

индекс 3624



ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЕФИ-795(22)-85

---

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ  
ИНФОРМАЦИИ И ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ  
ПО АТОМНОЙ НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

С.Р. ШАХАЗИЗЯН

ОДНОЦЕНТРОВАЯ ДВУХМЕРНАЯ СПИРАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ЕРЕВАН-1985

S.R. SHAHAZIZIAN

## ONE-CENTRE BIDIMENSIONAL SPIRAL GEOMETRY

In this paper it is shown that if one takes the all family of logarithmic spirals as a line on the Euclidean plane, where the Euclidean line and circumference appear as boundary case and from the large number of plane points one point, a particular one is singled out - this is a point of condensation, which at the same time belongs to all the lines, then a spiral geometry is constructed, where the length and square units for the external observer system are variable and they depend on both the distance up to the centre of condensation and on their position. In particular, when the existing distance from the centre of condensation tends to infinity, the spiral geometry correspondingly tends to Euclidean one. Generalizing one-centre bidimensional spiral geometry, it would be desirable in the future to construct not only one-centre geometry but also many-centre spiral geometry, where the number of centres will be defined from the conditions of physical problems.

Yerevan Physics Institute  
Yerevan 1985

Для построения геометрической модели спиралью прежде всего появляется острая необходимость введения системы внешнего наблюдателя ( $CB_H$ ), с помощью которой мы получим возможность извне исследовать строящуюся геометрию, основываясь уже на ранее достаточно знакомой геометрии Евклида. Имея, исходя из  $CB_H$ , некоторую конечную модель, перестроим её согласно системе внутреннего наблюдателя ( $CB_T$ ), где исследователь, будучи в пространстве, построенном этой геометрией, также будет строиться теми же законами. И, естественно, что представления ( $CB_H$ ) и ( $CB_T$ ) об одном и том же пространстве как качественно, так и количественно будут различными.

Возьмем евклидову плоскость и на ней построим некоторую двумерную геометрическую модель, в которой в качестве прямых возьмем семейство логарифмических спиралей с направленными центрами. Пока же будем работать в ( $CB_H$ ).

Таким образом, в качестве геометрических элементов имеем:

- 1) плоскость,
- 2) множество прямых,
- 3) множество точек,
- 4) центральную точку или точку сгущения (обозначим через точку 0).

Центральная точка или точка сгущения — это единственная, особая точка из всего множества точек, которая одновременно принадлежит всем прямым, т.е. произвольная прямая берет начало в точке  $O$ . Исключение составляет только окружность, для которой точка  $O$  является центром. Эту точку назовем также центром геометрии. Впоследствии, говоря о точке плоскости, не будем иметь в виду точку сгущения.

Вкратце напомним некоторые свойства логарифмической спирали, которыми воспользуемся в дальнейшем. Уравнение логарифмической спирали на плоскости в полярных координатах имеет вид:

$$R = \rho_0 q^{\frac{\varphi}{2\pi}}, \quad (1)$$

где  $\rho = OM$  — полярный радиус,  $q$  — коэффициент роста (рис.1). Когда  $q > 1$ , получается спираль правого вращения, когда же  $q < 1$ , — левого вращения; уравнение при этом обычно пишется:

$$R = \rho_0 e^{k\varphi}, \quad (2)$$

$$\text{где } k = \frac{\ln q}{2\pi} \quad (3)$$

и, наоборот,  $q = e^{2k\pi}$ , где  $k = ctg\alpha$ , а  $\alpha$  — угол, составленный полярным радиусом и касательной  $CB$ , проходящей через точку  $A$ , причем  $\alpha$  для данной кривой всегда остается постоянной. Непрерывно вращая  $OM$  в направлении, противоположном вращению спирали, точка  $M$  будет неограниченно приближаться к точке сгущения (на наших рисунках спираль условно соединим с точкой  $O$ ). Несмотря на бесконечные обороты, длина дуги с концами  $M$  и  $O$  стремится к конечному пределу  $\ell$  (доказано Торичелли).

$$\ell = \frac{R_M}{\cos\alpha}, \quad (4)$$

$$\text{а отрезок } AM \quad L = \frac{R_A - R_M}{\cos\alpha}, \quad (5)$$

где  $R_M$  и  $R_A$  — длины радиус-векторов точек  $M$  и  $A$ . Площадь, которая получается в результате оборота  $OL$  радиус-вектора, когда  $L$ , начиная с некоторой точки  $M$ , бесконечно приближается к  $O$ , стремится к конечному пределу  $S$  и называется секториальной площадью. Она равна

$$S = \frac{1}{4} R_M^2 tg\alpha \quad (6)$$

$$S_{ADE} = \frac{1}{4} (R_A^2 - R_E^2) tg\alpha, \quad (7)$$

если угол  $AOB < 2\pi$ .

Радиус кривизны  $\rho$  прямо пропорционален радиус-вектору.

$$\rho = \frac{1}{\sin\alpha} \quad (8)$$

Прямые

В качестве прямой по  $(CB_H)$  возьмем на плоскости введенную в полярных координатах логарифмическую спираль:

$$R = \rho_0 e^{k\varphi},$$

где  $K$  принимает  $[-\infty \div +\infty]$  значения. В предельных случаях, когда  $K = \pm \infty$ , прямая будет точно евклидовой прямой, а при  $K = 0$  — евклидовой окружностью. Таким образом, как евклидова прямая, так и окружность, выступают в качестве предельного случая нашего множества прямых.

В пространстве через произвольную точку  $M$  можно провести прямые мощностью континуума (рис.2).

Через две произвольные точки  $A$  и  $B$  на плоскости можно провести счетное число прямых (рис.3). Если  $A(R_1, \varphi_1)$  и  $B(R_2, \varphi_2)$ , где  $R_1 = \rho_0 e^{k\varphi_1}$  и  $R_2 = \rho_0 e^{k(\varphi_2 + 2\pi n)}$

а  $\varphi_2 - \varphi_1 = \psi$ , то  $\varrho_n \left( \frac{R_2}{R_1} \right) = K(\psi + 2n\pi)$ ,  
 где  $n$  - число оборотов, которое принимает только положительные  
 целые значения (0, 1, 2, 3...); отсюда для  $K_i$  получим

$$K_i = \frac{\varrho_n \left( \frac{R_2}{R_1} \right)}{\psi + 2\pi n_i}, \quad (9)$$

т.е. каждому  $n$  соответствует свое  $K_i$ .

Для того, чтобы через три точки провести прямую, необходи-  
 мо, чтобы имело место уравнение:

$$n_2 = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\varrho_n \left( \frac{R_3}{R_2} \right) (\psi + 2\pi n_1) - \theta}{\varrho_n \left( \frac{R_2}{R_1} \right)} \right], \quad (10)$$

где  $n_1$  и  $n_2$  могут быть произвольные целые числа (рис.3).  
 Отсюда следует, что для любых трех точек всегда найдется такая  
 одна прямая, которая пройдет через предварительно малые произ-  
 вольные области  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$ , построенные вокруг точек А, В  
 и С или через две из них и любую малую  $\varepsilon$  область третьей точки.  
 Действительно, поскольку в уравнении (10)  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $\psi$  и  $\theta$   
 заранее известны, нам остается, увеличивая число оборотов  $n_1$ ,  
 найти соответствующее  $n_2$ , которое будет целым числом. И так  
 как точка С будет находиться между двумя витками или на вит-  
 ке, то, увеличивая число оборотов, которое приведет к уменьше-  
 нию имеющегося расстояния между витками, из этого следует, что  
 для произвольного  $\varepsilon$  можно будет найти такое  $n_1$ , что два  
 витка, вмещающих в себя С, пройдут через  $\varepsilon$  - область.

