

ФФИ-827(54)-85

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՏԻՏՈՒՏ  
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Փ.Ա.ԱԳԱՐՈՅԱՆ, Վ.Վ.ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ

ГЕНЕРАЦИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННО-ФОТОННЫХ ЛИВНЕЙ  
В ПОЛЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

ЦНИИатоминформ

ЕРЕВАН-1985

© **Центральный научно-исследовательский институт информации  
и технико-экономических исследований по атомной науке  
и технике (ЦНИИатоминформ) 1985г.**

## I. Введение

Бурное развитие астрофизики высоких энергий выявило существование радиационно-доминированной космической плазмы вблизи широкого класса релятивистских объектов (магнитосферы пульсаров, аккреционные диски нейтронных звезд и черных дыр, ударные волны при взрывах сверхновых, ядра активных галактик и квазаров и т.д.). В условиях, когда плотность фотонов существенно превосходит плотность газа, взаимодействия частиц высоких энергий с полем электромагнитного излучения играют первостепенную роль.

Основным параметром, характеризующим кинетику распространения релятивистских электронов через фотонный газ, является  $S_e = \frac{E_e \omega}{m^2 c^4}$ , где  $E_e$  и  $\omega$  - энергии электрона и фотонов поля, соответственно,  $m$  - масса покоя электрона,  $c$  - скорость света. При  $S_e \ll 1$  энергетические потери электронов в результате комптоновского рассеяния носят непрерывный характер, благодаря чему кинетика распространения электронов описывается линейными дифференциальными уравнениями. Для значений же  $S_e \gg 1$

картина резко меняется, и энергетические потери носят катастрофический характер. При этом, в результате рассеяния релятивистского электрона на фотоне поля, последний приобретает почти всю энергию электрона, превращаясь в жесткий гамма-квант с  $E_\gamma \sim E_e$ . Поскольку порог рождения  $e^+e^-$  пар при фотон-фотонных столкновениях определяется условием  $S_\gamma = E_\gamma \omega / m^2 c^4 \gg 1$ , то образованные при релятивистском комптоновском рассеянии ( $S_e \gg 1$ ) жесткие гамма-кванты, взаимодействуя с фотонами поля, могут привести к образованию электронно-позитронной пары. Последние, рассеиваясь на фотонах поля, образуют гамма-кванты и т.д. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока энергия фотона станет настолько малой, что  $S_\gamma < 1$ . После этого фотоны будут свободно распространяться, а электроны - терять свою энергию малыми порциями.

Каскадный характер распространения электронов и гамма-квантов высоких энергий в поле электромагнитного излучения впервые отмечался в работе [1]. Качественный анализ формы спектра каскадных фотонов в области малых энергий ( $E_\gamma \ll m^2 c^4 / \omega$ ) проводился в работе [2]. Детальному изучению характеристик каскадных частиц методом Монте-Карло была посвящена наша предыдущая работа [3]. В работе [4] была сделана попытка сведения системы уравнений, описывающих каскад в фотонном газе, к хорошо исследованной системе уравнений, описывающих электромагнитный каскад в веществе [5]. Однако ряд особенностей развития каскада в поле электромагнитного излучения, а именно:

- 1) наличие порога рождения пар, зависящего от угла столкновений и энергий взаимодействующих фотонов;
- 2) существование слу-

чайного направления движения фотонов поля ; 3) специфический характер сечений комптоновского рассеяния и фоторождения ( $e^+e^-$ ) пар - не позволяют, как будет показано ниже, корректно списывать развитие каскада в фотонном газе каскадными уравнениями в веществе.

Данная работа посвящена выводу и решению кинетических уравнений, характеризующих развитие электромагнитного каскада в изотропном фотонном газе в области энергий ливневых частиц  $E_{\gamma, e} \gg m^2 c^4 / \omega$ .

## 2. Кинетические уравнения

Рассмотрим релятивистскую частицу (электрон или гамма-квант), распространяющуюся через однородный фотонный газ, состоящий из изотропно распределенных фотонов средней энергии  $\omega$  и плотности  $\Pi_\omega$ . Обозначим через  $\varepsilon$  и  $\Gamma$  функции распределения электронов и гамма-квантов, соответственно. Тогда  $\varepsilon(x^M, p^M) d^3x d^3p$  и  $\Gamma(x^M, k^M) d^3x d^3k$  - среднее число электронов и гамма-квантов в объемах фазового пространства  $d^3x d^3p$  и  $d^3x d^3k$  ( $x^M, p^M, k^M$  - 4-вектора пространства и импульсов). Поскольку объем фазового пространства  $d^3x d^3p$  ( $d^3x d^3k$ ) лоренц-инвариантен, то и функции распределения  $\varepsilon$  и  $\Gamma$  лоренц-инвариантны.

Предположим, что внешнее электромагнитное поле отсутствует, а плотность вещества в области развития каскада пренебрежимо мала ( $\Pi \ll \Pi_\omega$ ). Это позволяет описать электроны и позитроны единой функцией распределения  $\varepsilon(x^M, p^M)$  ( $\varepsilon_+ = \varepsilon_- = \varepsilon/2$ ).

Тогда, следуя [4], уравнения переноса запишем в виде

$$\begin{aligned} p^\mu \partial_\mu \epsilon &= -c_1 (e\omega \rightarrow e'\gamma) + c'_1 (e'\omega \rightarrow e\gamma) + 2c_2 (\gamma\omega \rightarrow ee) \\ k^\mu \partial_\mu \Gamma &= -c_3 (\gamma\omega \rightarrow ee) + c_4 (e\omega \rightarrow e'\gamma). \end{aligned} \quad (I)$$

В правых частях уравнений стоят интегралы столкновений, соответствующие процессам комптоновского рассеяния и фоторождения  $e^+e^-$  пар. Знаки  $e$  и  $e'$  соответствуют электронам, находящимся внутри и вне заданной области фазового пространства; знак  $\gamma$  соответствует гамма-квантам, попадающим в заданную область фазового пространства; знак  $\omega$  соответствует фотонам поля.

