I)$$

где λ и H_0 - пространственный период и напряженность поля; $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ - орты по осям x , y , z .Такое поле не удовлетворяет уравнениям Максвелла, однако является хорошим приближением поля реального ондулятора при движении частиц вблизи оси z . В настоящей работе исследуется движение электронов при произвольных начальных условиях, когда нарушено условие применимости осевого приближения.

В качестве спирального ондулятора рассмотрим систему двух спиральных лент, расположенных диаметрально противоположно на поверхности цилиндра радиуса a и образующих прямой и обратный провода цепи, по которой течет ток I . Поле такой системы в приближении, когда толщина лент много меньше a , рассчитано в [3] и в цилиндрических координатах ρ , φ и z записывается в виде:

$$\begin{cases} H_\rho = 2H_0 \sum\limits_m^{1,3,5\ldots} I'_m(m\varkappa\rho)\cdot K'_m(m\varkappa a)\cdot \dfrac{\sin\alpha m}{\alpha}\cdot \sin m(\varphi-\varkappa z) \\ H_\varphi = \dfrac{2H_0}{\varkappa\rho}\sum\limits_m^{1,3,5} I_m(m\varkappa\rho)\cdot K'_m(m\varkappa a)\cdot\dfrac{\sin\alpha m}{\alpha}\cdot\cos m(\varphi-\varkappa z) \\ H_z = -\varkappa\rho H_\varphi \end{cases} \qquad (2)$$

где

$$H_0 = \left(\frac{4\pi}{\lambda}\right)^2\cdot\frac{a}{c}\cdot I \; ; \qquad (3)$$

$\varkappa = \dfrac{2\pi}{\lambda}$; λ - шаг спирали; 2α - угол, под которым с оси спирали видно сечение каждой из лент плоскостью $z=const$; I_m , K_m , I'_m , K'_m - модифицированные функции Бесселя и их производные; c - скорость света. Координата φ отсчитывается от угла, определяющего среднюю линию первой ленты в плоскости $z = 0$. Нетрудно заметить, что в пределе $\rho\to 0$ магнитное поле (2) принимает вид (I). Пусть ондулятор длиной $L=N\lambda$ (N - - число витков спирали, см. сноску на стр. 5) расположен в полупространстве $z\geqslant 0$ с осью, направленной по оси z и в момент времени $t=t_{0i}$, i -ая частица пучка с зарядом $-|e|$ пересекает плоскость $z=0$ в точке с координатами x_{0i} ; y_{0i} , имея скорость $V_{0i}\equiv c\vec\beta_{0i} = c(\beta_{\perp 0}\cdot\cos\theta\cdot\vec e_x + \beta_{\perp 0}\cdot\sin\theta\,\vec e_y + \beta_{z0}\,\vec e_z)$.Индекс i в дальнейшем для удобства записи опускается и считается, что поперечное движение ограничено условием $\rho(t)\leqslant\rho_0 < a$.

Траектория частиц определяется из уравнения движения:

$$\dot{\vec{\beta}} = -\frac{\xi}{\gamma}\cdot\frac{2\pi c}{\lambda}\left[\vec{\beta}\times\vec{h}(\vec{r})\right], \tag{4}$$

где

$$\xi = \frac{|e|H_0\lambda}{2\pi mc^2}\cdot N I_1'(æ\rho_0)\cdot\left[K_0(æa)+\frac{1}{æa}K_1(æa)\right], \tag{5}$$

$$\vec{h}(\vec{r}) = \left\{H_0 N\cdot I_1'(æ\rho_0)\left[K_0(æa)+\frac{1}{æa}K_1(æa)\right]\right\}^{-1}\cdot\vec{H}(\vec{r}), \tag{6}$$

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ – энергия частицы в единицах энергии покоя mc^2.