#### Параллельные прямые

Произвольные две прямые, которые не имеют общей точки, назы-  
 ваются параллельными прямыми или просто параллелями. Так как две

спирали не пересекаются, если их коэффициенты  $K$  будут равны,  
 то прямая  $\alpha$  параллельна прямой  $\beta$  только и единственно в  
 том случае, если  $K_\alpha = K_\beta$  (рис.4).

Параллельный перенос прямой в плоскости означает поворот  
 вокруг точки сгущения. Исключение составляет прямая  $K=0$  (ок-  
 ружность), в случае которой строится отличная от прежней ради-  
 усом, но с тем же центром 0, окружность.

Две произвольные непараллельные прямые имеют счетное мно-  
 жество точек пересечения (рис.5). Исключение составляет прямая  
 $K=0$  (окружность), с которой произвольная непараллельная прямая  
 пересекается в одной точке (рис.5).

#### Луч и отрезок

Ограниченную с одной стороны прямую назовем лучом или по-  
 лупрямой (рис.6а)  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  - лучи, а ограничивающие то-  
 чки - соответственно вершины. Часть прямой, ограниченной с двух  
 сторон, назовем отрезком и обозначим через АВ, где А и В - вер-  
 шины (рис.6б). Очевидно, что согласно (СВ<sub>Н</sub>) на одной и той  
 же прямой нет двух, в евклидовом смысле, конгруэнтных относи-  
 тельно друг друга отрезков. Отрезки могут иметь одну длину, но  
 не быть конгруэнтными из-за различных радиусов кривизны. Ис-  
 ключение составляют прямые  $K=0$  и  $K=\pm\infty$ . Отрезок АВ тем более  
 не конгруэнтен ВА, т.е. даже переворачивая отрезок, он не сов-  
 падает сам с собой - концы отрезка не однозначны.

Через две точки можно провести счетное число попарных от-  
 резков с различными линейными размерами, например, на рис.3  
 через точки  $A(R_1, \varphi_1)$  и  $B(R_2, \varphi_2)$  проведены два отрезка,  
 эти линейные длины  $\ell$  равны

$$\rho_i = \frac{R_2 - R_1}{\cos \left( \arctg \frac{\psi + 2\pi n_i}{\rho_n \frac{R_2}{R_1}} \right)}, \quad (\text{II})$$

где  $\psi = \varphi_2 - \varphi_1$ , а  $n_i$  - число оборотов. Такое множество отрезков с одной стороны будет ограничено самым коротким отрезком, случай  $n = 0$ . Длину отрезка назовем расстоянием между крайними точками (концами), если число оборотов равно  $n$ .

Геометрию, строящуюся в локальной части плоскости, в которой будут использованы кратчайшие отрезки (оборот  $n = 0$ ), мы назовем геометрией наикратчайших расстояний.

### Геометрические фигуры

Геометрические фигуры разделим на два типа:

1. Центральные геометрические фигуры, которые содержат в себе точку сгущения.
2. Нецентральные геометрические фигуры, которые не содержат точку сгущения.

### Центральный угол

Угол, составленный двумя параллелями А и В, назовем центральным (рис. 7а).

Угол, составленный радиус-векторами, проходящий через вершину отрезка, назовем опорным углом. На рис. 6б  $\varphi$  - опорный угол СД.

Размерность этих двух углов будет определяться известным нам способом, полный угол (когда прямая при повороте совпадает сама с собой) принимаем равным 360 градусам.

### Нецентральный угол

Построенную выходящими из одной и той же точки лучами фигуру назовем нецентральным углом или просто углом (рис. 8). Лучи будут сторонами угла, а точка - вершиной. Так, с помощью пересечения двух произвольных прямых можно построить четыре угла  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  (рис. 9а). Два угла, имеющих одну общую сторону, назовем смежными углами:  $\angle \alpha$  смежен с  $\angle \beta$ . Если две стороны угла лежат на одной прямой, то такой угол назовем развернутым, а его значение будет равно  $180^\circ$ .

$$\angle \alpha + \angle \beta = \angle \beta + \angle \gamma = \angle \gamma + \angle \delta = \angle \delta + \angle \alpha = 180^\circ \quad (\text{рис. 9а})$$

$$\angle \alpha + \angle \beta = \angle \gamma; \quad \angle \alpha = \angle \gamma - \angle \beta \quad (\text{рис. 9б})$$

Понятие значения угла определим следующим образом: поскольку угол  $\alpha$ , составленный радиус-вектором и касательной, проходящей через произвольную точку логарифмической спирали, для данной спирали всегда один и тот же и обусловлен  $K = \text{ctg} \alpha$ , где  $K$  - в уравнении логарифмической спирали коэффициент, определяющий спираль, а радиус-вектор фактически  $K = \infty$ , т.е. спираль, где  $\alpha = 0$ , то  $\angle \alpha$  и будет значением угла. В дальнейшем вместо прямой (спирали) с коэффициентом  $K$  можно также говорить о прямой с углом  $\alpha$ , например, на рис. 10 - прямая  $60^\circ$ , окружность -  $90^\circ$ , а радиус-вектор (евклидова прямая) - прямая нулевого градуса и т.д.

Итак, любая прямая содержит в себе прежде всего понятие угла, который выявляется при пересечении с другой прямой, например, рис. 9б: прямые  $a, b, c$  - спирали соответствующих градусов  $\mu_1^\circ, \mu_2^\circ, \mu_3^\circ$ .

$$\begin{aligned}\angle \alpha &= \mu_1^\circ + \mu_2^\circ = \operatorname{arctg} K_1 + \operatorname{arctg} K_2 \\ \angle \gamma &= \mu_1^\circ + \mu_3^\circ = \operatorname{arctg} K_1 + \operatorname{arctg} K_3 \\ \angle \beta &= \mu_3^\circ - \mu_2^\circ = \operatorname{arctg} K_3 - \operatorname{arctg} K_2\end{aligned}\quad (I2)$$

Вращать прямую вокруг некоторой точки  $M$  означает перемещать прямую так, чтобы все точки, составляющие эту прямую, перемещались по некоторому закону, кроме одной точки  $M$ , которая и будет точкой вращения. Очевидно, что поворот прямой (пусть, например, это прямая  $\alpha^\circ$ ) вокруг какой-либо точки  $M$  на угол  $\beta^\circ$  означает: через точку  $M$  провести какую-то новую спираль  $\gamma^\circ$  (прямую), где  $\gamma = \alpha + \beta$  (рис.2).

По аналогии аксиом для отрезков в евклидовой геометрии в нашей геометрии будет весьма целесообразно ввести для угла также аксиомы полноты и измерения.

Аксиома измерения или аксиома Архимеда для угла:

Пусть даны углы  $\angle BMA$  и  $\angle CM\mathcal{D}$ , с помощью вершины  $M$  и луча  $MA$  можно построить конечное число смежных углов, равное углу  $\angle CM\mathcal{D}$  ( $\angle AMA_1, \angle A_2MA_3, \angle A_3MA_4 \dots, \angle A_{n-1}MA_n$ ) так, что луч  $BM$  окажется внутри угла  $\angle A_nMA_{n-1}$  (рис.II).

Аксиома полноты для угла:

Пусть дано бесконечное количество углов с вершиной  $M$  ( $\angle A_1MB_1, \angle A_2MB_2 \dots, \angle A_nMB_n$ ), где каждый последующий находится внутри предыдущего. И для заданного произвольного угла найдется такое  $n$ , что  $\angle A_nMB_n$  будет меньше его, то существует такая прямая  $MX$ , которая пройдет через все эти углы  $\angle A_1MB_1, \angle A_2MB_2 \dots \angle A_nMB_n \dots$  (рис.I2).