Написанная система кинетических уравнений (I) отражает тот факт, что изменение числа электронов в фазовом объеме происходит по трем причинам. Первая обусловлена комптоновским рассеянием релятивистского электрона на фотоне поля  $\omega$  и выбыванием этого электрона из рассматриваемой области фазового пространства  $d^3x d^3p$ . Вторая причина также обусловлена комптоновским рассеянием, однако электрон в данном случае из произвольного состояния попадает в рассматриваемую область фазового пространства. Третья причина отвечает появлению электрона в рассматриваемой области фазового пространства благодаря процессу фоторождения  $e^+e^-$  пары. Изменение же числа фотонов в области фазового пространства  $d^3x d^3k$  связано, во-первых, с выбыванием высокоэнергичных гамма-квантов в результате фоторождения  $e^+e^-$  пары, и, во-вторых, с появлением высокоэнергичных фотонов в заданной области фазового пространства в результате комптоновского рассеяния релятивистских электронов на фотонах поля.

В системе уравнений (I) не учтены взаимодействия между частицами, генерируемыми при развитии каскада, в частности аннигиляция электронно-позитронных пар. Следовательно, эта система описывает лишь первый (линейный) этап развития электромагнитного каскада, когда плотность ливневых частиц не превосходит плотность фотонов поля. Условия, когда линейное приближение описания электромагнитного каскада остается справедливым, обсуждались в работе [3].

Интегралы столкновений для двухчастичных реакций ( $I+2 \rightarrow 3+4$ ) представляются в следующем виде [4]:

$$C(x^{\mu}, p_1^{\mu}) = \int_2 \int_3 \int_4 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4 F_1(x^{\mu}, p_1^{\mu}) F_2(x^{\mu}, p_2^{\mu}) \times \\ \times \omega(12 \rightarrow 34) \delta^{(4)}(p_f^{\mu} - p_i^{\mu}), \quad (2)$$

где  $F_1(x^{\mu}, p_1^{\mu}) F_2(x^{\mu}, p_2^{\mu})$  - функции распределения сталкивающихся частиц,  $W = \sum |M(12 \rightarrow 34)|^2$  - вероятность перехода  $I 2 \rightarrow 3 4$ , суммированная по всем состояниям поляризации;  $M$  - матричный элемент взаимодействия;  $\Pi = \frac{d^3 p}{2p^0}$  - ковариантный объем импульсного пространства;  $p_i^{\mu}$  и  $p_f^{\mu}$  - начальные и конечные значения 4-импульсов.

Пусть ось  $Z$  - направление, вдоль которого распространяется релятивистская, инициирующая каскад, частица. Первое приближение, принимаемое нами, состоит в пренебрежении углами отклонения ливневых частиц от оси  $Z$ . Такое приближение справедливо для  $\omega \ll m$  и  $E_{e,\gamma} \gg m^x$ . Более того, это приближение справедливо и для случая жестких фотонов мишени  $\omega \ll m$ , если только  $S_{e,\gamma} \gg I$  (т.е.  $E_{e,\gamma} \gg m$ ). Такое приближение вместе с

<sup>x)</sup> Далее для простоты мы полагаем  $C=I$ .

условием изотропного распределения фотонов поля, позволяет несколько упростить функцию распределения релятивистских частиц

$$\varepsilon(x^\mu, p^\mu) = \varepsilon(x^0, \mathbf{z}, E_e) \delta^{(2)}(\vec{x}_\perp) \delta^{(2)}(\vec{\Omega}_\perp), \quad (3)$$

где  $\vec{x}_\perp = (x, y)$ ;  $\vec{\Omega}$  - единичный вектор в направлении  $\vec{p}$ , а  $\vec{\Omega}_\perp = (\Omega_x, \Omega_y)$ .

Тогда, интегрируя кинетические уравнения слева и справа по  $d^2\Omega_\perp d^2x_\perp$ , для левой части верхнего уравнения системы (I) получим

$$\int \int d^2\Omega_\perp d^2x_\perp p^\mu \partial_\mu \varepsilon = E_e \left( \frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \right) \varepsilon(x^0, \mathbf{z}, E_e). \quad (4)$$

Здесь, предполагается, что  $P_z = E_e$ . В дальнейшем мы будем рассматривать стационарный случай. Тогда первое слагаемое в выражении (4) обращается в ноль. С другой стороны, интеграл столкновений, отвечающий выпадающему из рассматриваемого объема фазового пространства электрону ( $e'$ ) в результате комптоновского рассеяния, становится равным

$$\bar{C}_1 = \int \int d^2\Omega_\perp d^2x_\perp c_1 = \int \int d^2\Omega_\perp d^2x_\perp \Pi_\gamma \Pi_\omega \Pi_{e'} \varepsilon F_\omega \times \\ \times W \delta^{(4)}(P_f^\mu - P_i^\mu), \quad (5)$$

где  $F_\omega$  - функция распределения фотонов поля.

Интегрирование (5) приводит к соотношению

$$\bar{C}_1 = \varepsilon \int \Pi_\gamma \Pi_\omega \Pi_{e'} F_\omega W \delta^{(4)}(P_f^\mu - P_i^\mu).$$

Учитывая также, что

$$\Pi_{e'} = \int d^4p' \delta[(p'^\mu)^2 - m^2]$$

и проводя интегрирование по  $P_{e'}$ , для интеграла столкновений

получаем

$$\bar{C}_1 = \varepsilon \int \Pi_\gamma \Pi_\omega F_\omega \delta [(P^M + K_\omega^M - K_\gamma^M)^2 - m^2] W \quad (6)$$

Выпишем величину  $\Pi_\omega$  :

$$\Pi_\omega = \frac{1}{2} \omega d\omega d\Omega_\omega$$

Для интегрирования по  $d\Omega_\omega$  выберем систему координат, в которой интегрирование проводится по углу между  $\vec{P}$  и  $\vec{K}_\omega - \vec{K}_\gamma$ . Учитывая, что  $\delta$  - функция снимает интегрирование по  $d\cos\theta$ , получаем

$$\bar{C}_1 = \varepsilon \int \Pi_\gamma F_\omega W \frac{d\omega d\gamma}{4E_e Q};$$

$$Q = (1 + \xi^2 + 2\xi \cos \psi)^{1/2}; \quad \xi = E_\gamma / \omega; \quad \psi = (\vec{K}_\omega, \vec{K}_\gamma). \quad (7)$$

Точное интегрирование выражения  $\int_0^{2\pi} W d\psi$ , где  $W$  - квадрат матричного элемента комптоновского рассеяния, проводилось в работе [6]. В той же работе приводился и обсуждался результат приближенного интегрирования, незначительно отличающийся от точного, но имеющий гораздо более простой вид. Этот результат мы применим для дальнейших преобразований.

