

512-00000

ВФН-878 67.07

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ԳԱՐԿԱՆՈՒԹՅԱՆ  
ԵՐԵՎԱՆՍԿԻ ԲՈՒԿՄԱՆՈՒԹՅԱՆ ԿԵՆՏՐՈՆ

---

Կ. Յ. ԱՇԱԳՐՅԱՆ, Լ. Ա. ԴԵՎՈՐԿՅԱՆ

ПОДАВЛЕНИЕ ЭФФЕКТА ПРОЗРАЧНОСТИ И УСИЛЕНИЕ  
ОТРАЖЕНИЯ ЧАСТИЦ ОТ АСИММЕТРИЧНОЙ  
ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЯМЫ

**ЦНИИатоминформ**

**ЕРЕВАН-1985**

© Центральный научно-исследовательский институт информации  
и технико-экономических исследований по атомной науке  
и технике (ЦНИИатоминформ) 1985г.

EDM-838(65)-85

D.S. BAGDASARYAN, P.I. GALUMYAN,  
M.D. KARIBYAN, G.B. KAZARYAN,  
G.A. MANUKYAN, E.R. MARKARYAN,  
G.G. MKRTCHYAN, H.H.VARTAPETYAN

QUASI-ELASTIC ELECTRON SCATTERING (e,e'p)  
ON  ${}^9\text{Be}$  AND  ${}^{28}\text{Si}$  NUCLEI

The first results of the (e,e'p) reaction yield on  ${}^9\text{Be}$  and  ${}^{28}\text{Si}$  nuclei as a function of the proton emission angle at  $Q^2 = 0.2 \text{ GeV}^2/c^2$  in the quasi-elastic peak region are obtained on the beam of the Yerevan electron synchrotron. The measurement technique and the preliminary results are presented.

Yerevan Physics Institute

Yerevan 1985

УДК 539.171.2:539.14

Д.С.БАГДАСАРЯН, Г.А.ВАРТАНЕЦЬЯН, П.И.ГАЛУМЯН,  
Г.Б.КАЗАРЯН, М.Д.КАРИБЯН, Э.Р.МАРКАРЯН,  
Г.А.МАДУЖЯН, Г.Г.МКРТЧЯН

ВНАЧЕЛНУЮ РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ ( $e, e'p$ )  
НА ЯДРАХ  $^9\text{Be}$  И  $^{28}\text{Si}$

В пучке Ереванского электронного синхротрона получены  
результаты по зависимости выхода реакции ( $e, e'p$ ) на  
ядрах  $^9\text{Be}$  и  $^{28}\text{Si}$  от угла вылета протонов при значениях  
 $q^2 \sim 0,2 \text{ ГэВ}^2/c^2$  в области квазиупругого пика. В работе при-  
водятся методика измерения и предварительные результаты.

Ереванский физический институт

Ереван 1985

В настоящей работе исследовано одномерное движение частиц в поле асимметричной модифицированной потенциальной ямы Пешля-Теллера. Асимметричные потенциальные ямы встречаются, например, в задачах каналирования частиц в сложных неоднородных кристаллах в некоторых направлениях, где на одном периоде имеется несколько плоскостей. Такая задача представляет интерес также при рассеянии частиц на дефектах кристаллических решеток (междоузлия, вакансии, примеси и т.д.).

Как известно [1], при движении частиц в поле симметричной модифицированной ямы Пешля-Теллера, при значениях глубины ямы, равных целому числу, проходящие над ней частицы не отражаются. Иными словами, при определенных значениях глубины, потенциальная яма оказывается прозрачной для частиц. Нами показано, что асимметричность ямы сильно подавляет этот эффект. Кроме того, коэффициент отражения растет с увеличением асимметрии потенциальной ямы, т.е. асимметрия ямы приводит к усилению отражения. Это усиление особенно велико при больших энергиях пролетающей частицы, когда экспоненциальное падение от энергии (для симметричной ямы) заменяется степенной зависимостью. Для связанных состояний частицы получены дисперсии

онное уравнение и энергетический спектр. Показано, что несмотря на то, что энергетические уровни частицы в асимметричной яме мало отличаются от уровней энергии симметричной ямы, волновые функции связанных состояний сильно изменяются.

В разделе I выведена формула для коэффициента отражения. В разделе 2 исследуется эта формула в случае малых энергий частицы. В разделе 3 проанализирован случай больших энергий. В разделе 4 получено дисперсионное уравнение, энергетический спектр и волновые функции связанных состояний частицы. В разделе 5 приведены результаты численных расчетов и обсуждаются полученные результаты.

## I. Общие формулы

Пусть частица с энергией  $E > 0$  и массой  $m$  пролетает по оси  $x$  в поле асимметричной модифицированной потенциальной ямы Пешля-Теллера, имеющей вид:

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\lambda(\lambda-1)\alpha^2}{\operatorname{ch}^2[\alpha x(1+p)/2]}, & x < 0 \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\lambda(\lambda-1)\alpha^2}{\operatorname{ch}^2[\alpha x(1+p)/2p]}, & x > 0, \end{cases} \quad (\text{I.I})$$

где  $\hbar$  - постоянная Планка, параметрами  $\lambda$  и  $\alpha$  характеризуются глубина и ширина потенциальной ямы, а параметром  $p$  - степень ее асимметричности. Параметр  $p$  изменяется от 0 до 1, причем  $p = 1$  соответствует симметричной потенциальной яме,

$\lambda$  больше 1.

Волновое уравнение для частицы во внешнем поле (I.1) имеет вид:

$$u'' + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] = 0 \quad (I.2)$$

Удобно ввести следующие обозначения:

$$\alpha_1 = \frac{\alpha(1+p)}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{\alpha(1-p)}{2p}, \quad \kappa^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{16\lambda(\lambda-1)}{(1+p)^2}} \right], \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{16\lambda(\lambda-1)p^2}{(1+p)^2}} \right]. \quad (I.3)$$

Тогда решение уравнения Шредингера (I.2) можно написать в виде [2]:

$$u_1(x) = A_1 U_e(\alpha_1, \lambda_1, x) + B_1 U_o(\alpha_1, \lambda_1, x), \quad x < 0 \quad (I.4)$$

$$u_2(x) = A_2 U_e(\alpha_2, \lambda_2, x) + B_2 U_o(\alpha_2, \lambda_2, x), \quad x \geq 0.$$

Здесь  $A_1, A_2, B_1, B_2$  произвольные постоянные,  $U_e(\alpha_n, \lambda_n, x)$  и  $U_o(\alpha_n, \lambda_n, x)$  стандартные решения уравнения (I.2), соответственно четное и нечетное по отношению к изменению знака переменной

$$U_e(\alpha_n, \lambda_n, x) = \text{ch}^{\lambda_n}(\alpha_n x) F(a_n, b_n, \frac{1}{2}; \text{sh}^2(\alpha_n x)) \quad (I.5)$$

$$U_o(\alpha_n, \lambda_n, x) = \text{ch}^{\lambda_n}(\alpha_n x) \text{sh}(\alpha_n x) F(a_n + \frac{1}{2}, b_n + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -\text{sh}^2(\alpha_n x)),$$

где  $F$  - гипергеометрическая функция,  $a_n = \frac{1}{2}(\lambda_n + i\frac{\kappa}{\alpha_n})$ ,  $b_n = \frac{1}{2}(\lambda_n - i\frac{\kappa}{\alpha_n})$ ,  $n = 1, 2$ .