#### Центральный треугольник

Центральный треугольник строится из двух параллелей и

пересекающей их прямой (рис.7)  $K_1 = K_2 \neq K_3$ , т.е.  $\angle \beta = \angle \gamma \rightarrow \angle \alpha + \angle \beta = 180^\circ$ . Итак, сумма лежащих в основании центрального треугольника смежных углов всегда равна  $180^\circ$ , а  $\varphi$  ( $0-360$ ) $^\circ$ . Когда  $K_1 = K_2 = -K_3 \Rightarrow a + b = c$ , т.е. сумма двух сторон равна третьей. Когда  $K_1 = K_2 = -K_3 = 1$ , то  $\angle \alpha = \angle \beta = 90^\circ$ . Интересно отметить, что отношения сторон центрального треугольника зависят только от угла  $\varphi$  и не зависят от расстояния  $R$ .

Итак,

$$\begin{aligned}\frac{b}{c} &= f(\varphi) = \left(1 - e^{-\varphi \frac{K_1 K_3}{K_1 + K_3}}\right) \frac{\cos \gamma_1}{\cos \gamma_2} \\ \frac{a}{c} &= F(\varphi) = e^{-\varphi \frac{K_1 K_3}{K_1 + K_3}} \\ \frac{a}{b} &= G(\varphi) = \left(e^{-\varphi \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}} - 1\right) \frac{\cos \gamma_1}{\cos \gamma_2}\end{aligned}\quad (I3)$$

и когда  $K_1 = K_2 = -K_3$ , то  $f(\varphi) + F(\varphi) = 1$ .

#### Нецентральный треугольник

Фигуру  $ABC$ , полученную путем пересечения трех прямых  $K_\alpha, K_\beta, K_\gamma$ , когда каждая из них пересекает две остальные, назовем нецентральным треугольником или просто треугольником (рис.I3).  $AB, BC$  и  $CA$  будет сторонами треугольника, а  $A, B$  и  $C$  - вершинами.

Сумма внутренних углов произвольного нецентрального треугольника равна  $180^\circ$ .

$$\angle 1 = \gamma - \beta; \quad \angle 2 = 180^\circ - (\alpha + \gamma); \quad \angle 3 = \alpha + \beta$$

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \gamma - \beta + 180 - \alpha - \gamma + \alpha + \beta = 180^\circ$$

Если один из углов треугольника равен  $90^\circ$  (в данном случае на рис.I3  $\angle \alpha + \angle \beta = 90^\circ$ ), то такой треугольник называется

прямоугольным. Если же все углы в треугольнике равны друг другу, то такой треугольник назовем правильным.

#### Четырехугольник

Геометрическую фигуру, имеющую четыре стороны, четыре вершины, четыре угла, назовем четырехугольником. Четырехугольники бывают:

1. Прямоугольные, когда  $K_1 = K_2$  и  $K_3 = K_4 \Rightarrow a \parallel b$ ;  $d \parallel c$  и  $\angle \alpha = \angle \beta = \angle \gamma = \angle \delta = 90^\circ$ . (рис. I4 а, б, в).

Сумма внутренних углов произвольного четырехугольника равна полному углу  $360^\circ$ , так как произвольный четырехугольник можно разделить на два треугольника.

2. Параллелограмм, когда  $(K_1 = K_2) \neq (K_3 = K_4)$  и  $\alpha \neq \beta \neq 90^\circ$   $a \parallel b$ ;  $d \parallel c$  и  $a \neq c$ ;  $d \neq b$ . (рис. I4 г)

3. Трапеция, когда  $K_1 = K_2 \neq K_3 \neq K_4$ , т.е.  $a \parallel b \neq c \neq d$  (рис. I4, д, е).

#### Правильные многоугольники

В евклидовой геометрии многоугольник, имеющий одинаковые стороны и равные углы, называется правильным или равносторонним. Поскольку в нашем случае равенство отрезков еще не выяснено и не определено, тем более, что согласно СВ<sub>Н</sub> на одной и той же прямой нет двух конгруэнтных отрезков, то для построения правильного многоугольника по аналогу евклидовой геометрии воспользуемся только равенством углов и свойствами диагоналей.

Таким образом, правильным назовется такой многоугольник, чьи внутренние углы будут равны друг другу, а диагонали, соединяющие противоположные углы, будут делить их пополам, если

число углов четное, а диагональ, делящая угол пополам, перпендикулярна противоположащей стороне, если число углов нечетное. Все биссектрисы должны пересекаться в одной точке.

Некоторые правильные многоугольники:

- а) правильный треугольник (рис. I5),
- б) правильный четырехугольник или квадрат (рис. I6),
- в) правильный пятиугольник (рис. I7),
- г) правильный шестиугольник (рис. I8),
- д) правильный двенадцатиугольник (рис. I9)

#### Нецентральная окружность

Окружностью называется такой правильный многоугольник, число сторон которого, а также углов стремится к бесконечности. Центром окружности будет точка пересечения биссектрис углов, на рис. I9 точка М. Поскольку вершины многоугольника будут расположены на окружности, то каждая диагональ, делящая угол пополам, и будет диаметром нашей окружности, а расстояние от вершины биссектрисы до точки пересечения М будет радиусом окружности. Здесь особенно бросается в глаза тот факт, что, согласно СВ<sub>Н</sub>, радиусы нашей окружности линейно не равны друг другу и даже более того, и видом отличаются друг от друга, так как они строятся вращением прямых вокруг точки М, т.е. разными спиралями. И достаточно естественно будет звучать, если мы эту окружность примем для СВ<sub>Н</sub> за единичную, т.е. все радиусы для внутреннего наблюдателя будут равны друг другу и иметь единичную длину. Таким образом, с точки зрения СВ<sub>Н</sub>, в нашей геометрии единица длины будет переменной как линейно, так и видом, и будет зависеть как от имеющегося расстояния до точки сгущения,

так и от угла, образованного при прохождении прямой нулевого порядка через точку сгущения и точку М ( $\angle AMB = \beta$ ), т.е. от положения. И будет определяться следующим выражением:

$$\rho_{\beta} = \frac{R_0 \left[ 1 - \left( \frac{R_1}{R_0} \right)^{\cos \beta} \right]}{\cos \beta} \quad (I4)$$

Некоторые свойства геометрических фигур

Для произвольного параллелограмма, в соответствии с правилом центрального треугольника, одна сторона посредством своей противоположной стороны и расстояния  $\rho$  от центра сгущения выразится так (рис.2):

$$\frac{\beta}{\rho} = \frac{\beta'}{\rho + a} = G(\varphi) \Rightarrow \beta' = \beta \left( 1 + \frac{a}{\rho} \right), \quad (I5)$$

$$\frac{a}{L} = \frac{a'}{L + \beta} = G(\varphi) \Rightarrow a' = a \left( 1 + \frac{\beta}{L} \right), \quad (I6)$$

и так как  $\frac{\beta}{\rho} = \frac{(R_3 - R_1) \cos \alpha}{\cos \beta \cdot R_2} = \left( \frac{R_3}{R_1} - 1 \right) \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$ ,

$$\frac{\beta'}{\rho + a} = \frac{(R_2 - R_4) \cos \alpha}{\cos \beta \cdot R_4} = \left( \frac{R_2}{R_4} - 1 \right) \frac{\cos \alpha}{\cos \beta},$$

то

$$\frac{R_3}{R_1} = \frac{R_2}{R_4} \Rightarrow R_1 R_2 = R_3 R_4, \quad (I7)$$

когда  $|K_1| = |K_2| = 1 \Rightarrow \alpha = \beta = 45^\circ$ , то в случае прямоугольника

$$\beta' = \beta \left( 1 + \frac{a}{\rho} \right) \text{ и } a' = a \left( 1 + \frac{\beta}{L} \right) \quad (I8)$$

в случае же квадрата, так как  $a = \beta \Rightarrow a' = \beta'$ , то

$$a' = a \left( 1 + \frac{a}{\rho} \right) \quad (I9)$$

Рассмотрим прямоугольник ABCD (рис.2I), вершины которого соединены прямыми BD и AC. А  $\alpha, \alpha'$  и  $\beta, \beta'$  - стороны, c и d - диагонали, которые являются спиралями соответствующих углов, так  $\alpha, \alpha'$  - спираль  $\alpha^\circ$ ,  $\beta, \beta'$  -  $\beta^\circ$ , c -  $\gamma^\circ$  и d -  $\mu^\circ$ , а  $R_1, R_2, R_3, R_4$  - радиус-векторы соответствующих вершин.