Для моноэнергетических фотонов поля, распределенных однородно и изотропно в области развития каскада

$$F_\omega = \frac{n_\omega \delta(\omega - \omega_0)}{2\pi \omega^2}$$

Тогда

$$\bar{C}_1 = \varepsilon \frac{n_\omega r_0^2 m^2}{8\pi \omega^2 E_e} \int \frac{E_\gamma dE_\gamma d\Omega_\gamma}{Q} \int_0^{2\pi} (4A^2 - 4A - B) d\psi; \quad (8)$$

$$A = 1/K_1 + 1/K_2, \quad B = K_1/K_2 + K_2/K_1, \quad K_1 = 2K_\omega^M P_M / m^2, \quad K_2 = 2K_\gamma^M P_M / m^2;$$

$r_0 = e^2 / m^2$  - классический радиус электрона.

Применяя метод интегрирования по  $d\varphi$  и  $d\Omega_\gamma$ , предложенный в работе [6], для  $\bar{C}_1$  окончательно имеем

$$\bar{C}_1 = \varepsilon \frac{2\pi r_0^2 n \omega m^2}{\omega} \int dx \left[ 1 + x^2/2(1-x) + x/\beta_e(1-x) - \right. \\ \left. - 2x^2/\beta_e^2(1-x)^2 - x^3/2\beta_e(1-x)^2 - 2x/\beta_e(1-x) \ln \frac{\beta_e(1-x)}{x} \right], \quad (9)$$

где  $\beta_e = 4E_e\omega/m^2$ ,  $x = E_\gamma/E_e$ ;  $\omega/E_e \ll x \leq \beta_e/(1+\beta_e)$

Заметим, что  $\bar{C}_1/E_e = \mathcal{C}(z, E_e) n \omega \bar{b}_k$ , где  $\bar{b}_k$  - проинтегрированное по всем  $E_\gamma$  дифференциальное сечение комптоновского рассеяния, полученное в работе [6]. Величина  $\bar{C}_1/E_e$  пропорциональна количеству выбывающих из рассматриваемого энергетического интеграла электронов в результате комптоновского рассеяния последних.

Для вычисления  $\bar{C}_3$  можно проделать аналогичные преобразования и использовать метод интегрирования, предложенный в работе [7]. Однако проще воспользоваться окончательным результатом - усредненным дифференциальным сечением, полученным в работе [7], и соотношением

$$\bar{C}_3/E_\gamma = \Gamma(z, E_\gamma) n \omega \bar{b}_\phi,$$

пропорциональным числу выбывающих (из-за процесса фоторождения пар) из рассматриваемого интервала энергий гамма-квантов. Тогда для  $\bar{C}_3$  получим:

$$\bar{C}_3 = \Gamma(z, E_\gamma) \frac{2\pi r_0^2 n \omega m^2}{\omega} \int dx' \left[ \frac{1}{x'(1-x')} - 2 - \frac{2}{\beta_\gamma x'(1-x')} + \right. \\ \left. + \frac{4}{\beta_\gamma^2 x'^2(1-x')^2} - \frac{1}{\beta_\gamma x'^2(1-x')^2} + 4 \frac{\ln \beta_\gamma x'(1-x')}{\beta_\gamma x'(1-x')} \right], \quad (10)$$

где  $\beta_\gamma = 4E_\gamma\omega/m^2$ ,  $x' = E_e/E_\gamma$ ;  $\frac{1-\sqrt{1-4/\beta_\gamma}}{2} \leq x' \leq \frac{1+\sqrt{1-4/\beta_\gamma}}{2}$ .

Рассматриваемое приближение  $\beta_e, \beta_\gamma \gg 1$  позволяет существенно упростить интегралы столкновений  $\bar{C}_1$  и  $\bar{C}_3$

$$\begin{aligned} \bar{C}_1 &= \varepsilon \frac{\pi r_0^2 n_\omega m^2}{\omega} \int_0^{1-1/\beta_e} \varphi(x) dx; \\ \bar{C}_3 &= \Gamma \frac{\pi r_0^2 n_\omega m^2}{\omega} \int_{1/\beta_\gamma}^{1-1/\beta_\gamma} u(x) dx; \end{aligned} \quad (\text{II})$$

где

$$\varphi(x) = 1 - x + 1/(1-x)$$

и

$$u(x) = 1/x(1-x) - 2 \quad (\text{I2})$$

Рассмотрим теперь столкновительный член

$$c'_1(e'\omega \rightarrow e\gamma) = \int \Pi_\gamma \Pi_\omega \Pi_{e'} \varepsilon' F_\omega W \delta^{(4)}(p'_\gamma - p'_i) ; \varepsilon' = \varepsilon(p'^\mu).$$

Интегрируя это выражение по  $d^2\Omega_\perp d^2x_\perp$  и  $d^4p'$ , получим

$$\bar{C}'_1 = \int \varepsilon(E'_e) \Pi_\gamma F_\omega \frac{d\omega d\varphi}{4E_e Q} W.$$

Обозначим  $x = E_\gamma/E'_e$  и, так как  $E'_e = E_e + E_\gamma$  ( $\omega < m$ ), то  $E_\gamma = \frac{x E_e}{1-x}$  и  $E'_e = \frac{E_e}{1-x}$ . Тогда для  $\bar{C}'_1$  имеем

$$\bar{C}'_1 = \frac{\pi r_0^2 n_\omega m^2}{\omega} \int_0^1 \varepsilon(E_e/(1-x)) \varphi(x) \frac{dx}{1-x}. \quad (\text{I3})$$