Решение уравнения (4) можно искать в виде ряда по степеням ξ/γ, условие сходимости которого при заданных a, N, λ, I, γ определяет значение параметра ρ_0. В нулевом приближении это решение описывает равномерно-прямолинейное движение, определяемое начальными условиями:

$$\overset{(0)}{\vec{\beta}} = \vec{\beta}_0 \quad ; \quad \overset{(0)}{\vec{r}} = \vec{r}_0 + c\vec{\beta}_0(t-t_0) \tag{7}$$

Линейные по $\frac{\xi}{\gamma}$ члены с ошибкой $\sim\frac{1}{2\pi N}$ ж) записываются в виде:

$$\overset{(1)}{\vec{\beta}} = -\frac{\xi}{\gamma}\frac{2}{\beta_{z0}}\sum_m^{1,3,5\ldots} A_m\cdot\left\{\left[\left[\vec{e}_z\times\vec{\beta}_0 + \frac{\vec{\beta}_0\times[\vec{e}_z\times\vec{r}]}{æ\rho^2}\right]\cdot I_m(mæ\rho)\cdot\sin m(\varphi-æz) - \right.\right.$$

$$\left. -\vec{\beta}_0\times\left[\vec{e}_z\times[\vec{e}_z\times\vec{r}]\right]\cdot\frac{1}{\rho}\cdot I_m'(mæ\rho)\cdot\cos m(\varphi-æz)-\vec{C}_v\right\}, \tag{8}$$

ж) Применяя поле (2) для ондулятора конечной длины, мы пренебрегаем краевыми эффектами, которые дают поправку к получаемым формулам $\sim 1/N$. Таким образом, выписывание опущенных в (8) и (9) членов является превышением точности.

$$\overset{(1)}{\vec{r}} = -\frac{\xi}{\gamma}\cdot\frac{2}{\beta_{z0}^2 æ}\cdot\sum_m^{1,3,5\ldots}\frac{A_m}{m}\cdot\Big\{\Big[\vec{e}_z\times\vec{\beta}_0+\frac{\vec{\beta}_0\times[\vec{e}_z\times\vec{r}]}{æ\rho^2}\Big]\cdot I_m(mæ\rho)\cdot\cos m(\varphi-æz)+$$

$$+\vec{\beta}_0\times[\vec{e}_z\times[\vec{e}_z\times\vec{r}]]\cdot\frac{1}{\rho}\cdot I_m'(mæ\rho)\cdot\sin m(\varphi-æz)-mæz\cdot\vec{c}_v-\vec{c}_r\Big\}, \tag{9}$$

где

$$A_m=\frac{K_m'(mæa)}{N\cdot K_1'(æa)\cdot I_1'(æ\rho_0)}\cdot\frac{\sin\alpha m}{\alpha}, \tag{10}$$

$$\{\vec{c}_v;\vec{c}_r\}=\Big[\vec{e}_z\times\vec{\beta}_0+\frac{\vec{\beta}_0\times[\vec{r}_0\times\vec{e}_z]}{æ r_0^2}\Big]\cdot I_m(mær_0)\cdot\{\sin m\varphi_0;\cos m\varphi_0\}-$$

$$-\vec{\beta}_0[\vec{e}_z\times[\vec{e}_z\times\vec{r}]]\cdot\frac{1}{r_0}I_m'(mær_0)\cdot\{\cos m\varphi_0;-\sin m\varphi_0\}. \tag{11}$$

В выражениях (8) и (9) $\vec{r}$, ρ , φ , z задаются решениями нулевого приближения.

Как и следовало ожидать, линейные добавки к равномерному движению перпендикулярны начальной скорости. Выражения для $\overset{(1)}{\vec{v}}$ и $\overset{(1)}{\vec{r}}$ упрощаются в предположении $æ\rho_0\gg 1$, $\pi(a-\rho_0)\gtrsim\lambda$; $\alpha\ll 1$. При этом фактор A_m содержит множитель $\exp\{-(m-1)æ(a-\rho_0)\}$ что позволяет оставить в сумме по m только первый член. Для частиц, имеющих начальную поперечную скорость, аргумент цилиндрических функций I_1 и I_1' растет со временем, и частицы движутся по сложной кривой с увеличивающимся средним расстоянием от оси. При $æ\rho>1$ этот рост становится экспоненциальным