И так как

$$\alpha = \frac{R_3 - R_1}{\cos \alpha} \Rightarrow R_3 - R_1 = \alpha \cos \alpha$$

$$\beta' = \frac{R_2 - R_3}{\cos \beta} \Rightarrow R_2 - R_3 = \beta' \cos \beta$$

$$c = \frac{R_2 - R_1}{\cos \gamma} \Rightarrow R_2 - R_1 = c \cos \gamma,$$

то для произвольного треугольника ABC

$$c \cos \gamma = \alpha \cos \alpha + \beta' \cos \beta \quad (20)$$

$$c \cos \gamma = \alpha' \cos \alpha + \beta \cos \beta \quad (21)$$

(аналог Пифагора)

Когда ADBC - прямоугольник  $\angle \alpha + \angle \beta = 90^\circ \Rightarrow \cos \alpha = \sin \beta$ ,

то для прямоугольного треугольника

$$c \cos \gamma = \alpha \cos \alpha + \beta' \sin \alpha \quad (22)$$

$$c \cos \gamma = \alpha \sin \beta + \beta' \cos \beta \quad (23)$$

$$d \cos \mu = \beta \cos \beta - \alpha \cos \alpha \quad (24)$$

$$d \cos \mu = \beta' \cos \beta - \alpha' \cos \alpha \quad (25)$$

в случае квадрата, когда  $\alpha + \beta = 90^\circ$ ,  $\gamma + \mu = 90^\circ$ , имеем:

$$\beta + \gamma = 45^\circ \quad c \cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{2}} (\cos \beta + \sin \beta)$$

$$\gamma = 45^\circ - \beta$$

$$\mu = 45^\circ + \beta \quad c = \sqrt{2} \left[ a \left( \frac{\sin \beta}{\cos \beta + \sin \beta} \right) + b' \left( \frac{\cos \beta}{\cos \beta + \sin \beta} \right) \right] \quad (26)$$

### Квадрат

Произвольный прямоугольник назовем квадратом, если диагонали будут делить соответствующие углы пополам.

Для построения квадрата (рис. 21) сначала проведем взаимно перпендикулярные прямые  $a$  и  $b$ , т.е.  $\alpha + \beta = 90^\circ$ . Возьмем на прямой  $b$  из точки  $AO = R_1$ , отрезок  $AB$ , а  $OB = R_3$  и, поскольку  $\angle OBA = 45^\circ$ , проведем через точку  $B$  прямую  $K = ctg \mu$ , где  $\mu = \alpha + 45^\circ$ , тогда прямая  $d$  пересечет  $a$  в точке  $D$ , и полученный отрезок  $DA$  будет другой стороной квадрата.

Затем через точку  $D$  возведем перпендикуляр  $a$ , а через точку  $B$  - перпендикуляр  $b$ , которые пересекутся в точке  $C$ . Полученную фигуру  $ABCD$  назовем квадратом. Нам остается доказать, что проведенная через точки  $C$  и  $A$  прямая  $c$  также окажется делящей угол пополам, т.е.  $\gamma = 45^\circ - \alpha$ .

Доказательство: имеем  $R_1, R_3, \alpha, \alpha + \beta = 90^\circ$  и  $\mu = \alpha + 45^\circ$ . Надо доказать, что  $\gamma = 45^\circ - \alpha$ .

$$\ln \frac{R_4}{R_1} = ctg \beta \cdot \varphi_1; \quad \ln \frac{R_3}{R_1} = ctg \alpha \cdot \varphi_2; \quad \ln \frac{R_3}{R_4} = ctg \mu (\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ln R_4 - \ln R_1 = ctg \beta \cdot \varphi_1 \\ \ln R_3 - \ln R_2 = ctg \alpha \cdot \varphi_2 \end{array} \right\} \ln R_3 - \ln R_4 = ctg \varphi_2 - ctg \beta \varphi_1 = \ln \frac{R_3}{R_4}$$

$$ctg \alpha \cdot \varphi_2 - ctg \beta \varphi_1 = ctg \mu (\varphi_1 + \varphi_2) \quad \varphi_2 = ctg \alpha \ln \frac{R_3}{R_4}$$

$$\varphi_2 (ctg \alpha - ctg \mu) = \varphi_1 (ctg \mu + ctg \beta)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= ctg \alpha \cdot \left( \ln \frac{R_3}{R_1} \right) \cdot \frac{ctg \alpha - ctg \mu}{ctg \mu + ctg \beta} = \left( \ln \frac{R_3}{R_1} \right) ctg \alpha \frac{ctg \alpha - ctg (\alpha + 45)}{ctg (\alpha + 45) + ctg \alpha} = \\ &= \ln \frac{R_3}{R_1} \cdot \frac{(1 + tg^2 \alpha)}{(1 + tg^2 \alpha)} = \ln \frac{R_3}{R_1} \implies \varphi_1 = \ln \frac{R_3}{R_1} \end{aligned}$$

и поскольку для параллелограмма имеем, что

$$R_1 \cdot R_2 = R_3 \cdot R_4 \implies R_2 = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_1}$$

то

$$\ln \frac{R_2}{R_4} = ctg \alpha \varphi_1 = \ln \frac{R_3}{R_1} = \varphi_1 \implies \varphi_1 = tg \alpha \cdot \varphi_1$$

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = ctg \gamma (\varphi_1 - \varphi_1) \implies ctg \gamma = \frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{\varphi_1 (1 - tg \alpha)} \implies \ln R_4 = tg \alpha \varphi_1 + \ln R_1$$

и поскольку

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = \ln \frac{R_3 \cdot R_4}{R_1 \cdot R_1} = \ln R_3 + \ln R_4 - \ln R_1 - \ln R_1 =$$

$$= \ln \frac{R_3}{R_1} + tg \alpha \cdot \varphi_1 = \varphi_1 (1 + tg \alpha)$$

$$ctg \gamma = \frac{1 + tg \alpha}{1 - tg \alpha} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\sqrt{2} \cos (45 - \alpha)}{\sqrt{2} \sin (45 - \alpha)} = ctg (45 - \alpha) \implies$$

$$\gamma = 45^\circ - \alpha$$

Итак, доказано, что  $\gamma = 45^\circ - \alpha$

### Теорема Дезарга

Если два треугольника расположены на плоскости таким образом, что прямые, соединяющие соответствующие вершины, параллельны друг другу или пересекаются в одной точке, и если две соответствующие стороны попарно параллельны друг другу, то и третья пара сторон также будет параллельна друг другу (рис. 22).