Связь между постоянными определяется из условия непрерывности волновой функции и ее производной в точке  $X = 0$ . Отсюда получим следующие условия:

$$A_1 = A_2, \quad B_1 \alpha_1 = B_2 \alpha_2 \quad (I.6)$$

Для того, чтобы найти коэффициент отражения частицы, необходимо выяснить асимптотическое поведение решений (I.4) при больших значениях аргумента. Используя известное выражение гипергеометрической функции при больших  $z$ :

$$F(a, b, c; -z) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(b-a)}{\Gamma(b) \Gamma(c-a)} z^{-a} + \frac{\Gamma(c) \Gamma(a-b)}{\Gamma(a) \Gamma(c-b)} z^{-b}$$

получим

$$U_e(\alpha_n, \lambda_n, x) \rightarrow |C_n| \cos(k|x| + \varphi_n) \quad (I.7)$$

$$U_o(\alpha_n, \lambda_n, x) \rightarrow \pm |D_n| \cos(k|x| + \psi_n) \text{ при } x > 0 \text{ и } x < 0,$$

где

$$C_n = |C_n| e^{i\varphi_n} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{iK}{\alpha_n}) e^{-\frac{iK}{\alpha_n} \lambda_n^2}}{\Gamma(\frac{\lambda_n}{2} + i \frac{K}{2\alpha_n}) \Gamma(\frac{1}{2} - \frac{\lambda_n}{2} + \frac{iK}{2\alpha_n})} \quad (I.8)$$

$$D_n = |D_n| e^{i\psi_n} = \frac{\Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(\frac{iK}{\alpha_n}) e^{-\frac{iK}{\alpha_n} \lambda_n^2}}{\Gamma(\frac{\lambda_n+1}{2} + i \frac{K}{2\alpha_n}) \Gamma(1 - \frac{\lambda_n}{2} + \frac{iK}{2\alpha_n})}$$

$\Gamma$  - гамма-функция Эйлера. Очевидно, что волновая функция частицы при  $X \rightarrow -\infty$  должна быть линейной комбинацией падающей и отраженной волн, а при  $X \rightarrow \infty$  должна содержать только прошедшую волну.

$$U_1(x) = e^{ikx} + R e^{-ikx}, \quad x \rightarrow -\infty$$

$$U_2(x) = T e^{i k x}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (\text{I.9})$$

Здесь  $|R|^2$  и  $|T|^2$  - коэффициенты отражения и прохождения частицы. Из (I.7) и (I.9) имеем

$$\begin{aligned} \frac{A}{2} |C_2| e^{i\varphi_2} + \frac{B}{2\alpha_2} |D_2| e^{i\psi_2} &= T, \\ \frac{A}{2} |C_2| e^{-i\varphi_2} + \frac{B}{2\alpha_2} |D_2| e^{-i\psi_2} &= 0, \\ \frac{A}{2} |C_1| e^{i\varphi_1} - \frac{B}{2\alpha_1} |D_1| e^{i\psi_1} &= R, \\ \frac{A}{2} |C_1| e^{-i\varphi_1} - \frac{B}{2\alpha_1} |D_1| e^{-i\psi_1} &= 1. \end{aligned} \quad (\text{I.10})$$

Отсюда получим коэффициент отражения

$$|R|^2 = \frac{\left[ \frac{|C_1|}{|D_1|} \rho - \frac{|C_2|}{|D_2|} \right]^2 + 4 \frac{|C_1|}{|D_1|} \frac{|C_2|}{|D_2|} \cos^2 \left( \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right)}{\left[ \frac{|C_1|}{|D_1|} \rho - \frac{|C_2|}{|D_2|} \right]^2 + 4 \frac{|C_1|}{|D_1|} \frac{|C_2|}{|D_2|} \cos^2 \left( \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right)} \quad (\text{I.11})$$

$$\theta_n = \varphi_n - \psi_n, \quad |T|^2 = 1 - |R|^2.$$

В случае симметричной потенциальной ямы, амплитуды и фазы собственных функций одинаковы при  $x > 0$  и  $x < 0$  ( $C_1 = C_2$ ,  $D_1 = D_2$ ). Поэтому, как видно из формулы (I.11) коэффициент отражения зависит только от разности фазовых углов собственных функций и не зависит от их нормировки. В случае же асимметричной ямы  $|C_1| \neq |C_2|$  и  $|D_1| \neq |D_2|$  и коэффициент отражения зависит также от амплитуд собственных функций.

Подставив выражения постоянных (I.8) в (I.11) после несложных преобразований получим

$$|R|^2 = \frac{\sin^2 \pi \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{2} + f_1}{\sin^2 \pi \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{\pi \kappa}{\alpha} + f_2}, \quad (\text{I.I2})$$

где

$$f_1 = \operatorname{sh}^2 \left( \frac{\pi \kappa}{\alpha} \frac{1-p}{1+p} \right) + \left( \frac{Q-p}{Q+p} \right)^2 \left[ \operatorname{sh}^2 \frac{\pi \kappa}{\alpha} + \sin^2 \pi \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)}{2} \right] + \left( \frac{Q-p}{Q+p} \right) \left( \operatorname{ch} \frac{\pi \kappa}{\alpha_1} \cos \pi \lambda_2 - \operatorname{ch} \frac{\pi \kappa}{\alpha_2} \cos \pi \lambda_1 \right),$$

$$f_2 = \left( \frac{Q-p}{Q+p} \right)^2 \left[ \operatorname{sh}^2 \left( \frac{\pi \kappa}{\alpha} \frac{1-p}{1+p} \right) + \sin^2 \pi \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)}{2} \right] + \frac{Q-p}{Q+p} \cdot \left( \operatorname{ch} \frac{\pi \kappa}{\alpha_1} \cos \pi \lambda_2 - \operatorname{ch} \frac{\pi \kappa}{\alpha_2} \cos \pi \lambda_1 \right),$$

$$Q = \left| \frac{\Gamma \left( \frac{\lambda_1}{2} + \frac{i\kappa}{2\alpha_1} \right) \Gamma \left( \frac{1}{2} + \frac{\lambda_2}{2} + \frac{i\kappa}{2\alpha_2} \right)}{\Gamma \left( \frac{\lambda_1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{i\kappa}{2\alpha_1} \right) \Gamma \left( \frac{\lambda_2}{2} + \frac{i\kappa}{2\alpha_2} \right)} \right|^2$$