При инжекции частиц параллельно оси ондулятора $(\beta_{\perp 0}=0)$ $æ\rho=\mathrm{const}$. В этом случае из (8) и (9) имеем:

$$\begin{cases} \overset{(1)}{\vec\beta} = \dfrac{\xi}{\gamma}\left\{\left[\vec\ell_1 \cdot b_1 \cdot [\sin(\varphi_0 - æ z) - \sin\varphi_0] - \vec\ell_2 \cdot b_2 \cdot [\cos(\varphi_0 - æ z) - \cos\varphi_0]\right]\right\} \\ \overset{(1)}{\vec r} = \dfrac{\xi}{\gamma æ \beta_0}\left\{\left[\vec\ell_1 \cdot b_1 \cdot [\cos(\varphi_0 - æ z) - \cos\varphi_0] + \vec\ell_2 b_2 [\sin(\varphi_0 - æ z) - \sin\varphi_0]\right] - \right. \\ \qquad \left. - æ c\beta_0 \cdot (t - t_0) \cdot (\vec\ell_1 b_1 \sin\varphi_0 - \vec\ell_2 b_2 \cos\varphi_0)\right\}, \end{cases} \tag{I2}$$

где

$$\left\{ b_1 \,;\, b_2 \right\} = \frac{2}{N} \cdot \frac{I_0(æ r_0) \pm I_2(æ r_0)}{I_0(æ\rho_0) + I_2(æ\rho_0)} \tag{I3}$$

$\vec\ell_1$; $\vec\ell_2$ – единичные орты в перпендикулярной плоскости:

$$\vec\ell_1 = \frac{\vec r_0}{r_0} = \vec\ell_x \cdot \cos\varphi_0 + \vec\ell_y \cdot \sin\varphi_0 \,;\; \vec\ell_2 = \vec\ell_x \cdot \sin\varphi_0 - \vec\ell_y \cos\varphi_0 .$$

Из (7) и (I2) видно, что продольное движение остается равномерным, а поперечное представляет равномерное смещение (дрейф) эллиптической траектории. Центр эллипса перемещается в пространстве по прямой

$$\vec r = \vec r_0 + \vec\ell_z c\beta_0 (t - t_0) - \frac{\xi}{\gamma}\left\{c \cdot (t - t_0)(\vec\ell_1 \cdot b_1 \sin\varphi_0 - \vec\ell_2 \cdot b_2 \cdot \cos\varphi_0) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{æ\beta_0} \cdot \left(\vec\ell_1 \, b_1 \cos\varphi_0 + \vec\ell_2 \cdot b_2 \cdot \sin\varphi_0\right)\right\} , \tag{I4}$$

его оси ориентированы по $\vec\ell_1$ и $\vec\ell_2$, b_2 и b_1 – длины большой и малой осей соответственно. Дрейф исчезает при инжекции частицы под небольшим углом, когда

$$\vec\beta_0 = \beta_{z0} \vec\ell_z + \frac{\xi}{\gamma}\left(\vec\ell_1 \cdot b_1 \sin\varphi_0 - \vec\ell_2 \cdot b_2 \cdot \cos\varphi_0\right), \tag{I5}$$

При этом изменения равномерного продольного движения и поперечногоров эллипса из-за начальной поперечной скорости будут квадратичны по $\frac{\xi}{\gamma}$ и, следовательно, частица будет двигаться по винтовой линии, наматываемой на эллиптический цилиндр, ось которого параллельна оси z .

Таким образом, при инжекции под небольшим углом к оси ондулятора, электроны движутся по периодической траектории с периодом, не зависящим от начального поперечного отклонения, что позволяет обеспечить синхронизм с соответствующей электромагнитной волной.