Действительно, в треугольнике  $abc$  имеем:

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = K_1 \varphi_1; \quad \ln \frac{R_3}{R_1} = K_2 \psi_2; \quad \ln \frac{R_3}{R_2} = K_3 (\varphi_2 + \psi_2)$$

а для треугольника  $a'b'c'$

$$\ln \frac{P_2}{P_1} = K_1 \varphi_1; \quad \ln \frac{P_3}{P_1} = K_2 \psi_2; \quad \ln \frac{P_3}{P_2} = K_4 (\varphi_1 + \psi_2),$$

с другой стороны

$$\ln \frac{R_3}{R_2} = K_2 \psi_2 - K_1 \varphi_1; \quad \ln \frac{P_3}{P_2} = K_2 \psi_2$$

откуда следует, что

$$\ln \frac{R_3}{R_2} = \ln \frac{P_3}{P_2}$$

Таким образом,

$$K_3 (\varphi_1 + \psi_2) = K_4 (\varphi_1 + \psi_2)$$

Итак  $K_3 = K_4$ .

#### Площади геометрических фигур

Воспользовавшись выражением для измерения секториальных площадей (6,7), достаточно легко можно посчитать с точки зрения СВ<sub>Н</sub> площадь произвольной геометрической фигуры. Например, площадь нецентрального треугольника равна:

$$S_{abc} = S_1 + S_2 - S_3,$$

где  $S_1$  - секториальная площадь отрезка  $b$ ,  $S_2$  - отрезка  $a$ , а  $S_3$  - отрезка  $c$ .

Итак, площадь произвольного треугольника равна (рис.23)

$$S_{abc} = \frac{1}{4} [R_3^2 (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) - R_2^2 (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma) - R_1^2 (\operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha)] \quad (27)$$

Площадь произвольного четырехугольника  $ABCD$  (рис.24) равна

$$S = \frac{1}{4} [(R_2^2 - R_3^2) \operatorname{tg} \mu + (R_2^2 - R_4^2) \operatorname{tg} \gamma - (R_3^2 - R_1^2) \operatorname{tg} \beta - (R_4^2 - R_1^2) \operatorname{tg} \alpha] \quad (28)$$

в случае параллелограмма  $\alpha = \mu$  и  $\beta = \gamma$

$$S = \frac{1}{4} \{ [(R_2 - R_1)^2 - (R_4 - R_3)^2] (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \} \quad (29)$$

или то же самое

$$S = \frac{1}{4} [(a \cos \alpha + b' \sin \alpha)^2 - (b \sin \alpha - a \cos \alpha)^2] (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta),$$

в случае прямоугольника, когда  $\alpha + \beta = 90^\circ$

$$S = \frac{1}{4} \{ (a \cos \alpha + b' \sin \alpha)^2 - (b \sin \alpha - a \cos \alpha)^2 \} \left( \frac{1}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha} \right), \quad (30)$$

в случае параллелограмма

$$S = a \cdot b \left( 1 + \frac{b}{2L} \right) \left( 1 + \frac{a}{2l} \right) \sin (\alpha + \beta), \quad (31)$$

в случае прямоугольника

$$S = a \cdot b \left( 1 + \frac{b}{2L} \right) \left( 1 + \frac{a}{2l} \right) \quad (32)$$

в случае квадрата, когда  $K = 1 \Rightarrow L = l$  и  $\alpha = \beta$

$$S = a^2 \left( 1 + \frac{a}{2l} \right)^2 \quad \text{или} \quad S = \left( \frac{a+a'}{2} \right)^2 \quad (33)$$

для произвольного квадрата

$$S = \frac{1}{4} \left[ (c^2 + d^2) + \frac{c^2 - d^2}{2 \cos \beta \cdot \sin \beta} \right], \quad (34)$$

где  $c$  и  $d$  - диагонали,

и когда  $\beta = 45^\circ$

$$S = \frac{1}{2} c^2. \quad (35)$$

Очевидно, что когда  $l, L$  стремится к бесконечности, то площадь стремится к евклидовому виду.

### Координатная система

#### Единицы длины и площади

Работая в какой-то части плоскости спиральной геометрии, скажем, в области  $S$  (рис.25), необходимо будет построить аналог декартовой системы для данной области  $S$ , чтобы для каждой геометрической фигуры не считать его расстояния  $\ell$  от центра сгущения. В качестве координатной системы возьмем две взаимно перпендикулярные прямые, точка их пересечения будет началом координат, место которых заранее будет задано радиус-вектором  $R$  и углом поворота  $\psi$  (рис.26), прямые  $x$  и  $y$  будут ординатами. А теперь нам необходимо выбрать единицу длины. Отсечем на оси  $x$  произвольный отрезок  $a$ , одна из вершин которого будет точкой  $M$ , построим на осях  $x$  и  $y$  квадрат, одна из сторон которого будет  $a$ , проведем соответственно параллели  $x$  и  $y$ . К полученному квадрату пристроим с обеих сторон следующие два квадрата и так далее. Таким образом, плоскость  $xy$  мы разделим на клетки посредством параллелей и взаимно перпендикулярных прямых, и, как видно из рис.26, стороны квадрата линейно не будут равны друг другу и меняются по следующему закону.

$$\begin{aligned}
 K_1 = K_2 = 1 & \quad a_1 = a \\
 & \quad a_2 = a_1 \left(1 + \frac{a_1}{2\ell}\right) \\
 & \quad a_3 = a_1 \left(1 + \frac{a_1}{2\ell}\right)^2 \\
 & \quad a_4 = a_1 \left(1 + \frac{a_1}{2\ell}\right)^3 \\
 & \quad \dots \\
 & \quad a_n = a_1 \left(1 + \frac{a_1}{2\ell}\right)^{n-1}
 \end{aligned} \tag{36}$$

Меняется также площадь каждого последующего квадрата.

$$S_{11} = a_1^2 \left(1 + \frac{a_1}{2\ell}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
 S_{12} &= a_1^2 \left(1 + \frac{a_1}{2\ell}\right) \cdot \left(1 + \frac{a_1}{2\ell}\right)^2 \\
 S_{13} &= a_1^2 \left(1 + \frac{a_1}{2\ell}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{a_1}{2\ell}\right)^4 \\
 S_{14} &= a_1^2 \left(1 + \frac{a_1}{2\ell}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{a_1}{2\ell}\right)^6 \\
 S_{15} &= a_1^2 \left(1 + \frac{a_1}{2\ell}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{a_1}{2\ell}\right)^8
 \end{aligned} \tag{37}$$

Отсюда естественно предположить, что для  $CB_H$  отрезки  $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$  можно будет рассматривать в качестве единицы длины, которые для внутреннего наблюдателя будут постоянны. Аналогично и площади для  $CB_H$  будут выступать в роли единицы площади, т.е. внутренний наблюдатель со своей линейкой, перемещаясь по оси  $x$ , изменяется так же, как и единица длины. Именно поэтому измеряемая единица будет постоянной. Учитывая свойства радиуса нецентрального круга, можно обобщить, что согласно  $CB_H$  единица длины и единица площади в спиральной геометрии переменны и зависят как от места в пространстве, так и от положения.

Поворот квадрата в плоскости вокруг какой-либо вершины (рис.28) показывает, как меняется геометрическая фигура в зависимости от расстояния и положения относительно центра сгущения.

#### Связь между единицей длины и углом опоры

Как было видно с позиции внутреннего наблюдателя, единица выбранной длины относительно внешнего наблюдателя, переменная, однако полезно отметить, что углы опоры  $\psi_n$ , составленные из отрезков единичной длины, постоянные и зависят только от условно-выбранной единицы  $a$  (рис.29).