Заметим, что для симметричного потенциала  $Q = p = 1$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , тогда  $f_1 = f_2 = 0$  и из (I.I2) получается известная формула для коэффициента отражения [1]. В этом случае коэффициент отражения - периодическая функция от  $\lambda$  и имеет максимумы в точках  $\lambda = \frac{2n+1}{2}$  и равные нулю минимумы при  $\lambda = n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

В крайне асимметричном случае, когда  $p \rightarrow 0$  в формуле (I.I2) можно пренебречь членами порядка  $4\pi\kappa^2 p^2 / \alpha^2$ ,  $16\lambda(\lambda-1)p^2$  в результате  $|R|^2$  приобретает более компактный вид

$$|R|^2 = \frac{\left(\frac{\pi K}{\alpha} Q_0 \operatorname{ch} \frac{\pi K}{\alpha} - \operatorname{sh} \frac{\pi K}{\alpha}\right)^2 + \cos^2 \pi \Lambda \left(1 - \frac{\pi^2 K^2}{\alpha^2} Q_0^2\right)}{\left(\frac{\pi K}{\alpha} Q_0 \operatorname{ch} \frac{\pi K}{\alpha} + \operatorname{sh} \frac{\pi K}{\alpha}\right)^2 + \cos^2 \pi \Lambda \left(1 - \frac{\pi^2 K^2}{\alpha^2} Q_0^2\right)}, \quad (I.13)$$

где  $\Lambda = \frac{1}{4} \left[ 1 + \sqrt{1 + 16 \lambda (\lambda - 1)} \right]$

$$Q_0 = \frac{1}{\pi} \left| \frac{\Gamma\left(\Lambda + \frac{iK}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \Lambda + \frac{iK}{\alpha}\right)} \right|^2$$

## 2. Отражение частиц малых энергий

Так как при малой энергии частиц параметр  $\varepsilon = \frac{\pi K}{\alpha(1+p)} = \pi \sqrt{\frac{2mE}{h^2 \alpha(1+p)}}$  мал, то, разлагая в формуле (I.12) гиперболические функции в ряд по этому параметру с точностью до  $\varepsilon^4$ , для коэффициента отражения получим следующую формулу:

$$|R|^2 = \frac{f_0^2 + \varepsilon^2 f_1 + \varepsilon^4 f_3}{f_0^2 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^4 f_4},$$

где

$$f_0 = \frac{Q+p}{2p} \sin \frac{\pi(\lambda_1 + \lambda_2)}{2} + \frac{Q-p}{2p} \sin \frac{\pi(\lambda_1 - \lambda_2)}{2},$$

$$f_1 = (1-Q)^2 + (Q^2 - p^2) \left( \frac{1}{p} \cos^2 \frac{\pi \lambda_2}{2} - \cos^2 \frac{\pi \lambda_1}{2} \right), \quad (2.I)$$

$$f_2 = (1+Q)^2 + (Q^2 - p^2) \left( \frac{1}{p^2} \cos^2 \frac{\pi \lambda_2}{2} - \cos^2 \frac{\pi \lambda_1}{2} \right),$$

$$Q = \Phi \left[ 1 + \varepsilon^2 \varphi\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) + \varepsilon^2 \varphi\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) \right], \quad \Phi = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda_1}{2}\right)} \right]^2,$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi^2} (\Psi'\left(\frac{1}{2} + x\right) - \Psi'(x)).$$

Иследуем его зависимость от параметров  $\lambda$ .

1. В случае малой глубины ямы, когда  $\lambda$  стремится к единице и параметр  $\xi^2 = 4\lambda(\lambda-1)/(1+\rho)^2$  мал, в величинах  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , которые являются функциями от  $\lambda$ , можно оставить только члены, пропорциональные  $\xi^2$ :

$$\lambda_1 = 1 + \xi^2, \quad \lambda_2 = 1 + \rho^2 \xi^2. \quad (2.2)$$

Тогда с точностью  $\max\{\xi^2, \varepsilon^2\}$ ,  $Q = 1$  и коэффициент отражения имеет вид

$$|R|^2 = \frac{(\lambda-1)^2}{(\lambda-1)^2 + \kappa^2/\alpha^2}, \quad (2.3)$$

который не зависит от параметра асимметрии и переходит в известное выражение для симметричной ямы.

Для того, чтобы исследовать поведение коэффициента отражения при произвольных значениях  $\lambda$ , необходимо найти экстремумы  $|R|^2$ . Продифференцировав формулу (2.1), получим, что значения  $\lambda$ , при которых коэффициент отражения имеет экстремумы, удовлетворяют уравнению:

$$2f_0 f_0' (f_2 - f_1) - f_0^2 (f_2' - f_1') + \varepsilon^2 (f_1' f_2 - f_1 f_2') = 0. \quad (2.4)$$

2. Решим это уравнение сначала для случая глубокой ямы:  $p\lambda \gg 1$

Функция  $\phi(\lambda)$  медленно меняется от единицы при  $\lambda = 1$ , до значения  $p$  при больших  $\lambda$ . При  $p\lambda \gg 1$  с точностью до членов  $1/p^2\lambda^2$  она имеет вид:

$$\phi(\lambda) = p \left( 1 + \frac{1-p^2}{p\lambda} \right). \quad (2.5)$$

Производная  $\phi'(\lambda)$  при этом имеет порядок  $1/\lambda^2$ . Пренебрегая в уравнении (2.4) членами порядка  $1/\lambda^2$  получим

$$f_0 f_0' + \frac{\epsilon^2 \pi (1-p)}{\lambda} \left[ p \sin \left( \frac{2\pi\lambda}{1+p} \right) - \sin \left( \frac{2\pi\lambda p}{1+p} \right) \right] = 0, \quad (2.6)$$

где  $f_0 = \sin \frac{\pi(\lambda_1 + \lambda_2)}{2} + \frac{1-p^2}{p\lambda} \sin \frac{\pi\lambda}{1+p} \cos \frac{\pi\lambda p}{1+p}$ .