Вычисляя аналогично коэффициенты  $C_2$  и  $C_4$ , окончательно для кинетических уравнений имеем:

$$\frac{E_e \omega}{4\pi r_0^2 n_\omega m^2} \frac{\partial \varepsilon(E_e, z)}{\partial z} = 2 \int_0^{1-1/\beta_e} u(x) \Gamma(E_e/x, z) \frac{dx}{x} + \int_0^1 \sigma(x) \varepsilon(E_e/(1-x)) \frac{dx}{1-x} - \int_0^{1-1/\beta_e} \sigma(x) \varepsilon(E_e, z) dx; \quad (I4)$$

$$\frac{E_\gamma \omega}{4\pi r_0^2 n_\omega m^2} \frac{\partial \Gamma(E_\gamma, z)}{\partial z} = \int_0^{1-1/\beta_\gamma} \sigma(x) \varepsilon(E_\gamma/x, z) \frac{dx}{x} - \int_{1/\beta_\gamma}^{1-1/\beta_\gamma} u(x) \Gamma(E_\gamma, z) dx.$$

Заметим, что величина  $1/4\pi r_0^2 n_\omega$  имеет смысл радиационной единицы длины. Поэтому в дальнейшем толщину  $z$  будем выражать в таких единицах  $t \equiv 4\pi r_0^2 n_\omega \cdot z$ . Перепишем также систему (I4) для функции распределения электронов и гамма-квантов таких, что  $\varepsilon(\beta, t) d\beta dt$  и  $\Gamma(\beta, t) d\beta dt$  - среднее число частиц в интервале  $\beta, \beta + d\beta$ , где  $\beta = 4E\omega/m^2$ , а  $E$  - энергия частицы (электрона или гамма-кванта) на данной глубине:

$$\beta \frac{\partial \varepsilon(\beta, t)}{\partial t} = 2 \int_0^{1-1/\beta} x u(x) \Gamma(\beta/x, t) dx + \int_0^1 (1-x) \sigma(x) \varepsilon(\beta/(1-x), t) dx - \int_0^{1-1/\beta} \sigma(x) \varepsilon(\beta, t) dx, \quad (I5)$$

$$\beta \frac{\partial \Gamma(\beta, t)}{\partial t} = \int_0^{1-1/\beta} x \sigma(x) \varepsilon(\beta/x, t) dx - \int_{1/\beta}^{1-1/\beta} u(x) \Gamma(\beta, t) dx.$$

При сравнении полученных уравнений с уравнениями, описывающими распространение электромагнитного каскада в веществе [5], становится ясным, что они не могут быть сведены к последним, поскольку их отличает: 1) неоднородность по параметру  $\beta$ ;

- 2) зависимость пределов интегрирования от  $\beta$  (хотя  $\beta \gg 1$ , однако член  $1/\beta$  в пределах интегрирования нельзя отбросить, так как интеграл в этом случае становится расходящимся);
- 3) специфический характер ядер интегральных уравнений.

### 3. Решение кинетических уравнений

Для решения системы (15) воспользуемся применением стандартной техники двойного интегрального преобразования. Для переменной  $t$  используем преобразование Лапласа, для переменной  $\beta$  - преобразование Меллина (см., например, [8]).

Запишем (15) в виде

$$\beta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \ln \beta \cdot \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon + \int_0^1 \Gamma(\beta/x) x dx - \int_0^1 \varepsilon(\beta/(1-x)) [(1-x)^2 + 1] dx = 2 \int_0^1 \frac{n(\beta/x)}{1-x} dx,$$

$$\beta \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + 2 \ln \beta \Gamma - 2 \Gamma - \int_0^1 \varepsilon(\beta/x) [-1+x-x^2] dx = \int_0^1 \frac{\varepsilon(\beta/x)}{1-x} dx. \quad (16)$$

Здесь мы пренебрегли малым параметром  $1/\beta$  в пределах интегрирования, за исключением случая, когда из-за этого возникает расходямость.

Разложим функции  $\Gamma(\beta/x)$  и  $\varepsilon(\beta/x)$  в окрестности точки  $x = 1$ :

$$\Gamma(\beta/x) = \Gamma(\beta/x) \Big|_{x=1} + \Gamma'_x(\beta/x) \Big|_{x=1} (x-1) + \Gamma''_x(\beta/x) \Big|_{x=1} \frac{(x-1)^2}{2!} \quad (17)$$

Тогда

$$\int_0^{1-1/b} \frac{\Gamma(b/x)}{1-x} dx = \Gamma(b) \ln b - \Gamma'_x(b/x)|_{x=1} + \frac{\Gamma''_x(b/x)|_{x=1}}{2 \cdot 2!} + \dots$$

$$\int_0^{1-1/b} \frac{\varepsilon(b/x)}{1-x} dx = \varepsilon(b) \ln b - \varepsilon'_x(b/x)|_{x=1} + \frac{\varepsilon''_x(b/x)|_{x=1}}{2 \cdot 2!} + \dots \quad (16)$$

Теперь умножим систему уравнений (16) на  $b^s$  и проинтегриру-

ем по  $b$  от 0 до  $\infty$ . Учтем также, что  $\frac{d}{ds} b^s = \ln b \cdot b^s$  и

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial \Gamma(b/x)}{\partial x} \Big|_{x=1} b^s ds = \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{x=1} \int_0^{\infty} \Gamma(b/x) b^s db = \Gamma(s) \frac{\partial x^{s+1}}{\partial x} \Big|_{x=1}$$

Таким образом, получим систему уравнений

$$\frac{\partial \varepsilon(s+1)}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon(s)}{\partial s} + \varepsilon(s) \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+4} \right] + 2\Gamma(s) \left[ \frac{2}{s+3} + J(s) \right] - 2 \frac{\partial \Gamma(s)}{\partial s} = 0$$

$$\frac{\partial \Gamma(s+1)}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon(s)}{\partial s} + \varepsilon(s) \left[ \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+4} + J(s) \right] - 2\Gamma(s) + 2 \frac{\partial \Gamma(s)}{\partial s} = 0,$$