Угол опоры равен  $\varphi = \operatorname{tg} \alpha \ln \frac{R_2}{R_1}$

$$a \quad \alpha_1 = \frac{R_2 - R_1}{\cos \alpha} \quad \text{и} \quad \ln \frac{R_2}{R_1} = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \varphi_1$$

$$\alpha_2 = \frac{R_3 - R_2}{\cos \alpha} \quad \text{и} \quad \ln \frac{R_3}{R_2} = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \varphi_2$$

чтобы  $\varphi_1 = \varphi_2$ , надо чтобы

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_3}{R_2}$$

Из квадрата  $\alpha_1 \beta' \alpha' \beta_1$  следует, что

$$R_1 \cdot R_6 = R_5 \cdot R_2 \implies \frac{R_6}{R_5} = \frac{R_2}{R_1},$$

а из параллелограмма  $d_1 a_2 d_2 a'_1$  следует, что

$$R_2 \cdot R_6 = R_5 \cdot R_3 \implies \frac{R_6}{R_5} = \frac{R_2}{R_1};$$

получается, что

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_3}{R_2} \implies \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \dots = \varphi_n.$$

Таким образом доказано, что угол опоры единицы длины остается постоянным как для внешнего наблюдателя, так и для внутреннего. Постоянство угла опоры для  $СВ_{ТН}$  и  $СВ_{НН}$  дает возможность сравнивать отрезки друг с другом без каких-либо перестановок.

Сумма углов опоры двух сторон произвольного треугольника равна углу опоры третьей стороны. Для треугольника ABC (рис.30) сумма углов опоры  $\alpha$  и  $\beta$  равна углу стороны  $c$ .

Фактически мы уже имеем одноцентровую двумерную спиральную геометрию на плоскости Евклида. Опираясь на двумерную модель, в дальнейшем надо будет построить также трехмерную пространственную модель, в которой в роли плоскости будут как сферические,

так и спиральные поверхности.

Физические задачи сами поднимают вопрос о том, что не следует ограничиваться одним центром сгущения и что в дальнейшем необходимо иметь геометрию с более чем одним центром сгущения, т.е. шаг за шагом необходимо строить многоцентровую спиральную геометрию, которая принесет с собой новые законы и свойства в зависимости от числа центров сгущения, от расстояния между ними и распределения, т.е. будем иметь систему взаимодействующих друг с другом одноцентровых геометрий.

Рукопись поступила 5 марта 1985 г.

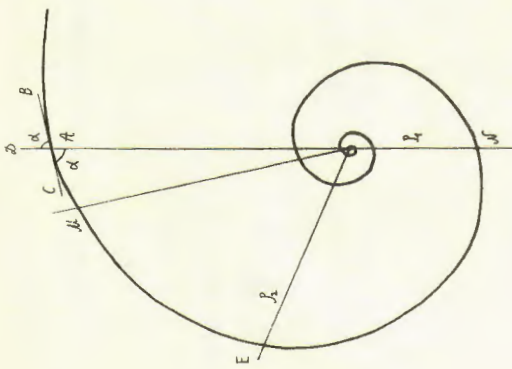


FIG. 1

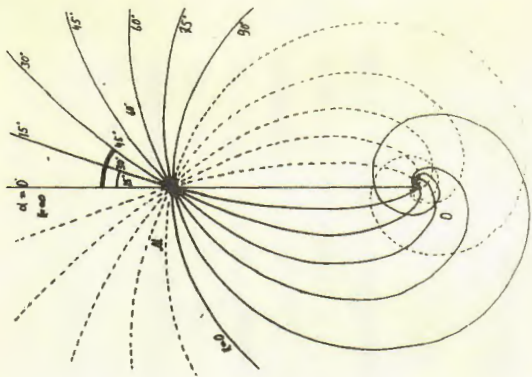


FIG. 2

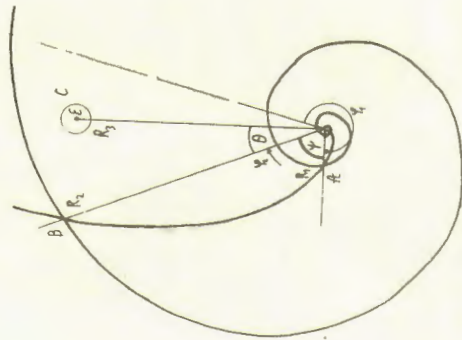
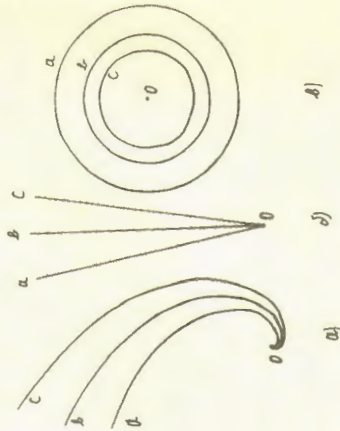


FIG. 3



a)

b)

c)

d)

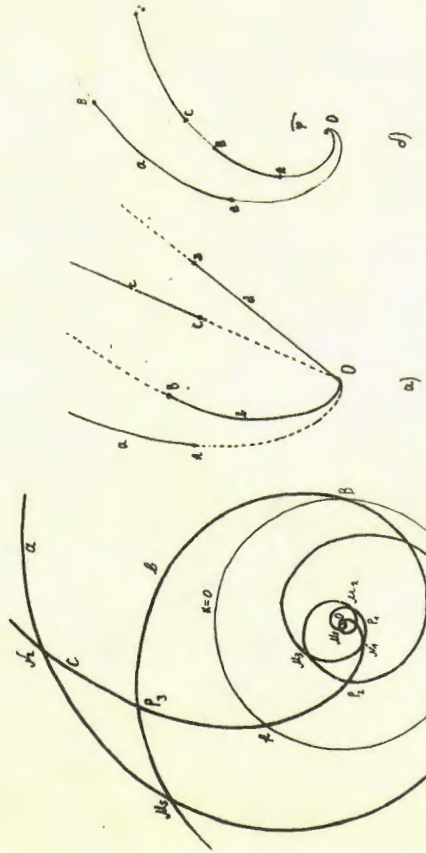
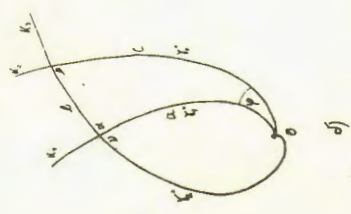
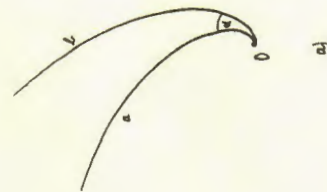


FIG. 5

FIG. 6



d)



a)

FIG. 7:

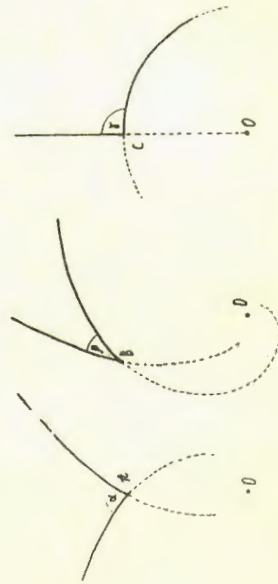


FIG. 8

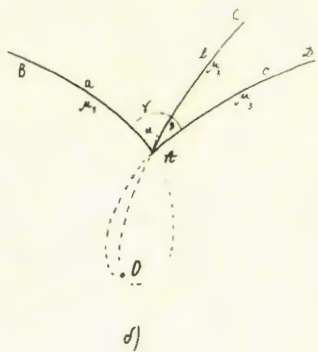
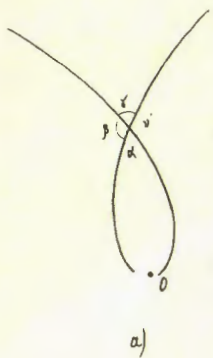