Учитывая, что при больших  $\lambda$

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \lambda + \Delta, \quad \Delta = \frac{(1-p)^2}{32p\lambda} \quad (2.7)$$

и решая уравнение (2.6) с вышеуказанной точностью получим, что максимумы коэффициента отражения находятся в точках

$$\lambda_{\max} = \frac{2n+1}{2} - \Delta_{\max} \quad (2.8)$$

$$\Delta_{\max} = \frac{1-p^2}{2\lambda} \left[ (1-2p) \sin \frac{2\pi n}{1+p} + \frac{1}{16p} \right],$$

где  $n$  - целое число. Причем в этих точках коэффициент отражения равен:

$$|R|_{\max}^2 = 1 - 4\epsilon^2 p. \quad (2.9)$$

аналогичным образом находим, что коэффициент отражения принимает свои минимальные значения

$$R_{\min}^2 = \left( \frac{1-p}{1+p} \right)^2 \left[ 1 + \frac{4}{\pi} \cos \frac{2\pi n}{1+p} - \frac{4}{\pi} p \varepsilon^2 \right] \quad (2.10)$$

и для  $\Delta_{\min}$

$$\Delta_{\min} = \pi - \Delta_{\max}, \quad (2.11)$$

$$f_n = \frac{1-p^2}{16A} \left[ 1 - \frac{2(1-p)}{1+p} \varepsilon^2 \right] \sin \frac{2\pi n}{1+p} - \frac{1}{16} \left( \frac{1-p}{1+p} \right)^2.$$

Каким образом, значения коэффициента отражения в точках минимума зависят от роста геометрии ямы (с увеличением  $p$  и  $\varepsilon$ ), можно увидеть, если эти формулы получены при условии  $p \gg \varepsilon$ .

Рассмотрим случай крайне асимметричной ямы, когда  $\varepsilon \ll p$  и  $\lambda_1 = 1 + O(p^2 \varepsilon^2)$ . Если пренебречь членами порядка  $O(p^2 \varepsilon^2)$  и  $O(\varepsilon^2)$  выражения в формуле (2.1) упростятся

$$\begin{aligned} f_0 &= \cos \pi \Lambda, & \Lambda &= \frac{1}{4} \left[ 1 + \sqrt{1 + 16 \lambda (\lambda - 1)} \right], \\ f_1 &= -\phi_0^2 f_0^2 (1 - \phi_0^2), \\ f_2 &= -\phi_0^2 f_0^2 + (1 + \phi_0^2), \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$f_3 = \frac{2\varphi}{\pi^2} (f_1 + \phi_0 - 1) + (\phi_0 - 1) \left( \phi_0 - \frac{1}{3} \right),$$

$$f_4 = \frac{2\varphi}{\pi^2} (f_1 - \phi_0 - 1) + (\phi_0 + 1) \left( \phi_0 + \frac{1}{3} \right),$$

$$\Phi_0(\lambda) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \lambda)} \right]^2.$$

С учетом этого уравнение (2.4) можно привести к виду

$$f_0 f_0' (1 - \varepsilon^2 \phi_0^2) - f_0^2 \frac{\phi_0'}{2\phi_0} (1 + \varepsilon^2 \phi_0^2) - \frac{\varepsilon^2 \phi_0'}{2\phi_0} (1 - \phi_0^2) = 0. \quad (2.13)$$

Очевидно, что при малых  $\varepsilon^2$  решения этого уравнения находятся вблизи точек  $\Lambda = n$  и  $\Lambda = (2n+1)/2$ , причем полуцелые значения соответствуют минимуму коэффициента отражения, а целые значения - максимуму. Будем искать решения в виде

$$\Lambda_{\min} = \frac{2n+1}{2} - \delta_{\min}, \quad \Lambda_{\max} = n - \delta_{\max}. \quad (2.14)$$

Так как  $\phi_0(\Lambda)$  и  $\phi_0'(\Lambda)$  - медленно меняющиеся функции по сравнению с  $\sin(\pi\Lambda)$  и  $\cos(\pi\Lambda)$ , то при решении уравнения их можно взять в точках  $\Lambda = n$  и  $\Lambda = n + 1/2$ . В результате, с точностью до  $\varepsilon^4$ , находим

$$\begin{aligned} \delta_{\min} &= \frac{\varepsilon^2}{\pi^2} \frac{\phi_0'}{\phi_0} (1 - \phi_0^2), \\ \delta_{\max} &= -\operatorname{arctg} \frac{\phi_0'}{2\pi\phi_0} (1 + \varepsilon^2 \phi_0). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Ввиду того, что при большой глубине ямы,  $\Lambda$  приближенно равно  $\Lambda - 1/4$ , получим

$$\begin{aligned} \Lambda_{\min} &= n - \frac{1}{4} + \delta_{\min} = n - \Delta_{\min} \\ \Lambda_{\max} &= \frac{2n+1}{2} - \frac{1}{4} + \delta_{\max} = n - \Delta_{\max}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Обобщая полученные результаты, можно сказать, что коэффициент отражения имеет минимумы в точках  $\Lambda = n - \Delta$  ( $\Delta \ll 1$ ). Причем  $\Delta$  зависит от энергии частицы  $\varepsilon^2$ , от параметра асимметрии  $\rho$  и от глубины ямы  $\lambda$ . При фиксированной глубине ямы и

энергии частицы  $\Delta$  растет с увеличением асимметрии потенциала (т.е. с уменьшением  $\rho$ ) и в крайне асимметричном случае достигает значений, приведенных в формулах (2.16) и (2.16), а при фиксированной асимметрии  $\Delta$  уменьшается с увеличением глубины ямы.

Подставляя значения экстремумов (2.14) в формулу (2.1), получим

$$|R|_{\min}^2 = \left( \frac{1 - \phi_0}{1 + \phi_0} \right)^2 \left[ 1 - \frac{4\epsilon^2}{\pi^2} \frac{\phi_0^2}{1 - \phi_0^2} \left( \psi + \frac{\pi^2}{3} \right) \right], \quad (2.17)$$

$$|R|_{\max}^2 = 1 - 4\phi_0^2 \epsilon^2.$$

Заметим, что значение функции  $\phi_0(\lambda)$  монотонно падает, начиная с 0,25 при  $\lambda = 1$  до нуля на бесконечности. При больших  $\lambda$  она имеет вид

$$\phi_0(\lambda) = \frac{1}{\pi\lambda}.$$

Поэтому значение коэффициента отражения в точках минимума растет с ростом глубины ямы, а для глубокой ямы ( $\lambda \gg 1$ ) приближается к значению максимума, и оба экстремума близки к единице.

$$|R|_{\max}^2 = 1 - \frac{4}{\pi\lambda} \epsilon^2, \quad |R|_{\min}^2 = 1 - \frac{4}{\pi\lambda} \quad (2.18)$$

Таким образом, асимметрия ямы уже при малых энергиях частицы приводит к подавлению эффекта прозрачности. Как будет видно в дальнейшем, с ростом энергии частицы минимум коэффициента отражения совсем исчезают, и кривая зависимости  $|R|^2$  от глубины ямы сглаживается.