где  $J(s) = \frac{\partial x^{s+1}}{\partial x} \Big|_{x=1} - \frac{1}{2 \cdot 2!} \frac{\partial^2 x^{s+1}}{\partial x^2} \Big|_{x=1} + \frac{1}{3 \cdot 3!} \frac{\partial^3 x^{s+1}}{\partial x^3} \Big|_{x=1} + \dots$

Покажем, что  $J(s) = \int_0^1 \frac{1-x^{s+1}}{1-x} dx$ . Для этого разложим функцию

$1-x^s$  в окрестности точки  $x=1$ :

$$1-x^{s+1} = 0 - \frac{dx^{s+1}}{dx} \Big|_{x=1} + \frac{\partial^2 x^{s+1}}{\partial x^2} \Big|_{x=1} \frac{(x-1)^2}{2!} - \frac{\partial^3 x^{s+1}}{\partial x^3} \Big|_{x=1} \frac{(x-1)^3}{3!} + \dots$$

Подставив это разложение в интеграл, получим

$$\int_0^1 \frac{1-x^{s+1}}{1-x} dx = \frac{\partial x^{s+1}}{\partial x} \Big|_{x=1} - \frac{1}{2 \cdot 2!} \frac{\partial^2 x^{s+1}}{\partial x^2} \Big|_{x=1} + \frac{1}{3 \cdot 3!} \frac{\partial^3 x^{s+1}}{\partial x^3} \Big|_{x=1} + \dots$$

Укажем, что  $\int_0^1 \frac{1-x^{s+1}}{1-x} dx = \Psi(s+2) + C_e$ , где  $\Psi(s)$  - логарифмическая производная гамма-функции, а  $C_e$  - константа Эйлера (см., например, [9]). Для системы кинетических уравнений в  $S$  - пространстве окончательно имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon(s+1, t)}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon(s, t)}{\partial s} - 2 \frac{\partial \Gamma(s, t)}{\partial s} + A(s) \varepsilon(s, t) + B(s) \Gamma(s, t) &= 0, \\ \frac{\partial \Gamma(s+1, t)}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon(s, t)}{\partial s} + 2 \frac{\partial \Gamma(s, t)}{\partial s} + C(s) \varepsilon(s, t) - 2 \Gamma(s, t) &= 0, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$A(s) = \frac{1}{2} - \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+4}; \quad B(s) = 2 \left[ \frac{2}{s+3} + \Psi(s+2) + C_e \right]; \quad C(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+4} + \Psi(s+2) + C_e$$

Умножая уравнения (19) на  $e^{-\lambda t}$  и предполагая иницирующим гамма-квант с  $\beta = \beta_0$ , а также интегрируя (19) по  $t$  от 0 до  $\infty$  для кинетических уравнений в  $(s, \lambda)$  пространстве, получим следующую разностную систему уравнений:

$$\begin{aligned} \lambda \varepsilon(s+1, \lambda) + \frac{\partial \varepsilon(s, \lambda)}{\partial s} - 2 \frac{\partial \Gamma(s, \lambda)}{\partial s} + A(s) \varepsilon(s, \lambda) + B(s) \Gamma(s, \lambda) &= 0 \\ \lambda \Gamma(s+1, \lambda) - \frac{\partial \varepsilon(s, \lambda)}{\partial s} + 2 \frac{\partial \Gamma(s, \lambda)}{\partial s} + C(s) \varepsilon(s, \lambda) - 2 \Gamma(s, \lambda) &= \beta_0^{s+1}. \end{aligned} \quad (20)$$

Для решения разностных уравнений (20) сделаем замену переменных

$$K = 2\Gamma - \varepsilon, \quad R = \Gamma + \varepsilon; \quad R(s, \lambda) = \beta_0^{s+1} r(s, \lambda), \quad K(s, \lambda) = \beta_0^{s+1} k(s, \lambda) \quad (21)$$

Тогда получим систему:

$$\lambda b_0 \Gamma(s+1, \lambda) + 2/3 \Gamma(s, \lambda)(A+C+B/2-1) - 1/3 K(s, \lambda)(A+C-B+2) = 1$$

$$\lambda b_0 K(s+1, \lambda) + \frac{3\partial K(s, \lambda)}{\partial s} + \frac{2}{3} \Gamma(s, \lambda)(2C-A-B/2-2) - \frac{1}{3} K(s, \lambda)(2C-A+4+B-9 \ln b_0) = \quad (22)$$

$$= 2$$

Рассмотрим вначале случай  $\lambda = 0$ .

В этом случае  $\Gamma(s, 0) = \frac{3}{2} \left[ \frac{1 + K(s, 0) f_3 / 3}{f_2} \right]$  и соответственно

$$\frac{dK(s, 0)}{ds} + a(s) K(s, 0) = \varphi(s), \quad (23)$$

где  $a(s) = \ln b_0 + 0,5 [A - B/2 - f_1 / f_2 (A + B/2)]$ ;  $\varphi = \frac{A+B/2}{f_2}$ ;

$$f_1 = \frac{3}{2} - \frac{3}{s+3}; \quad f_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{s+3} + 2[\Psi(s+2) + C_2]; \quad f_3 = \frac{5}{2} - \frac{5}{s+3} - \Psi(s+2) - C_2$$

Уравнение (23) имеет решение

$$K(s, 0) = \exp \left\{ - \int_{\infty}^s a(s') ds' \right\} \cdot \left[ C + \int_{\infty}^s \varphi(s') \exp \left\{ \int_{\infty}^{s'} a(s'') ds'' \right\} ds' \right], \quad s > 1 \quad (24)$$

Для выбора константы интегрирования заметим, что

$$K(s, 0) = \frac{K(s, 0)}{b_0^{s+1}} = \int_0^{\infty} (b/b_0)^s d(b/b_0) \int_0^{\infty} K(b, t) dt \rightarrow 0 \text{ при } s \rightarrow \infty \text{ и } b < b_0.$$

Следовательно,  $C = 0$  и  $K(s, 0) = \exp \left\{ - \int_{\infty}^s a(s') ds' \right\} \int_{\infty}^s \exp \left\{ \int_{\infty}^{s'} a(s'') ds'' \right\} \varphi(s') ds'$