Рис. 9

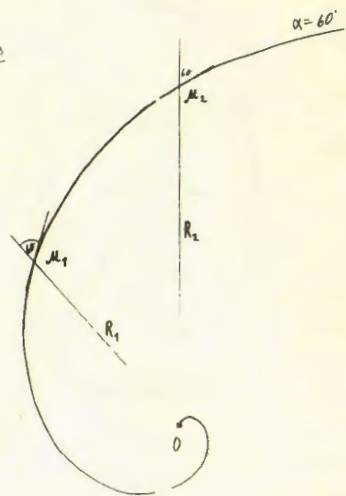


Рис. 10

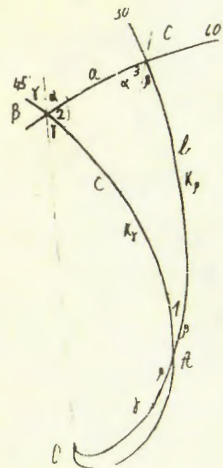


Рис. 13

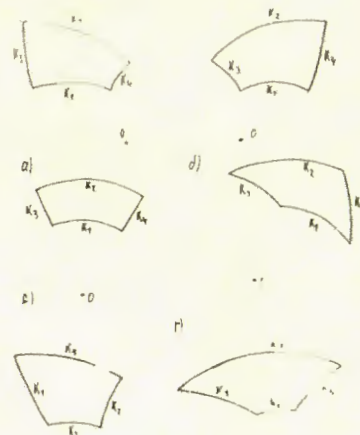


Рис. 14

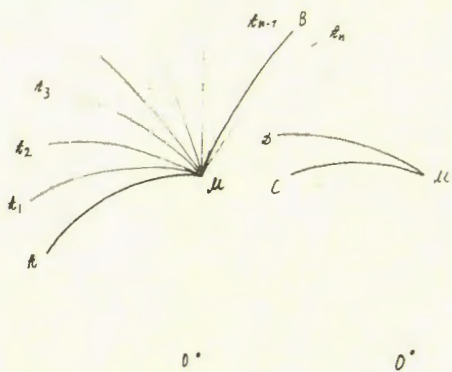


Рис. 11

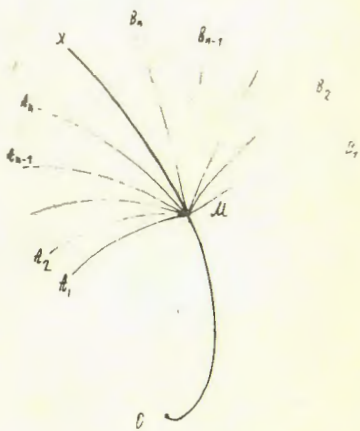


Рис. 12

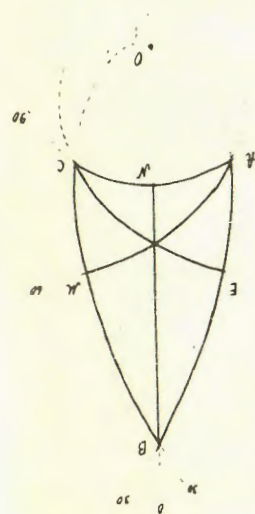


Рис. 15

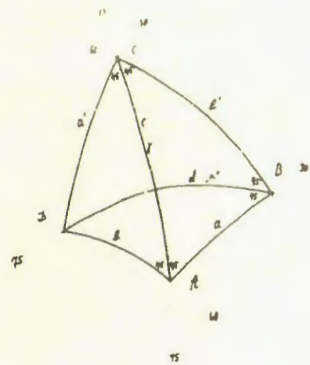
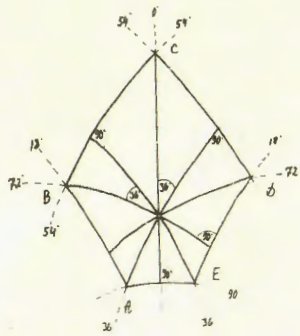
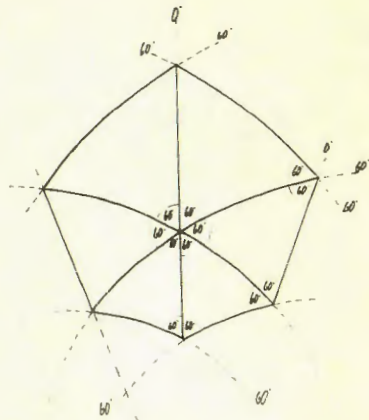