### 3. Случай больших энергий

I. Проанализируем случай отражения частиц больших энергий от потенциальной ямы с произвольной, но не очень большой асимметрией, полагая при этом

$$\rho \epsilon \gg 1, \quad \frac{\epsilon}{\pi \lambda} \gg 1, \quad \text{где } \epsilon = \frac{\pi \kappa}{\alpha(1+\rho)} = \frac{\pi \sqrt{2mE/h^2}}{\alpha(1+\rho)} \quad (3.1)$$

Легко убедиться в том, что при этих условиях и при условии

$$\frac{Q-\rho}{Q+\rho} e^{2\epsilon\rho} \gg 1 \quad (3.2)$$

выражения  $f_1$  и  $f_2$  в формуле (I.I2), которые равнялись нулю для симметричного потенциала, сейчас велики:

$$f_1 = \left(\frac{Q-\rho}{Q+\rho}\right)^2 \frac{e^{2\epsilon(1+\rho)}}{4}, \quad f_2 = \left(\frac{Q-\rho}{Q+\rho}\right)^2 \frac{e^{2\epsilon(1+\rho)}}{4}. \quad (3.3)$$

Теперь они определяют поведение коэффициента отражения, так как членом  $\text{si} \cdot \frac{\pi(\lambda_1 + \lambda_2)}{2}$  в (I.I2) можно пренебречь, при этом получим

$$|R|^2 = \left(\frac{Q-\rho}{Q+\rho}\right)^2. \quad (3.4)$$

Для того, чтобы выяснить поведение  $Q$  при больших энергиях, необходимо найти разложение для отношения  $\Gamma$ -функций по обратным степеням аргумента с точностью до четвертой степени включительно. Пользуясь асимптотической формулой Стирлинга и разлагая входящие туда выражения, получим

$$\frac{\Gamma(z + \frac{1}{2})}{\Gamma(z)} = \sqrt{z} \left( 1 - \frac{1}{8z} + \frac{1}{128z^2} + \frac{5}{128 \cdot 8z^3} - \frac{21}{128 \cdot 256z^4} \right). \quad (3.5)$$

Используя эту формулу, выражение для  $Q$  при больших энергиях можно привести к виду

$$Q = p \left[ 1 + \frac{\lambda(\lambda-1)\pi^4}{16\rho^2\varepsilon^4} \cdot \frac{1-p}{1+p} \right]. \quad (3.6)$$

Тогда условие (3.2) можно записать так:

$$1-p \gg \frac{32\varepsilon^4}{\pi^4 \lambda(\lambda-1)} e^{-2\varepsilon\rho}. \quad (3.7)$$

Так как выражение в правой части неравенства (3.7) мало, то уже при небольшом отклонении от симметричности потенциала, формула для коэффициента отражения существенно меняется и принимает вид

$$|R|^2 = \left[ \frac{\lambda(\lambda-1)\pi^4(1-p)}{32\rho^2\varepsilon^4(1+p)} \right]^2. \quad (3.8)$$

Отсюда видно, что экспоненциальное падение  $|R|^2$  в зависимости от энергии в случае симметричного потенциала заменилось теперь степенной зависимостью.

2. Рассмотрим случай асимметричной ямы ( $\rho \ll 1$ ). При больших энергиях в формуле (I.13) можно оставить только экспоненциально большие члены, тогда получим

$$|R|^2 = \left( \frac{\varepsilon Q_0 - 1}{\varepsilon Q_0 + 1} \right)^2. \quad (3.9)$$

Если при этом  $\lambda \gg 1$ , то  $Q_0 = \frac{1}{\pi \sqrt{\lambda^2 + \kappa^2/\alpha^2}}$  и выражение (3.9) переходит в известную формулу для коэффициента отражения от прямоугольной потенциальной стенки

$$|R|^2 = \left( \frac{\sqrt{\lambda^2 \alpha^2 + \kappa^2} - \kappa}{\sqrt{\lambda^2 \alpha^2 + \kappa^2} + \kappa} \right)^2. \quad (3.10)$$

При условии же  $\kappa \gg \lambda \alpha$  коэффициент отражения равен

$$|R|^2 = \left( \frac{\lambda^2 \alpha^2}{4\kappa^2} \right)^2. \quad (3.11)$$

Следовательно, в случае крайне асимметричной ямы при больших энергиях частицы  $|R|^2$  падает квадратично. Таким образом, хотя коэффициент отражения при больших энергиях мал, но все-таки намного больше, чем для симметричного потенциала.

#### 4. Связанные состояния

При отрицательных энергиях частиц существуют дискретные собственные значения энергии. В этом случае можно положить  $\kappa = i\alpha$ , так что энергия частицы будет равна  $E = -\hbar^2 \alpha^2 / 2m$ , параметры

$$\alpha_n = \frac{1}{2} \left( \lambda_n - \frac{\alpha}{\alpha_n} \right), \quad \beta_n = \frac{1}{2} \left( \lambda_n + \frac{\alpha}{\alpha_n} \right) \quad (4.1)$$

$\hbar = 1, 2$

будут действительными величинами, а волновые функции определяются выражениями (1.4). Снова можно воспользоваться асимптотическими формулами (1.7), в которых  $\kappa$  надо заменить на  $i\alpha$ .