Применяя обратное преобразование Меллина к величине  $K(s, 0)$ ,

получим:

$$\int_0^{\infty} K(b, t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} (b/b_0)^{-(s+1)} K(s, 0) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} e^{f(s)} ds, \quad (25)$$

где

$$f(s) = -(s+1) \ln b/b_0 - \int_{\infty}^s a(s') ds' + \ln \int_{\infty}^s \varphi(s') \exp \left\{ \int_{\infty}^{s'} a(s'') ds'' \right\} ds'.$$

Для интегрирования выражения (25) воспользуемся методом перевала (см., например, [10]).

$$\frac{df(s)}{ds} = -\ln \beta / \beta_0 - a(s) + \frac{\psi(s) \exp \left\{ \int_{-\infty}^s a(s') ds' \right\}}{\int_{-\infty}^s \psi(s') \exp \left\{ \int_{-\infty}^{s'} a(s'') ds'' \right\} ds'}. \quad (26)$$

Найдем минимальное значение  $s$  из равенства  $df(s)/ds = 0$ , или эквивалентного ему равенства

$$K(s, 0) = \frac{\psi(s)}{\ln \beta + a_0(s)}, \quad (27)$$

где  $a_0(s) = a(s) - \ln \beta$ . Подставляя (27) в (23) и разрешая полученное уравнение относительно  $\ln \beta(s)$ , получим:

$$\frac{dY}{ds} + Y^2 = Yg(s), \quad \text{где } Y = \ln \beta(s) + a_0, \quad g = \ln \beta_0 + a_0 + \psi/\psi. \quad (28)$$

Решение уравнения (28) имеет вид

$$Y = \frac{\exp \left( \int_{-\infty}^s g(s') ds' \right)}{c + \int_{-\infty}^s \exp \left( \int_{-\infty}^{s'} g(s'') ds'' \right) ds'}, \quad \text{для } s > -1 \quad (29)$$

В выражении (29) выбирается значение  $c = 0$ , в противном случае при  $\beta \rightarrow \beta_0 (s \rightarrow \infty)$ , величина  $|Y| \rightarrow \infty$ , что противоречит (29).

Таким образом,

$$\int_0^{\infty} K(\beta, t) dt = \frac{e^{f(s_m)}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\beta''(s_m)z^2}{2}} dz = \left(\frac{\beta}{\beta_0}\right)^{-(s_m+1)} \frac{\psi(s_m)}{[a_0(s_m) + \ln \beta] \sqrt{2\pi f''(s_m)}}, \quad (30)$$

где

$$f''(s_m) = -a'_0(s_m) + (a_0(s_m) + \ln \beta)(\ln \beta / \beta_0 + \psi'(s_m) / \psi(s_m)),$$

а  $s_m$  определяется из равенства (29), где  $c = 0$ , а  $-1 < s_m < \infty$ .

Аналогично:

$$\int_0^{\infty} (\bar{\epsilon}) dt = \frac{1}{2\pi i} \binom{0,5}{1} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{(\bar{v}/\bar{v}_0)^{-(s+1)}}{f_2(s)} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \binom{M}{N} \left(\frac{\bar{v}}{\bar{v}_0}\right)^{-(s+1)} K(s,0) ds, \quad (31)$$

$$M(s) = (1 + f_3/2f_2)/3, \quad N(s) = (f_3/f_2 - 1)/3.$$

Поскольку величина  $f_2'(s)$  нигде в ноль не обращается, то известно все нули функции  $f_2(s)$  первого порядка. Используя также то обстоятельство, что  $M(s)N(s)$  - слабо меняющаяся функция, и применяя метод перевала для вычисления второго члена в выражении (31), получим:

$$\int_0^{\infty} (\bar{\epsilon}) dt = \binom{0,5}{1} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(\bar{v}/\bar{v}_0)^{-(s_{\kappa}+1)}}{f_2'(s_{\kappa})} + \binom{M(s_m)}{N(s_m)} \int_0^{\infty} K dt, \quad (32)$$

где  $s_m$  находится из уравнения (29), а  $s_{\kappa}$  - из уравнения

$$f_2(s_{\kappa}) = 0 \quad (33)$$

Вычисления выражения (30) показывают, что функция  $\int_0^{\infty} K(\bar{v}, t) dt$  близка к нулю для  $\bar{v} \gg 1$  за исключением точек  $\bar{v} = \bar{v}_0$ , где она неограниченно возрастает. Таким образом, основной вклад в "равновесные" спектры частиц (функции распределения частиц, проинтегрированные по всей длине ливня) дают первые слагаемые в выражении (32). Анализ этих слагаемых позволяет сделать вывод, что рассматриваемые ряды с большой точностью аппроксимируются выражением:

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{x^{-(s_{\kappa}+1)}}{f_2'(s_{\kappa})} \sim \frac{1}{2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{x^{\kappa+2}}{\pi^2 + (1/4 + \ln(\kappa+1))^2} + 0,33, \quad x = \bar{v}/\bar{v}_0 \quad (34)$$

Равновесные спектры электронов и гамма-квантов как функции величины  $\beta/\beta_0$  представлены на рис.1. Характер полученных спектров подтверждает утверждение, что развитие электромагнитного каскада в фотонном газе обуславливает яркую спектральную особенность, а именно: аномально большое количество высокоэнергичных частиц (по сравнению с каскадом в веществе), которые рождаются благодаря передаче друг другу почти всей своей энергии. Полученные спектры слабо расходятся при  $\beta \rightarrow \beta_0$ , что, однако, не приводит к расходимости по полному числу частиц.