Рассмотрим, наконец, как влияет на траекторию частицы отличие поля (2) от своего осевого значения (I) при движении вблизи оси ондулятора, В пределе $æ\rho \ll 1$ из (8) и (9) имеем:

$$\overset{(1)}{\vec{\beta}} = -\frac{\xi}{\gamma\cdot N\cdot I_1'(æ\rho_0)}\cdot\Big\{\vec{e}_x\cdot\sin æz + \vec{e}_y\cdot(1-\cos æz) + \vec{e}_z\cdot\frac{\beta_{\perp 0}}{\beta_{z0}}\cdot(\sin(\theta_0-æz)-\sin\theta_0) +$$
$$+\left(\frac{æ\rho}{2}\right)^2\cdot\cos(\varphi-æz)\cdot\Big[\vec{e}_x\cdot\sin\varphi-\vec{e}_y\cos\varphi-\vec{e}_z\frac{\beta_{\perp 0}\cdot r_0}{\beta_{z0}\cdot\rho}\sin(\varphi_0-\theta_0)-\qquad (I6)$$
$$-\left(\frac{æ r_0}{2}\right)^2\cdot\cos\varphi_0\cdot\Big[\vec{e}_x\cdot\sin\varphi_0-\vec{e}_y\cos\varphi_0-\vec{e}_z\frac{\beta_{\perp 0}}{\beta_{z0}}\sin(\varphi_0-\theta_0)\Big]\Big\},$$

$$\overset{(1)}{\vec{r}} = -\frac{\xi}{\gamma\cdot æ\beta_{z0}\cdot N\cdot I_1'(æ\rho_0)}\cdot\Big\{\vec{e}_x\cdot(1-\cos æz)-\vec{e}_y\cdot\sin æz+\vec{e}_z\frac{\beta_{\perp 0}}{\beta_{z0}}(\cos(\theta_0-æz)-\cos\theta_0)-\qquad (I7)$$
$$-\left(\frac{æ\rho}{2}\right)^2\cdot\sin(\varphi-æz)\cdot\Big[\vec{e}_x\sin\varphi-\vec{e}_y\cos\varphi-\vec{e}_z\frac{\beta_{\perp 0}r_0}{\beta_{z0}\rho}\sin(\varphi_0-\theta_0)+\left(\frac{æ r_0}{2}\right)^2\cdot$$
$$\cdot\Big[\sin\varphi_0-\beta_{z0}\cdot c\cdot(t-t_0)æ\cdot\cos\varphi_0\Big]\cdot\Big(\vec{e}_x\sin\varphi_0-\vec{e}_y\cos\varphi_0-\vec{e}_z\frac{\beta_{\perp 0}}{\beta_{z0}}\sin(\varphi_0-\theta_0)\Big)\Big\};$$

здесь члены в квадратных скобках описывают поправки к траектории осевого приближения, получаемые при применении поля (2).

В заключение благодарю Г.А.Нагорского и С.Г.Арутюняна за стимулирующие обсуждения и ценные замечания по работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Варфоломеев А.А. Лазеры на свободных электронах и перспективы их развития. Обзор. М.: Изд-во ИАЭ им.И.В.Курчатова, 1980.
2. Генераторы когерентного излучения на свободных электронах. /Под ред.А.А.Рухадзе. М.: Мир, 1983
3. Бухгольц Г. Расчет электрических и магнитных полей. М.: ИЛ, 1961.

Рукопись поступила 7 мая 1984 г.

А.А.ОГАНДЖАНЯН
О ДВИЖЕНИИ ЭЛЕКТРОНОВ В СПИРАЛЬНОМ ОНДУЛЯТОРЕ

Редактор Л.П.[illegible]
Технический редактор А.С.Абрамян

Подписано к печати 19/X-84 г.ВФ-11936 Формат 60х84/16
Офсетная печать,Уч.изд.л. 0.6 Тираж 299 экз. Ц.12 к.
Зак.тип.№ [illegible] Индекс 3624

Отпечатано в Ереванском физическом институте
Ереван 36, Маркаряна [illegible]

индекс 3624

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