Существование нормируемых решений возможно лишь в том случае, когда в асимптотических выражениях (I.7) отсутствуют члены, расходящиеся на бесконечности, а именно, члены, пропорциональные  $e^{\alpha|x|}$ . Чтобы это условие выполнялось, необходимо положить

$$\begin{aligned} A_1 C_1 - B_1 D_1 &= 0, \\ A_2 C_2 + B_2 D_2 &= 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где  $C$  и  $D$  даются выражениями (I.6). Из условия непрерывности волновых функций и их производных в точке  $x = 0$ , получим

$$A_1 = A_2, \quad B_1 \alpha_1 = B_2 \alpha_2. \quad (4.3)$$

Решая совместно (4.2) и (4.3) получим дисперсионное уравнение

$$C_2 D_1 + \rho D_2 C_1 = 0, \quad (4.4)$$

которое после подстановки постоянных (I.8) и после небольших преобразований переходит в

$$(F+1) \sin \pi \left( \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - \frac{\alpha}{\alpha} \right) + (F-1) \sin \pi \left( \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} - \frac{\alpha}{\alpha} \frac{1-\rho}{1+\rho} \right) = 0, \quad (4.5)$$

$$r = \frac{1}{\rho} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda_1}{2} - \frac{\alpha}{2\alpha_1}\right) \Gamma\left(\frac{\lambda_1}{2} + \frac{\alpha}{2\alpha_1}\right) \Gamma\left(\frac{1+\lambda_2}{2} - \frac{\alpha}{2\alpha_2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\lambda_2}{2} + \frac{\alpha}{2\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda_2}{2} - \frac{\alpha}{2\alpha_2}\right) \Gamma\left(\frac{\lambda_2}{2} + \frac{\alpha}{2\alpha_2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\lambda_1}{2} - \frac{\alpha}{2\alpha_1}\right) \Gamma\left(\frac{1+\lambda_1}{2} + \frac{\alpha}{2\alpha_1}\right)}.$$

Заметим, что для симметричной ямы  $F = 1$  и из уравнения (4.5) следует  $\alpha/\alpha = \lambda - n - 1$ , т.е. получается известное выражение для уровней энергии симметричной ямы [2]

$$E_n = -\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} (\lambda - n - 1)^2, \quad 0 \leq n \leq \lambda - 1 \quad (4.6)$$

В крайне асимметричном случае, когда  $P$  стремится к нулю, дисперсионное уравнение можно написать в виде

$$C_1 + \frac{\alpha}{\alpha_1} D_1 = 0 \quad \text{или же} \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \left( \lambda_1 - \frac{\alpha}{\alpha_1} \right) = -1/F_0, \quad (4.7)$$

$$\text{где} \quad F_0 = \frac{\alpha}{\alpha} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda_1}{2} + \frac{\alpha}{2\alpha_1}\right) \Gamma\left(\frac{\lambda_1}{2} - \frac{\alpha}{2\alpha_1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda_1}{2} + \frac{\alpha}{2\alpha_1}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda_1}{2} - \frac{\alpha}{2\alpha_1}\right)}.$$

Таким образом, мы получили дисперсионные уравнения (4.5) и (4.7), из которых можно определить энергетический спектр частицы. Это трансцендентные уравнения, решения которых можно найти только численно. В результате численных расчетов получаем, что уровни энергии асимметричной ямы мало отличаются от уровней соответствующей симметричной ямы, а именно

$$E_n = -\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} \left[ (\lambda - n - 1)^2 + \Delta_n \right], \quad (4.8)$$

где  $\Delta_n$  зависит от степени асимметрии и от глубины ямы. Зависимость  $\Delta_n$  от  $P$  показана на рис.4.

Теперь найдем волновые функции связанных состояний. Как уже было сказано, они определяются выражениями (I.4), в которых постоянные  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  являются решениями системы уравнений (4.2) и (4.3), а  $\alpha/\alpha$  решением уравнения (4.5). Легко

видеть, что одним из решений уравнения (4.5) может быть  $\lambda_1 = \frac{\alpha}{\alpha_1} = 2n$ ,  $\lambda_2 = \frac{\alpha}{\alpha_2} = 2m$  где  $n$  и  $m$  целые числа. При этом условия  $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 = 0$  и решением уравнений (4.2) будет

$$A_1 = A_2 = 0, \quad B_2 = \rho B_1. \quad (4.9a)$$

Если же  $\mathcal{D}_1 \neq \mathcal{D}_2 \neq 0$ , получим

$$B_1 = \frac{A_1 C_1}{\mathcal{D}_1}, \quad B_2 = -\frac{A_1 C_2}{\mathcal{D}_2}. \quad (4.9b)$$

С учетом (4.8) параметры  $\alpha_{1,2}$  и  $b_{1,2}$  можно переписать в виде:

$$\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{2} - \frac{1}{1+\rho} \sqrt{(\lambda - n - 1)^2 + \Delta n}, \quad b_1 = \frac{\lambda_1}{2} + \frac{1}{1+\rho} \sqrt{(\lambda - n - 1)^2 + \Delta n} \quad (4.10)$$

$$\alpha_2 = \frac{\lambda_2}{2} - \frac{\rho}{1+\rho} \sqrt{(\lambda - n - 1)^2 + \Delta n}, \quad b_2 = \frac{\lambda_2}{2} + \frac{\rho}{1+\rho} \sqrt{(\lambda - n - 1)^2 + \Delta n}.$$

Волновые функции для четырех энергетических уровней показаны на рис.5.

## 5. Обсуждение результатов

Как уже было сказано, асимметрия потенциальной ямы приводит к подавлению эффекта прозрачности ямы. При малой энергии проходящих частиц коэффициент отражения имеет минимумы при значениях  $\lambda$ , близких к целому числу. Значение коэффициента отражения в точках минимума растет с увеличением асимметрии и глубины потенциальной ямы. С ростом энергии частиц кривая зависимости  $|R|^2$  от глубины ямы постепенно сглаживается и при

больших энергиях частиц эффект прозрачности полностью отсутствует. Асимметрия потенциальной ямы приводит также к изменению зависимости  $|R|^2$  от энергии проходящих частиц. В то время как для симметричной ямы коэффициент отражения зависит от энергии частицы экспоненциально, для асимметричной ямы эта зависимость при  $k/\alpha \gg 1$  становится степенной. Это приводит к тому, что при больших энергиях частицы  $|R|^2$  для асимметричной ямы спадает намного медленнее, чем для симметричной ямы. Такое поведение коэффициента отражения подтверждается численным расчетом, результаты которого показаны на рис. 2, где изображен  $|R|^2$  для двух значений энергии ( $k/\alpha = 0,1; 1$ ) и двух значений  $p$  ( $p = 1; 0,1$ ). При  $k/\alpha = 0,1$   $|R|^2$  имеет минимумы, значение которых растет с ростом  $\lambda$ , а при  $k/\alpha = 1$  минимумов уже нет. Из рисунка видно, что отражение от асимметричной ямы больше, чем от соответствующей симметричной ямы. Это видно также и из рис. 3, на котором коэффициент отражения изображен как функция от энергии частицы для четырех различных значений параметра асимметрии ( $p = 1; 0,25; 0,1; 0$ ). В той области энергий, где отражение от симметричной ямы практически равно нулю, коэффициент отражения от асимметричной ямы еще достаточно велик. Прозрачность потенциальной ямы можно объяснить тем, что волны, отраженные от границ ямы, при определенных условиях могут погасить друг друга. В случае асимметричной ямы намного труднее удовлетворить этим условиям. Однако следует отметить, что и в случае асимметричной ямы, при определенных значениях параметра асимметрии и энергии частиц возможно полное прохождение. Остановимся на этом подробнее. Если