Перейдем теперь к вычислению спектров частиц на разных глубинах  $t$ . Поскольку величина  $K(s, 0)$  в выражении (22) практически не дает вклада в полученные для электронов и гамма-квантов "равновесные" спектры (32), то и для спектров на различных глубинах основной вклад дает величина  $r(s, \lambda)$ . Тогда из первого равенства в выражении (22) имеем

$$\lambda \beta_0 r(s+1, \lambda) + 2/3 r(s, \lambda) f_2 = 1. \quad (35)$$

Решение разностного уравнения (35) имеет вид :

$$r(s, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3/2 \lambda \beta_0)^k 3/2}{f_2(s) \dots f_2(s+k)}. \quad (36)$$

Применяя обратное преобразование Меллина и Лапласа к (36), получим

$$R(\beta, t) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} ds \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} d\lambda r(s, \lambda) (\beta/\beta_0)^{-(s+1)} e^{\lambda t}. \quad (37)$$

Замечая, что для больших  $s$ ,  $f_2(s+k) \sim f_2(s)$  и заменив (36) на

$$r(s, \lambda) \sim r_0(s, \lambda) = \frac{3}{2f_2(s)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3/2 \lambda b_0)^k}{f_2^k(s)} = \frac{3}{2} \frac{1}{f_2(s) + \lambda b_0 \cdot 3/2}, \quad (38)$$

а также интегрируя по  $\lambda$ , получим:

$$r(s, t) \sim r_0(s, t) = \frac{1}{b_0} \exp\left(-\frac{2}{3} \frac{t}{b_0} f_2(s)\right). \quad (39)$$

Заменяя далее  $r(s, t)$  в выражении (37) и интегрируя по  $s$ , как это было сделано в (25),

$$R_0(b, t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{b_0} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \exp\left(-s \ln b/b_0 - \frac{2}{3} \frac{t}{b_0} f_2(s)\right) ds.$$

Окончательно, вновь используя метод перевала, получим

$$R_0(x, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{b_0} \frac{x^{-(s+1)} \exp(-\tau f_2(s)/Z)}{\sqrt{-\tau f_2''(s)/2}}, \quad (40)$$

где  $x = b/b_0$ ,  $\tau = \frac{4t}{3b_0}$ , а  $s$  находится из уравнения  $-\ln x = \frac{\tau}{2} f_2'(s)$ .

Тогда для гамма-квантов и электронов соответственно

$$\Gamma(b, t) = R_0(b, t)/3, \quad \varepsilon(b, t) = 2R_0(b, t)/3.$$

На рис. 2 показаны спектры гамма-квантов для различных значений  $\tau$  как функции величины  $b/b_0$ . Из рис. 2 видно, что при изменении  $\tau$  низкоэнергетическая часть спектра меняется гораздо слабее, чем высокоэнергетическая.

В заключение оценим параметры среды, при которых справедлива рассмотренная выше картина развития релятивистского электромагнитного каскада в "чистом" фотонном газе. Поскольку радиационная длина при развитии каскада в поле электромагнитного

излучения  $\chi_0 = (4\pi r_0^2 n_\omega)^{-1}$  , а радиационная длина в веществе, скажем, в водородной среде  $\bar{\chi}_0 = (4\pi\alpha r_0^2 n_e)(\alpha=1/137)$  , то из условия  $\frac{\chi_0}{\bar{\chi}_0} = \frac{n_e \alpha}{n_\omega 4\pi} \ll 1$  , следует, что при  $n_e/n_\omega \ll 4\pi/\alpha$  каскад будет эффективнее развиваться в поле электромагнитного излучения, а взаимодействиями ливневых частиц с веществом можно пренебречь.

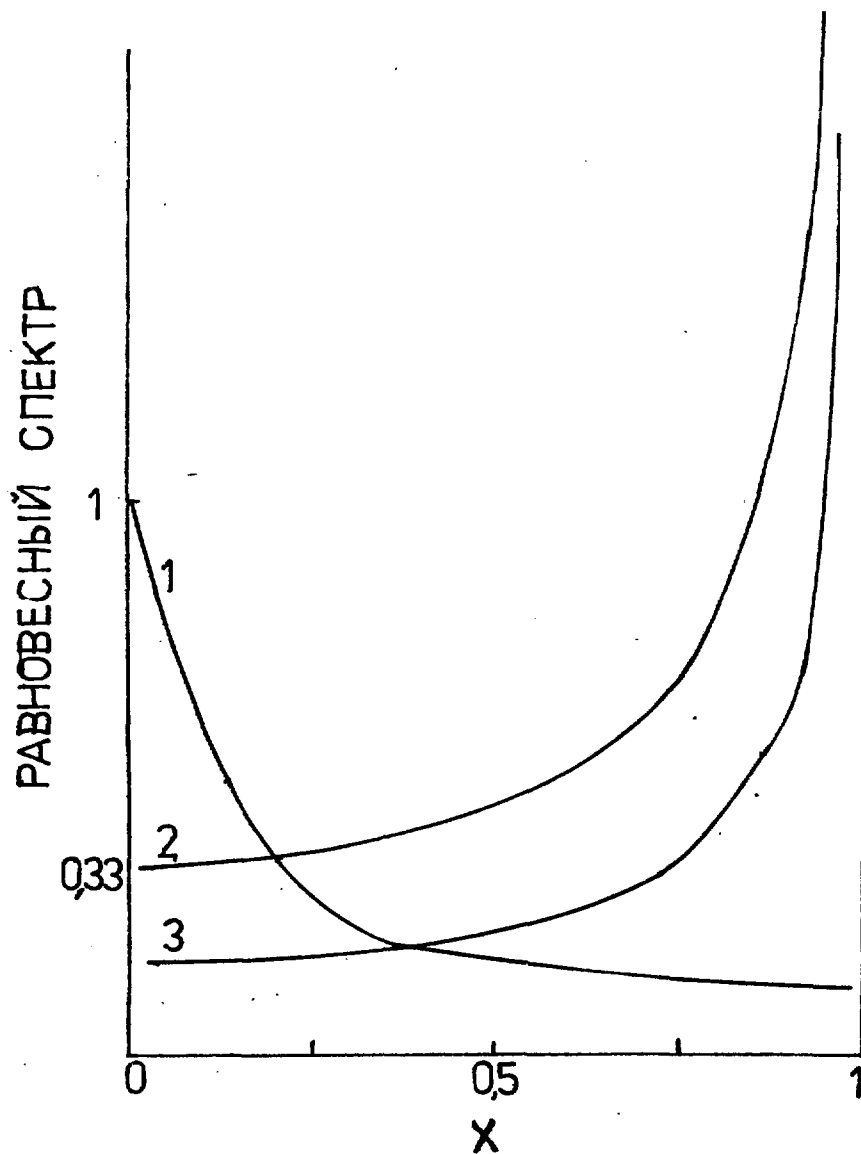


Рис.1 Равновесные спектры электронов и гамма-квантов. Спектр электронов (кр.1) при развитии каскада в веществе. Здесь  $X = 0,23 E_e/\beta$  (см. [8]). Спектры электронов (кр.2) и гамма-квантов (кр.3) при развитии каскада в фотонном газе. Здесь  $X = \beta/\beta_0$ .