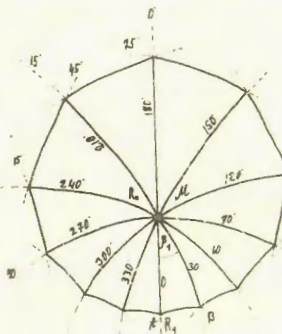
Рис. 16



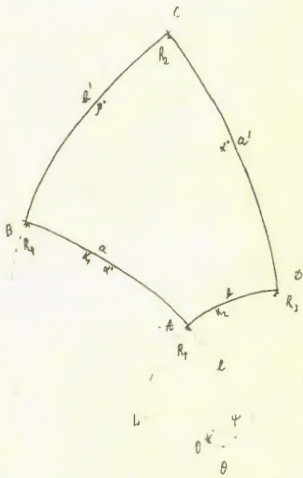
• G  
Pис. 17



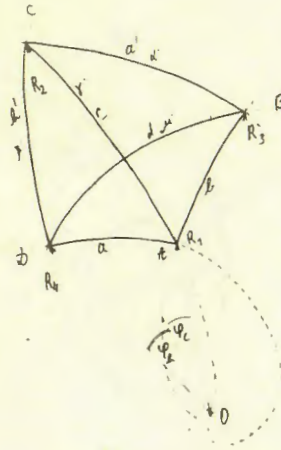
• O  
Pис. 18



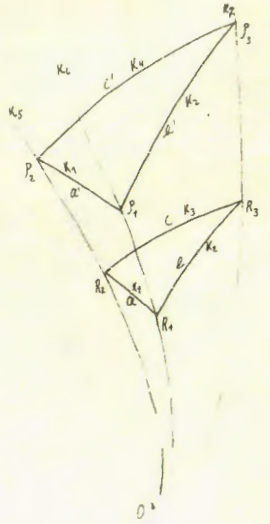
• O  
Pис. 19



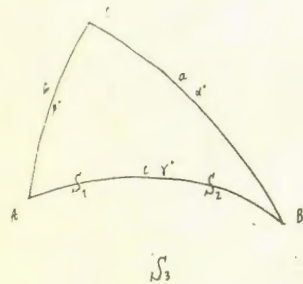
• O  
Pис. 20



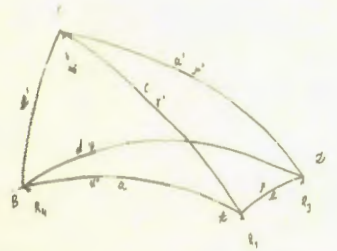
• O  
Pис. 21



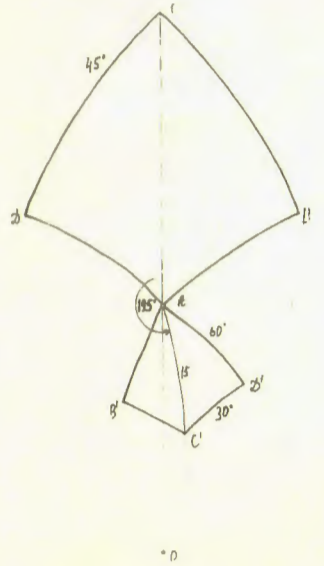
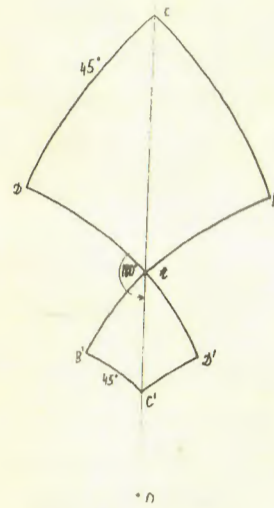
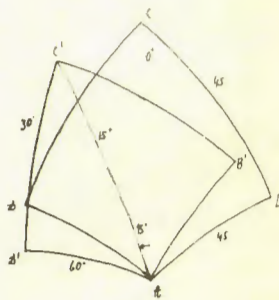
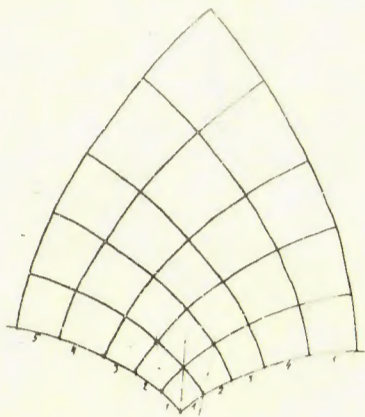
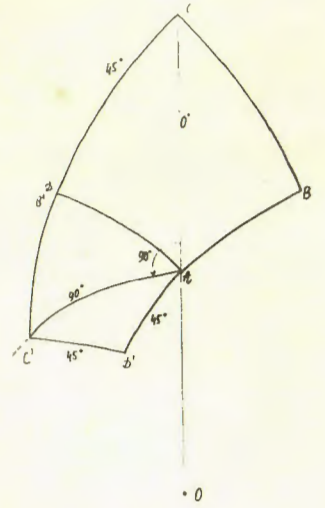
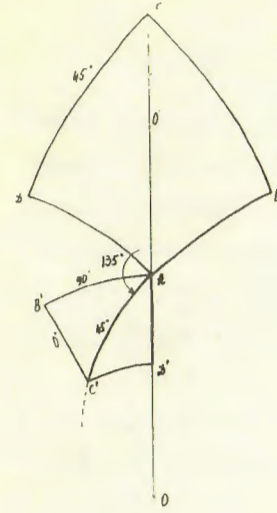
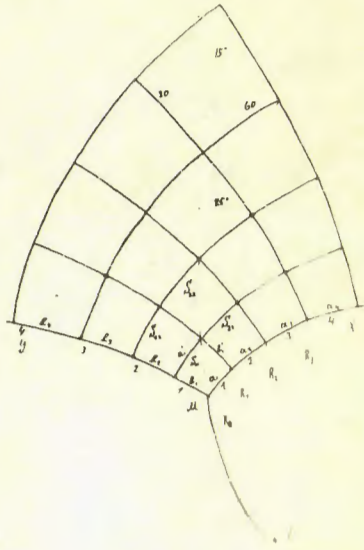
• O  
Pис. 22



• O  
Pис. 23



• O



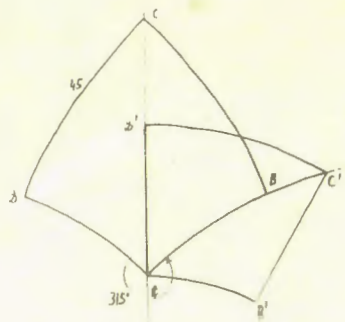


Рис. 28

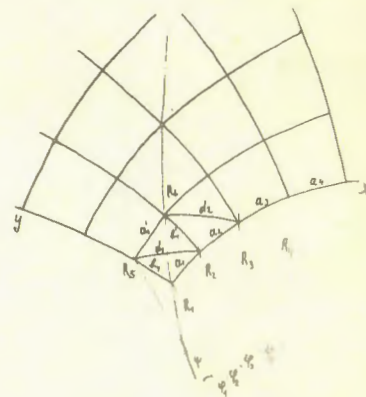


Рис. 29

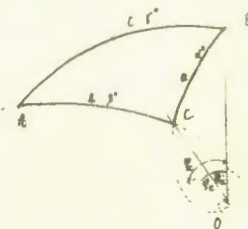


Рис. 30

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ

- Рис.1 Логарифмическая спираль.
- Рис.2 Прямые, проведенные через произвольную точку M.
- Рис.3 Прямые, проведенные через две точки.
- Рис.4 Параллельные прямые:
  - а)  $K_a = K_b = K_c \neq 0 \neq \infty$
  - б)  $K_a = K_b = K_c = \pm \infty$
  - в)  $K_a = K_b = K_c = 0$
- Рис.5 Точки пересечения непараллельных прямых.  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$  - точки пересечения прямых  $a$  и  $b$ ,  $P_1, P_2, P_3$  - для прямых  $b$  и  $c$ ,  $N_1$  и  $N_2$  - для прямых  $c$  и  $a$ ;  $A, B$ , и  $C$  - точки пересечения для прямых  $a, b, c$  с прямой  $K=0$ .
- Рис.6  $a$  - лучи,  $b$  - отрезки и угол споры  $\varphi$  дуги  $CD$ .
- Рис.7  $a$  - центральный угол,  $a$  и  $b$  - стороны угла;  $b$  - центральный треугольник,  $a, b$  и  $c$  - его стороны  $\alpha, \beta$  и  $\varphi$  - внутренние углы.
- Рис.8 Нецентральные углы.
- Рис.9  $a$  - четыре угла, построенные двумя прямыми;  $b$  - суммирование углов.
- Рис.10 Определение значения угла.
- Рис.11 Аксиома измерения или аксиома Архимеда для угла.
- Рис.12 Аксиома полноты для угла.
- Рис.13 Нецентральный треугольник.
- Рис.14 Четырехугольники
  - $a, b, в$  - прямоугольники
  - $г$  - параллелограмм
  - $д, е$  - трапеции.

- Рис.15 Правильный треугольник.  
Рис.16 Квадрат.  
Рис.17 Правильный пятиугольник.  
Рис.18 Правильный шестиугольник.  
Рис.19 Правильный двенадцатиугольник.  
Рис.20 Свойства сторон параллелограмма  
Рис.21 Построение квадрата  
Рис.22 Теорема Дезарга.  
Рис.23 Площадь треугольника.  
Рис.24 Площадь четырехугольника.  
Рис.25. Локальная область  
Рис.26 Система координат, когда  $K_x \neq K_y$ .  
Рис.27 Система координат, когда  $K_x = K_y = 1$   
Рис.28 Вращение квадрата на плоскости вокруг вершины А:  
а - поворот на  $15^\circ$ , б -  $90^\circ$ , в -  $135^\circ$ , г -  $195^\circ$ ,  
д -  $315^\circ$ .  
Рис.29 Постоянство угла опоры в  $СВ_{ТН}$  и в  $СВ_{НН}$ .  
Рис.30 Угол опоры для треугольника АВС,  $\varphi_a + \varphi_b = \varphi_c$ .

С.Р.ШАХАЗИЗЯН  
ОДНОЦЕНТРОВАЯ ДВУХМЕРНАЯ СПИРАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Редактор Л.П.Мукаян  
Технический редактор А.С.Абрамян

---

Подписано в печать 6/VI-85г. ВФ-00969 Формат 60x84/16  
Офсетная печать. Уч.изд.л.2,5 Тираж 299 экз. Ц. 38 к.  
Зак.тип. № 238 Индекс 3624

---

Отпечатано в Ереванском физическом институте  
Ереван 36, Маркарян 2