$\lambda_1$  и  $\lambda_2$  одновременно целые числа, что возможно только в том случае, когда параметр асимметрии имеет вид  $P = \sqrt{\frac{m(m-1)}{n(n-1)}}$ , где  $m$  и  $n$  целые числа. Тогда выражения для функций  $f_1$  и  $f_2$  в формуле (I.2) упрощаются и коэффициент отражения определяется формулами:

$$|R|^2 = \left[ \frac{Q \operatorname{th} \varepsilon - p \operatorname{th} (p \varepsilon)}{Q \operatorname{th} \varepsilon + p \operatorname{th} (p \varepsilon)} \right]^2, \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 2n_1 \\ \lambda_2 = 2n_2 \end{matrix},$$

$$|R|^2 = \left[ \frac{Q \operatorname{th} \varepsilon \operatorname{th} (p \varepsilon) - p}{Q \operatorname{th} \varepsilon \operatorname{th} (p \varepsilon) + p} \right]^2, \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 2n_1 + 1 \\ \lambda_2 = 2n_2 \end{matrix}, \quad (5.1)$$

$$|R|^2 = \left[ \frac{Q - p \operatorname{th} \varepsilon \operatorname{th} p \varepsilon}{Q + p \operatorname{th} \varepsilon \operatorname{th} p \varepsilon} \right]^2, \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 2n_1 \\ \lambda_2 = 2n_2 + 1 \end{matrix},$$

$$|R|^2 = \left[ \frac{Q \operatorname{th} (p \varepsilon) - p \operatorname{th} \varepsilon}{Q \operatorname{th} (p \varepsilon) + p \operatorname{th} \varepsilon} \right]^2, \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 2n_1 + 1 \\ \lambda_2 = 2n_2 + 1 \end{matrix},$$

где  $n_1$  и  $n_2$  целые числа.

Из выражения (3.6) для  $Q$  видно, что при больших энергиях частицы  $Q > p$ . Можно показать, что и при малых энергиях частицы  $Q > p$ . Нетрудно убедиться, что при этих условиях в случаях когда  $\lambda_1 = 2n_1$ ,  $\lambda_2 = 2n_2 + 1$ , и  $\lambda_1 = 2n_1 + 1$ ,  $\lambda_2 = 2n_2 + 1$ , коэффициент отражения может равняться нулю, если энергия частицы является решением уравнений

$$Q \operatorname{th} \varepsilon \operatorname{th} (p \varepsilon) - p = 0, \quad \lambda_1 = 2n_1, \quad \lambda_2 = 2n_2 + 1 \quad (5.2)$$

$$Q \operatorname{th} (p \varepsilon) - p \operatorname{th} \varepsilon = 0, \quad \lambda_1 = 2n_1 + 1, \quad \lambda_2 = 2n_2 + 1$$

Следовательно, при целом  $\lambda_1$  и целом нечетном  $\lambda_2$ , асимметричная потенциальная яма Пешля-Теллера имеет резонансный уровень энергии и коэффициент отражения при этом равен нулю.

Обратимся теперь к связанным состояниям частицы. Асимметрия потенциальной ямы приводит к сдвигу уровней энергии частицы на величину  $\Delta_n$ . На рис.4 приведены графики зависимости для  $\Delta_n$  четырех энергетических уровней (для  $\lambda = 4,8$ ) от параметра асимметрии. Из графика видно, что с ростом асимметрии сдвиг уровней увеличивается. На рис.5 показаны волновые функции четырех уровней при том же значении  $\lambda$  для двух значений параметра асимметрии  $\rho = 0,1; 1$ . Из рисунка видно, что вследствие асимметрии ямы волновые функции сильно изменились. Например, в то время как для симметричной ямы волновая функция второго уровня равна нулю в точке  $X = 0$ , волновая функция частицы в асимметричной яме имеет в этой точке максимум.

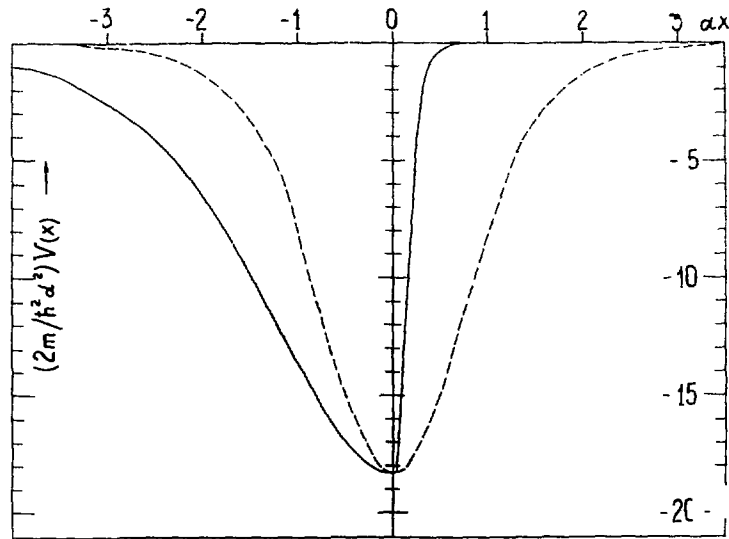


Рис.1 Потенциальная яма Пешля-Теллера. Пунктирная кривая соответствует симметричной яме ( $\rho = 1$ ), сплошная кривая

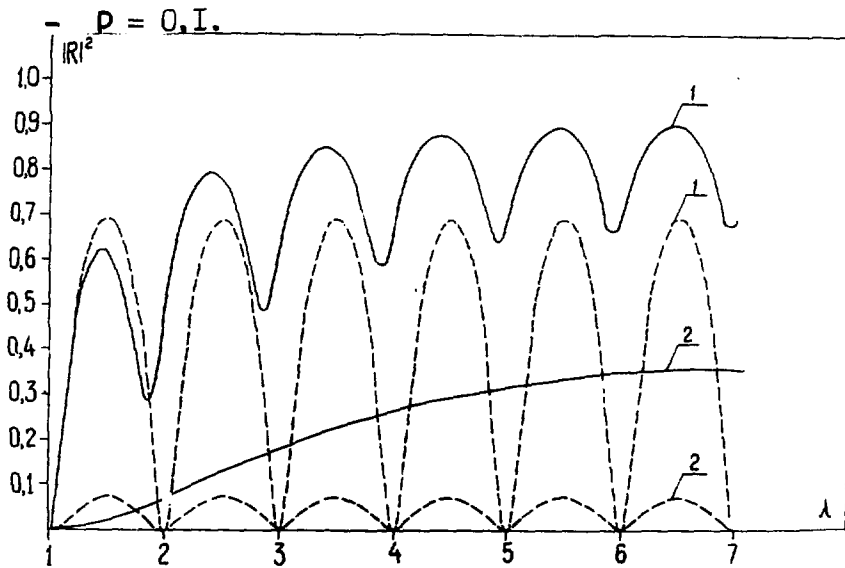


Рис.2 Зависимость коэффициента отражения от глубины потенциальной ямы. Пунктирные кривые соответствуют  $\rho = 1$ , сплошные  $\rho = 0,1$ . Кривые 1  $\kappa/\alpha = 0,1$ . Кривые 2 -  $\kappa/\alpha = 1$ .