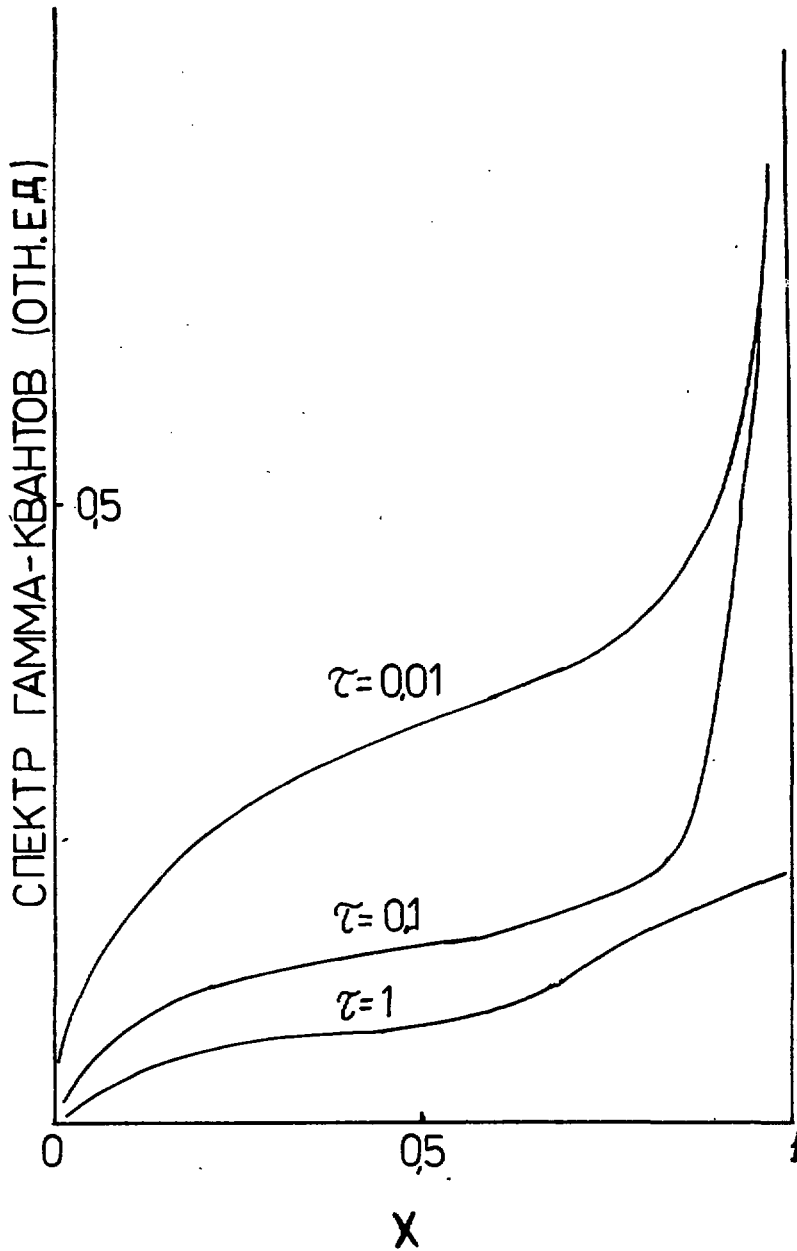


Рис.2 Спектры гамма-квантов на различных глубинах развития каскада  $\tau$  .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hayakawa S. Electron-photon cascade process in intergalactic space.-*Progr.Theor.Phys.,Suppl.*, 1966,vol.37,p.534.
2. Прилуцкий О.Ф., Розенталь И.Л. Космические лучи в расширяющейся Вселенной. *Изв.АН СССР, сер.физ.*,1969, т.33, с.1776.
3. Aharonian F.A., Kirillov-Ugryumov V.G., Vardanian V.V. Development of high-energy electromagnetic cascade initiated by relativistic electrons and gamma-rays in hot photon gases.-Preprint EPI-676(66)-83, 1983.
4. Burns M.L., Lovelace R.V.E. Theory of electron-positron showers in double radio-sources.-*astrophys.J.*,1982,vol.262 p.87.
5. Rossi B., Greisen K. Cosmic-ray theory.-*Rev.Mod.Phys.*, 1941, vol.13, p.240.
6. Aharonian F.A., Atoyan A.M. Compton scattering of relativistic electrons in compact X-ray sources.-*Astrophys.Space Sci.*, 1981, vol.79, p.321.
7. Агаронян Ф.А., Атоян А.М., Нагапетян А.М. Фоторождение электрон-позитронных пар в компактных рентгеновских источниках. *Астрофизика*, 1983, т.19, с.324.
8. Беленький С.З. Лавинные процессы в космических лучах. М.: Гостехиздат, 1946.
9. Абрамовиц А. , Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука. 1979.

10. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1958.

Рукопись поступила 9-го июля 1985г.

Ф.А. АГАРОНЯН, В.В. ВАРДАНЯН

ГЕНЕРАЦИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННО-ФОТОННЫХ ЛИВНЕЙ В ПОЛЕ  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Редактор Л. П. Мукалян

Технический редактор А. С. Абрамян

---

Подписано в печать 9/IX-85г. ВФ-06806 Формат 60x84/16

Офсетная печать. Уч. изд. л. 1,5 Тираж 299 экз. Ц. 22 к.

Зак. тип. № 403

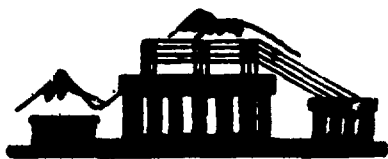
Индекс 3624

---

Отпечатано в Ереванском физическом институте

Ереван 36, Маркаряна 2

индекс 3624



ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