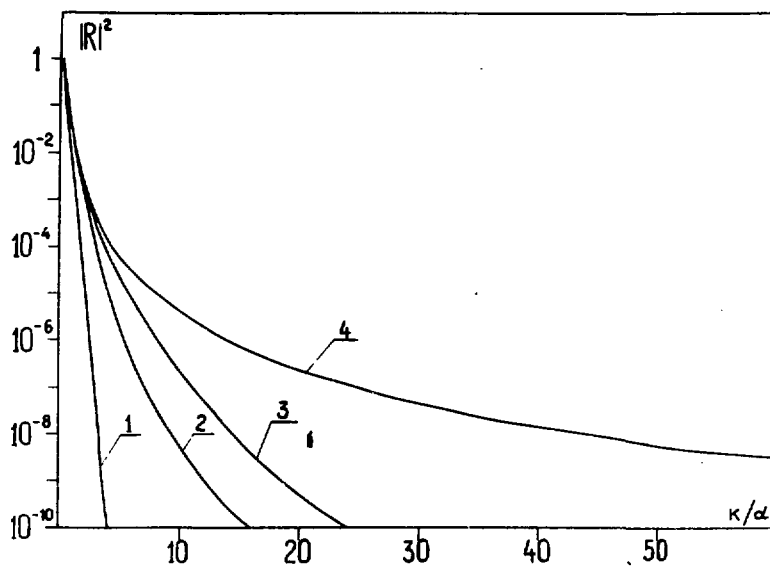


Рис.3 График зависимости  $|R|^2$  от энергии частиц  $\kappa/d$  для четырех значений  $\rho$ . Кривая 1 соответствует  $\rho = 1$   
 2 -  $\rho = 0,25$ ; 3 -  $\rho = 0,1$ ; 4 -  $\rho = 0$ .

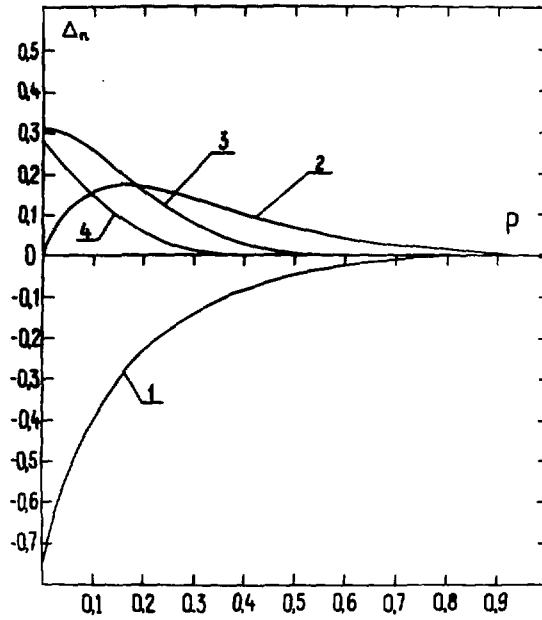


Рис.4 Сдвиг  $\Delta_n$  энергетических уровней асимметричной ямы от соответствующих уровней симметричной ямы в зависимости от параметра асимметрии,  $\lambda = 4, 8$ .

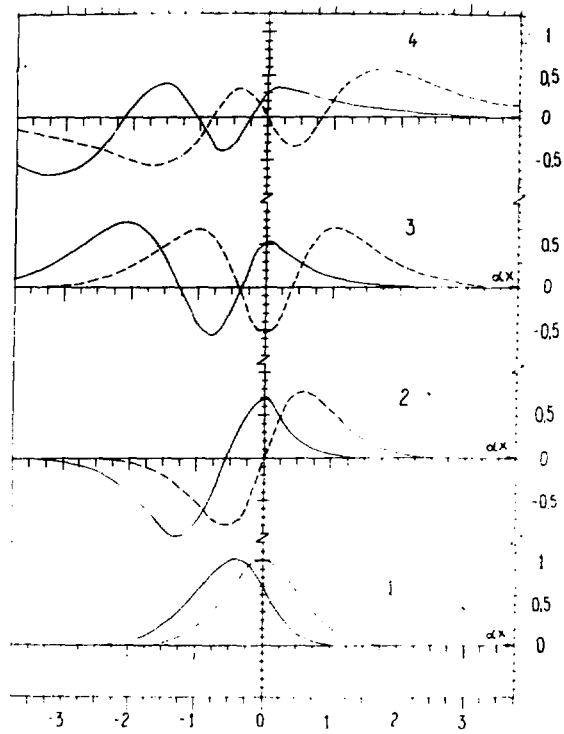


Рис.5 Волновые функции четырех уровней при  $\lambda = 4,8$ . Симметричной яме соответствуют пунктирные кривые, асимметричной яме с  $\rho = 0,1$  - сплошные кривые.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. М.: Наука, 1974.
2. Флигге В. Задачи по квантовой механике. М.: Мир, 1974, т. I.

Рукопись поступила 9 июля 1965

К.З.АЦАГОРЦЯН, Л.А.ГЕВОРГЯН

ПОДАВЛЕНИЕ ЭФФЕКТА ПРОЗРАЧНОСТИ И УСИЛЕНИЕ ОТРАЖЕНИЯ ЧАСТИЦ  
ОТ АСИММЕТРИЧНОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЯМЫ

Редактор Л.П.Мукаян

Технический редактор А.С.Абрамян

---

Подписано в печать 25/X-85г.  
Офсетная печать. Уч. изд. л. 2,0  
Зак. тип. № 486

T-17967

Формат 60x64/16  
Тираж 299 экз. Ц. 30 к.  
Индекс 3624

---

Отпечатано в Ереванском физическом институте  
Ереван 36, Маркарян 2

индекс 3624



ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